حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الثاني

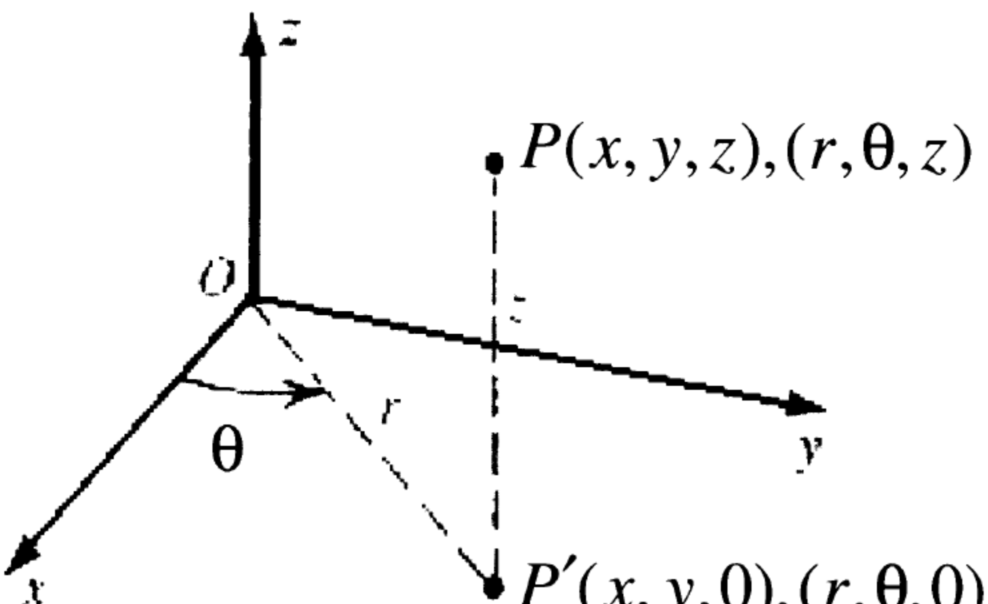
• التكاملات المتعددة MULTIPLE INTEGRALS

- مقدمة
- التكامل الثنائي
- حساب التكاملات الثنائيـــة
- المـــساحات والحجـــوم
- الاحداثيات القطبية
- التكامل الثلاثي
- الاحـــداثيات الاســـطوانية والكرويـــة
- العزم ومركز الثقل
- المساحة السطحية

التكامل الثلاثي بالإحداثيات الأسطوانية والكروية

Triple Integral In Cylindrical And Sphirical Coordinates

الإحداثيات الأسطوانية: لتكن (x,y,z) الإحداثيات الديكارتية للنقطة P في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$، ولتكن (x,y) إحداثيات النقطة P' وهي مسقط P في المستوى xy. لتكن (r,θ) الإحداثيات القطبية للنقطة P'. بالتالي الإحداثيات (r,θ,z) تعرف النقطة P تعريفا تاما. تسمى هذه بالإحداثيات الأسطوانية للنقطة P.



بالتالي إذا أعطينا الإحداثيات الديكارتية للنقطة فإنه يمكننا تحديد الإحداثيات الأسطوانية بالاستعانة بالمعادلات التالية:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

وإذا أعطينا الإحداثيات الأسطوانية للنقطة فإنه يمكننا تحديد الإحداثيات الديكارتية بالاستعانة بالمعادلات التالية:

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

$$z=z$$

السطح	المعادلة بالإحداثيات الديكارتية	المعادلة بالإحداثيات الإسطوانية
الاسطوانة القائمة	$x^2 + y^2 = a^2$	$r = a$
الكرة	$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	$r^2 + z^2 = a^2$
السطح المكافئ الدائري	$x^2 + y^2 = az$	$r^2 = az$
السطح المخروطي الثنائي	$x^2 + y^2 = a^2 z^2$	$r = az$

مثال

أوجد معادلة السطحين التاليين بالإحداثيات الديكارتية

(أ) $z = r^2$ (ب) $r = 4\sin\theta$

الحل

(أ) $z = r^2 = x^2 + y^2$ وهي معادلة سطح مكافئ دائري. أنظر الجدول.

(ب) بضرب الطرفين في r نحصل على $r^2 = 4r\,sin\,\theta$ ، وبالتالي فإن $x^2 + y^2 = 4y$ ، أي أن $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ، وهي معادلة اسطوانة محورها مواز للمحور oz ونصف قطر قاعدتها 2 ، ومحورها يمر بالنقطة $(0,2,0)$.

