حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الثاني

• التكاملات المتعددة MULTIPLE INTEGRALS

- مقدمة
- التكامل الثنائي
- حساب التكاملات الثنائيـــة
- المـــساحات والحجـــوم
- الاحداثيات القطبية
- التكامل الثلاثي
- الاحـــداثيات الاســـطوانية والكرويـــة
- **العزم ومركز الثقل**
- **المساحة السطحية**

تطبيقات التكامل الثنائي والثلاثي

Applications Of The Double And Triple Integral

العـــــزم ومركز الثقل لصفيحة

لتكن T صفيحة لها شكل المنطقة R في المستوى xy إذا كانت الكثافة المساحية عنـــد (x, y) هـــي $\rho(x, y)$ حيث ρ دالة متصلة على R فإن :

١- كتلة T هي :

$$M \equiv \iint_R \rho(x, y)\, dA$$

٢- العزم للصفيحة T بالنسبة إلى المحور x, y هي :

$$M_x \equiv \iint_R y\, \rho\, (x, y)\, dA\ ,\ M_y \equiv \iint_R x\, \rho\, (x, y)\, dA$$

٣- مركز الثقل $(\overline{x}, \overline{y})$ للصفيحة T هو :

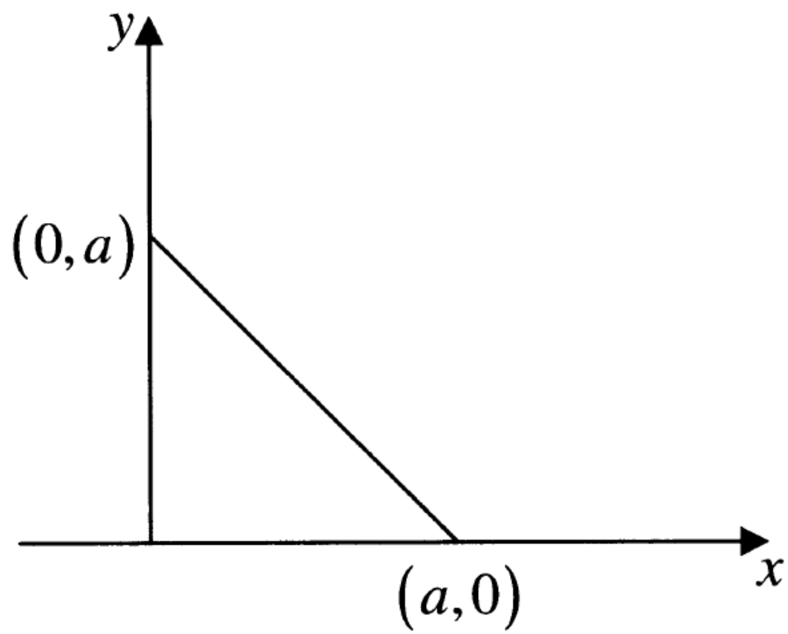
$$\overline{x} = \frac{M_y}{M}\ ;\ \overline{y} = \frac{M_x}{M}$$

مثال

صفيحة T لها شكل مثلث قائم متساوي الساقين طول كل منها a . أوجد مركز ثقل الـــصفيحة إذا كانت الكثافة عند النقطة Q تتناسب مع مربع المسافة من Q إلى الزاوية القائمة .

الحل

كما هو موضح بالشكل



من المعطى أن معادلة الوتر هي : $x + y = a$

$$\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$$

$$M = \iint_R k(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= k \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{a-x} dx = k \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3\right] dx$$

$$\equiv k\, \frac{\mathrm{a}^4}{6}$$

$$M_y = \iint_R x\, k(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^{\mathrm{a}} \int_0^{a-x} x\, k(x + y)\, dy\, dA = k\, \frac{a^5}{15}$$

ومن ذلك نحصل على

$$\bar{x} = \frac{k\, a^5/15}{k\, a^2/6} = \frac{2a}{5}$$

وحيث أن هناك تماثل فإن

$$\bar{y} = 2\, a / 5$$

المساحة السطحية

ليكن $z = f(x, y) \geq 0$ ضمن المنطقة R في المستوى xy وَ لنفرض أن f لها مشتقات جزئية متصلة على R . من هذا ينتج مجسم محدود من أعلى بالسطح $z = f(x, y)$ ومن الأسفل بالمنطقة R.

فإن المساحة السطحية لهذا المجسم تعطى على الشكل الآتي :

$$A = \iint_R \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1}\, dA$$

هذه الصيغة ممكن أن تطبق أيضاً إذا كانت $z = f(x, y) \leq 0$ على R .

