حساب التكامل

111 ريض

الأسبوع الثامن

الأهداف:

يتعلم الطالب حساب تكامل دوال تحتوي على جذور صيغ تربيعية

يتعلم الطالب حساب التكامل للدوال الكسرية

يتعلم الطالب حساب بعض التكاملات بإستخدام تعويضات متفرقة

طرائق التكامل

- ✓ 1.5 التكامل بالتجزئ
- ✓ 2.5 تكامل قوى الدوال المثلثية
- 3.5 التعويضات المثلثية
- 4.5 الكسور الجزئية
- 5.5 تعويضات متفرقة

3.5 التعويضات المثلثية

تستخدم التعويضات المثلثية لحل التكاملات التي تحتوي على الجذور $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{a^2+x^2}$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ حيث $a>0$
تقوم التعويضات المثلثية بتحويل هذه التكاملات إلى تكاملات لقوى دوال مثلثية

(1) نستخدم التعويض $x=a\sin\theta$ حيث $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ للتخلص من $\sqrt{a^2-x^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$

(2) نستخدم التعويض $x=a\tan\theta$ حيث $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ للتخلص من $\sqrt{a^2+x^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{a^2\sec^2\theta}=a\sec\theta$$

(3) نستخدم التعويض $x=a\sec\theta$ حيث $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ للتخلص من $\sqrt{x^2-a^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}=\sqrt{a^2\tan^2\theta}=a\tan\theta$$

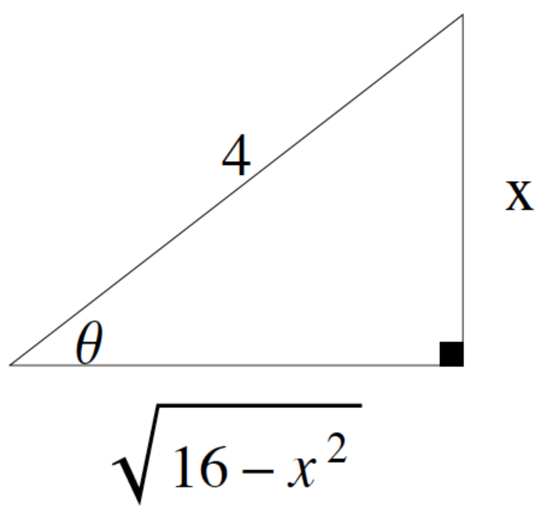
مثال : $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{4^2-x^2}}\,dx$$

نستخدم التعويض $\sin\theta = \dfrac{x}{4} \implies x = 4\sin\theta$

$$dx = 4\cos\theta\,d\theta$$



$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{4\cos\theta}{16\sin^2\theta\sqrt{16-16\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{4\cos\theta}{16\sin^2\theta\sqrt{16\cos^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{4\cos\theta}{16\sin^2\theta\,4\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{16\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{16}\int \csc^2\theta\,d\theta = -\frac{1}{16}\cot\theta + c$$

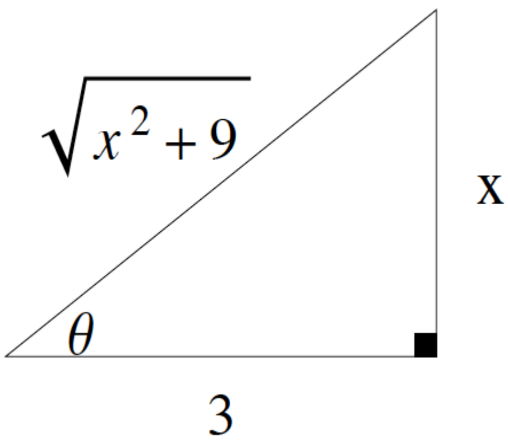
$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = -\frac{1}{16}\,\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + c$$

مثال :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3^2}}\,dx$$



نستخدم التعويض $x = 3\tan\theta \implies \tan\theta = \frac{x}{3}$

$$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9\tan^2\theta+9}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9\left(\tan^2\theta+1\right)}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right| + c$$

مثال :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{\left(x^2\right)^2}\,dx$$

نستخدم التعويض $\sec\theta = \dfrac{x}{5} \implies x = 5\sec\theta$

$$dx = 5\sec\theta\ \tan\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{\left(x^2\right)^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{25\sec^2\theta-25}}{\left(5^2\sec^2\theta\right)^2}\,5\sec\theta\ \tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{25\left(\sec^2\theta-1\right)}}{5^4\sec^4\theta}\,5\sec\theta\ \tan\theta\,d\theta$$