مثال

أكتب معادلتي السطحين التاليين بالإحداثيات الأسطوانية

(أ) $z^2 = x^2 - y^2$ (ب) $z^2 = x^2 + y^2$

الحل

(أ) $z^2 = x^2 - y^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta$

(ب) $z^2 = x^2 + y^2 = r^2$ ومنه $r = z$ وهي معادلة سطح مخروط ثنائي.

التكامل الثلاثي بالإحداثيات الأسطوانية:

من الملائم أحيانا استخدام الإحداثيات الأسطوانية لحساب التكاملات الثلاثيــــة، وأبـــسط الحالات عندما تكون f دالة بالمتغيرات (r,θ,z) معرفة ومتصلة على المنطقة

$$Q=\{(r,\theta,z): a\le r\le b,\ \ c\le\theta\le d,\ m\le z\le n\}$$

فإن f قابلة للتكامل على Q كما أن :

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)dv=\int_m^n\int_c^d\int_a^b f(r,\theta,z)rdrd\theta dz$$

إذا كانت R المنطقة القطبية التي ناقشناها عند دراستنا للتكامل الثنائي وإذا كانت

$$Q=\{(r,\theta,z): K_1(r,\theta)\le z\le K_2(r,\theta),\ \text{لكــل}\ (r,\theta)\in R\}$$

حيث إن K_2 , K_1 دالتان متصلتان على المنطقة R . بالتالي فإن

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(r,\theta,z)dV=\iint_R[\int_{K_1(r,\theta)}^{K_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)rdz\ drd\theta]$$

نظرية

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)\,dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{K_1(r,\theta)}^{K_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

نظرية

لتكن Q المنطقة المجسمة المحدودة بسطحي الدالتين K_1 و K_2 المعرفتين والمتصلتين على المنطقة $R = R_r$ ، فإن

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{K_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{K_2(r\cos\theta,r\sin\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

مثال

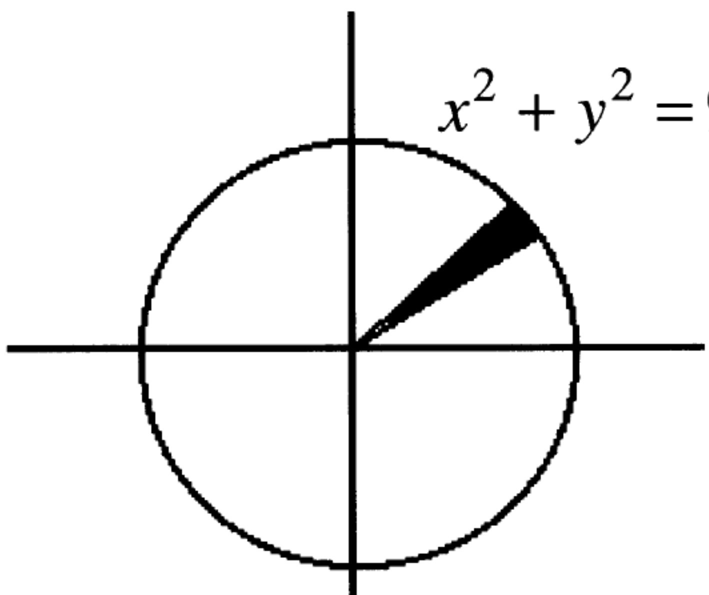
أحسب التكامل

$$I = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2 dz\, dy\, dx$$

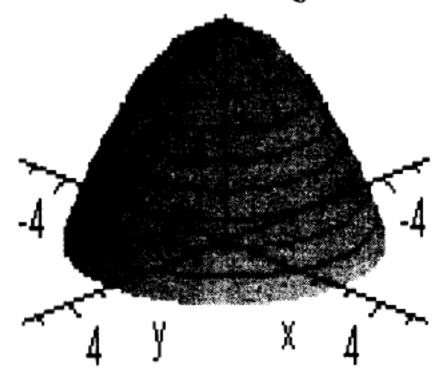
الحل

نلاحظ صعوبة في أيجاد هذا التكامل كما هو معطى، لذلك سوف نستخدم الإحداثيات الأسطوانية .