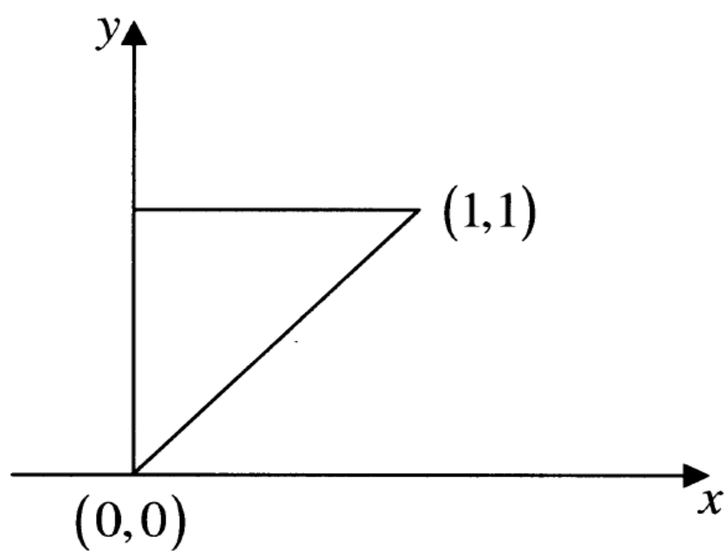
مثال

لتكن R منطقة مثلثية الشكل في المستوى oxy رؤوسها $(0,0,0)$ ، $(0,1,0)$ ، $(1,1,0)$ أوجد المساحة السطحية لجزء من المجسم المحدود من الأعلى بالمنحنى $f(x,y)=3x+y^2$ ومن **الأسفل** بالمنطقة R.

الحل

المنطقة R محدودة بالمنحنيات $y=x$ ، $x=0$ وَ $y=1$. كما هو موضح بالشكل

$$f(x,y)=3x+y^2$$



$$A = \iint_R \sqrt{3^2 + (2y)^2 + 1}\, dA = \int_0^1 \int_0^y \ (0 + 4y^2)^{\frac{1}{2}} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \ (10 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}\, x\Big]_0^4 dy = \int_0^1 \ (10 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}\, y\, dy$$

$$= \frac{1}{12}(10 + 4y^2)^{3/2} \ \Big]_0^1 = \frac{14^{3/2} - 10^{3/2}}{12} \cong 1.7 \cdot$$

مثال

أوجد مركز ثقل صفيحة عبارة عن نصف حلقة تقع في الربعين الأول والثاني في المستوي الاحداثي ومحدودة بالمنحنيين

$x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 36$ ودالة الكثافة المساحية $\rho(x, y) = 4$

مثال

لتكن R منطقة محدودة بالمنحني $x^2 + y^2 = 16$ أوجد المساحة السطحية لجزء

من المجسم المحدود من الأعلى بالدالة $f(x, y) = x^2 + y^2 + 10$

ومن الأسفل بالمنطقة R

تـــــمــــاريــــن

١- أوجد المساحة السطحية لجزء من الأسطوانة $y^2 + z^2 = a^2$ الذي يقع داخـــل الأســـطوانة $x^2 + y^2 = a^2$.

٢- أوجد مساحة المنطقة على المستوى $z = y + 1$ وتكون داخل الأسطوانة $x^2 + y^2 = 1$.

٣- أوجد المساحة السطحية لجزء من المجسم المحدود من أعلى بالسطح $z = y + \frac{x^2}{2}$ ومن الأســـفل بالمربع الذي رؤوسه $(1,1,0), (1,0,0), (0,0,0), (0,1,0)$ في المستوى xy .

في التمارين من ٤-١٠ أوجد الكتلة ومركز الثقل للصفيحة المحدودة بالمنحنيات المعطاة ولها الكثافة ρ

٤- $y = 0$ ، $x = 9$ ، $y = \sqrt{x}$ ، $\rho(x, y) = x + y$.

٥- $y = 0$ ، $x = 8$ ، $y = \sqrt[3]{x}$ ، $\rho(x, y) = y^2$.

٦- $y = 0$ ، $y = 4$; $y = x^2$ ، $\rho = k$

٧- $x = 0$, $y = 0$; $y = \sin x$; $x = \pi$ ، $\rho(x, y) = y$.

تـــمـــاريـــن

٨- $\rho(x,y)=1\ ,x=y^{2}\ ;y-x=2\ ,\ y=-2\ ,y=3$

٩- $\rho(x,y)=4\ ,x=\sec x\ \ ,x=\frac{-\pi}{4}\ ,\ x=\frac{\pi}{4},y=\frac{1}{2}$

١٠- $\rho(x,y)=y^{2}\ ,x=e^{-x}\ \ ,y=0\ ,\ x=0\ ,x=1$