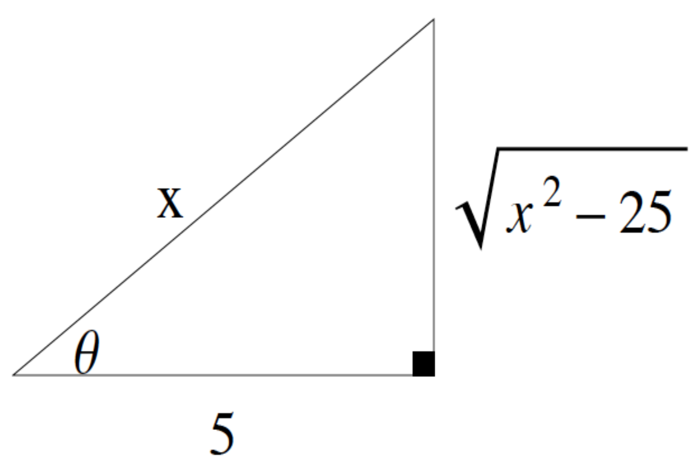
$$= \int \frac{\sqrt{25\ \tan^2\theta}}{5^4\sec^4\theta}\,5\sec\theta\ \tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{5\ \tan\theta}{5^4 \sec^4\theta}\, 5\sec\theta\ \tan\theta\, d\theta = \int \frac{5^2 \sec\theta\ \tan^2\theta}{5^4 \sec^4\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta}{5^2 \sec^3\theta}\, d\theta = \frac{1}{25}\int \tan^2\theta\, \frac{1}{\sec^3\theta}\, d\theta = \frac{1}{25}\int \frac{\sin^2\theta\ \cos^3\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{25}\int (\sin\theta)^2 \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{25}\, \frac{(\sin\theta)^3}{3} + c = \frac{1}{75}\,(\sin\theta)^3 + c$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}\, dx = \frac{1}{75}\left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\right)^3 + c$$



4.5 الكسور الجزئية

تستخدم الكسور الجزئية لحساب تكاملات الدوال الكسرية ، والدالة الكسرية هي حاصل قسمة كثيرتي حدود .

العامل الخطي : هو كثيرة حدود من الدرجة الأولى ، أي أنه على الصورة $ax+b$ حيث $a,b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

مثال : $2x$ ، $x-3$ ، $4x+1$ جميعها عوامل خطية .

المقدار التربيعي غير القابل للاختزال : هو كثيرة حدود من الدرجة الثانية ليس لها حلول حقيقية ، أي أنه على الشكل ax^2+bx+c حيث $a,b,c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ و $b^2-4ac<0$.

مثال : x^2+1 ، x^2+9 ، x^2+x+1 جميعها مقادير تربيعية غير قابلة للاختزال .
أما المقدار التربيعي x^2-4 فهو قابل للاختزال
لأن $x^2-4=(x-2)(x+2)$

مبرهنة : إذا كانت $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ دالة كسرية ودرجة $g(x)$ أصغر من درجة $h(x)$ ، فإن هناك كسوراً $F_1, F_2, \cdots, F_n$ تحقق $f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x)$ وتكون كل $F_i(x)$ إما على الصورة $\dfrac{A}{(ax+b)^m}$ (حيث $m \in \mathbb{N}$) أو على الصورة $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}$ حيث $b^2 - 4ac < 0$

مساهمة العامل الخطي $(ax+b)^m$ تأخذ الصورة :

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

حيث $A_1, A_2, \cdots, A_m$ ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مساهمة المقدار التربيعي غير القابل للاختزال $(ax^2+bx+c)^m$ تأخذ الصورة :

$$\frac{A_1 + B_1 x}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2 + B_2 x}{(ax^2+bx+c)^2} \cdots + \frac{A_m + B_m x}{(ax^2+bx+c)^m}$$

حيث $A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_m$ ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مثال :

$$\frac{2x-1}{x^2-2x-3}$$

الحل :

$$\frac{2x-1}{x^2-2x-3}=\frac{2x-1}{(x+1)(x-3)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-3}$$

مثال :

$$\frac{x+4}{x^3+4x^2+4x}$$

الحل :

$$\frac{x+4}{x^3+4x^2+4x}=\frac{x+4}{x(x+2)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{(x+2)^2}$$

مثال :

$$\frac{x-2}{x^4+4x^2}$$

الحل :

$$\frac{x-2}{x^4+4x^2}=\frac{x-2}{x^2(x^2+4)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

مثال :

$$\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}$$

الحل :

$$\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+9}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+1}+\frac{B_3x+C_3}{\left(x^2+1\right)^2}$$

مثال :

$$\frac{x^4+2}{x^3+x}$$

الحل : باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\frac{x^4+2}{x^3+x}=x+\frac{-x^2+2}{x(x^2+1)}=x+\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{x^2+1}$$

مثال :

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{x-7}{(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3}$$