$x^2 + y^2 = 9$



$z = 9 - x^2 - y^2$



نلاحظ أن المنطقة Q بالإحداثيات الأسطوانية هي.

$$Q=\left\{(r,\theta,z):0\le z\le 9-r^2,\ \text{لكل}\ (r,\theta)\in R\right\}$$

والمنطقة المستوية R هي.

$$R=\left\{(r,\theta,z):\ 0\le r\le 3, 0\le\theta\le 2\pi\quad\right\}$$

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2 dz\ dy\ dx=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{0}^{9-r^2} r^2\cos^2 rdz\ dr\ d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3} r^2\cos^2\theta\ (9-r^2)dr\ d\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\cos^2\theta(9r^3-r^5)dr\ d\theta$$

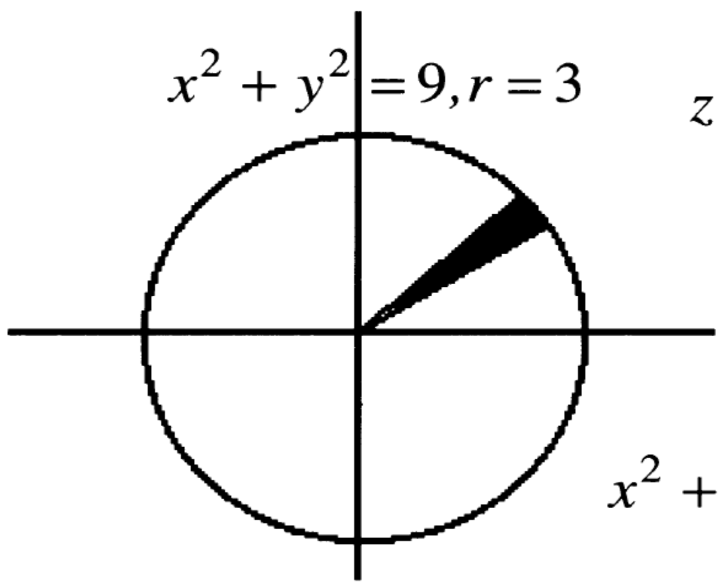
$$=\int_{0}^{2\pi}\cos^2\theta\left[\frac{9r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^3 d\theta=\frac{243}{4}\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{243}{4}\pi$$

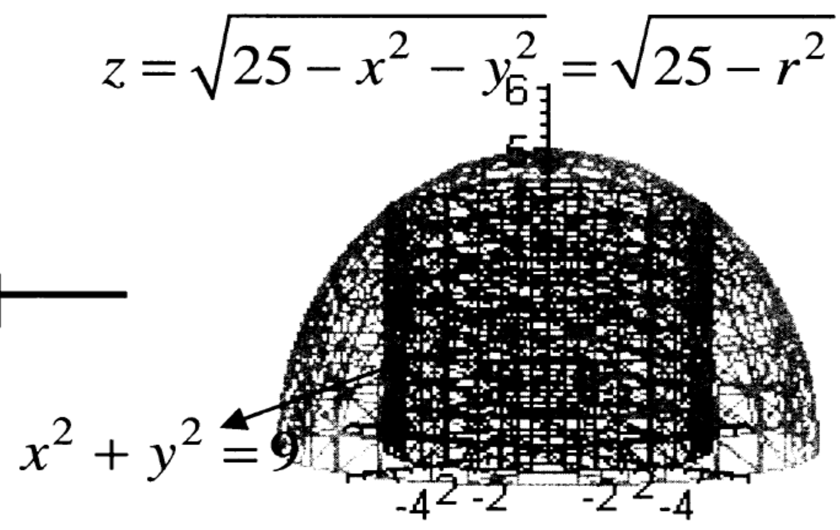
مثال

أحسب حجم المجسم Q المحدود من الأعلى بنصف الكرة $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ ، ومـــن الأسفل بالمستوى ـــ xy ومن الجوانب بالاسطوانة $x^2+y^2=9$.

الحل

كما في المثال السابق فإن استخدام الإحداثيات الديكارتية لحساب الحجم سيكون صعبا. لذلك سنستخدم الإحداثيات الأسطوانية.