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{A_1(x+3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{A_2(x-2)}{(x+3)(x-2)}$$

$$x-7=A_1(x+3)+A_2(x-2)$$

ضع $x=2$

$$2-7=A_1(2+3)\implies -5=5A_1\implies A_1=-1$$

ضع $x=-3$

$$-3-7=A_2(-3-2)\implies -10=-5A_2\implies A_2=2$$

$$\frac{x-7}{(x-2)(x+3)}=\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x+3}$$

$$\int\frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x+3}\right)\,dx$$

$$=\int\frac{-1}{x-2}\,dx+\int\frac{2}{x+3}\,dx=-\int\frac{1}{x-2}\,dx+2\int\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$=-\ln|x-2|+2\ln|x+3|+c$$

مثال :

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x-2 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$\begin{array}{lcr} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ C=1 & \longrightarrow & (2) \\ A=-2 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (1) نستنتج أن

$$-2 + B = 0 \implies B = 2$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} \right)\,dx$$

$$= \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -2\ln|x| + \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + c$$

5.5 تعويضات متفرقة

أولاً - التكاملات التي تحتوي على قوى كسرية

إذا كان التكامل يحتوي على قوى كسرية للمتغير x ، نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{n}}$ حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامات هذه القوى فنستبدل القوى الكسرية بقوى صحيحة .

مثال : $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{6}} \implies x = u^6$

$$dx = 6u^5\, du$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}\, dx = \int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\, du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^2(u+1)}\, du = \int \frac{6u^3}{u+1}\, du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\int \frac{6u^3}{u+1}\, du = \int \left(6u^2 - 6u + 6 - \frac{6}{u+1}\right) du$$

$$= 6\,\frac{u^3}{3} - 6\,\frac{u^2}{2} + 6u - 6\ln|u+1| + c = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln|u+1| + c$$

$$= 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}}+1\right| + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}}+1\right| + c$$

مثال :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}}\, dx$$

نستخدم التعويض $x = u^6$ $u = x^{\frac{1}{6}} \implies$

$$dx = 6u^5\, du$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}}\, dx = \int \frac{6u^5}{u^3+u}\, du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u(u^2+1)}\, du = \int \frac{6u^4}{u^2+1}\, du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\int \frac{6u^4}{u^2+1}\, du = \int \left(6u^2 - 6 + \frac{6}{u^2+1}\right)\, du$$

$$= 6\,\frac{u^3}{3} - 6u + 6\tan^{-1} u + c = 2u^3 - 6u + 6\tan^{-1} u + c$$

$$= 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\tan^{-1}\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + c = 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\tan^{-1}\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + c$$

ثانياً - التكاملات التي تحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$:

إذا كان التكامل يحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$ نستخدم التعويض $u = \sqrt[n]{g(x)}$ لحل التكامل .

مثال :

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

الحل : نستخدم التعويض

$$u = \sqrt{1+\sqrt{x}} \implies 1+\sqrt{x} = u^2 \implies \sqrt{x} = u^2 - 1 \implies x = (u^2-1)^2$$

$$dx = 2(u^2-1)(2u)\,du = (4u^3-4u)\,du$$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int u(4u^3-4u)\,du = \int (4u^4-4u^2)\,du$$

$$= 4\,\frac{u^5}{5} - 4\,\frac{u^3}{3} + c = \frac{4}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3 + c$$

مثال :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

الحل : نستخدم التعويض

$$u=\sqrt{e^x+1} \implies e^x+1=u^2 \implies e^x=u^2-1 \implies x=\ln|u^2-1|$$

$$dx=\frac{2u}{u^2-1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\,dx=\int \frac{1}{u}\,\frac{2u}{u^2-1}\,du=\int \frac{2}{u^2-1}\,du$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{2}{u^2-1}=\frac{2}{(u-1)(u+1)}=\frac{A_1}{u-1}+\frac{A_2}{u+1}$$

$$\frac{2}{u^2-1}=\frac{A_1(u+1)}{(u-1)(u+1)}+\frac{A_2(u-1)}{(u+1)(u-1)}$$

$$2=A_1(u+1)+A_2(u-1)$$

ضع $u=1$

$$2=A_1(1+1) \implies 2A_1=2 \implies A_1=1$$

ضع $u=-1$

$$2=A_2(-1-1) \implies -2A_2=2 \implies A_2=-1$$

$$\int \frac{2}{u^2-1}\,du=\int\left(\frac{1}{u-1}+\frac{-1}{u+1}\right)du$$

$$=\ln|u-1|-\ln|u+1|+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\,dx=\ln\left|\sqrt{e^x+1}-1\right|-\ln\left|\sqrt{e^x+1}+1\right|+c$$