نلاحظ أن المنطقة Q بالإحداثيات الأسطوانية هي.

$$Q=\left\{(r,\theta,z):0\le z\le\sqrt{25-r^2},\ \text{لكل}\ (r,\theta)\in R\right\}$$

وأن المنطقة المستوية

$$R=\{(r,\theta):\ 0\le r\le 3,0\le\theta\le 2\pi\quad\}$$

بالتالي فإن الحجم المطلوب هو :

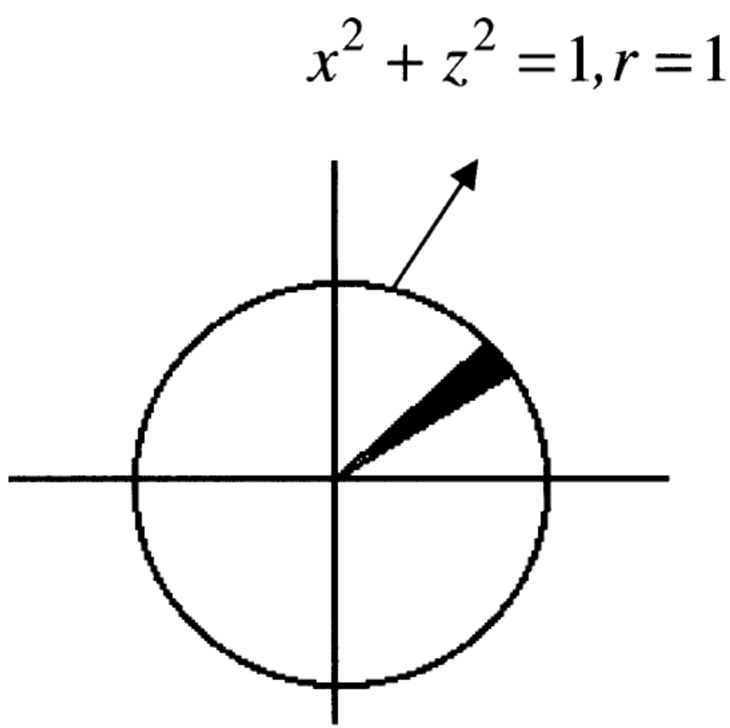
$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{\sqrt{25-r^2}} rdz\ dr\ d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^3\ r\sqrt{25-r^2}\ dr\ d\theta$$

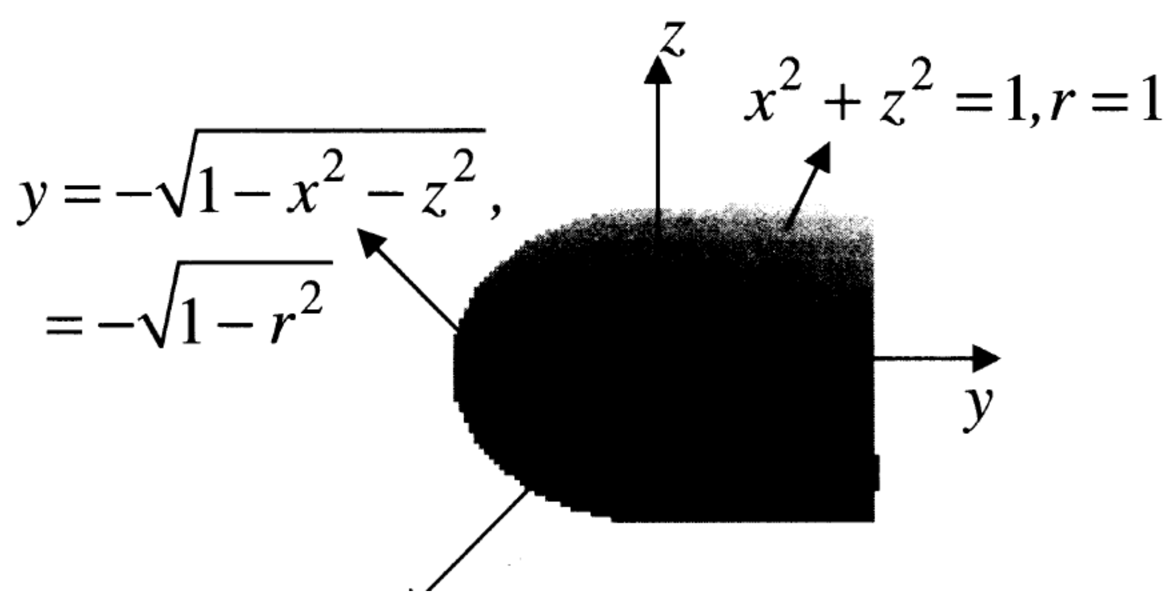
$$=\ \int_0^{2\pi}\ \left[-\frac{1}{3}(25-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3\ d\theta=\int_0^{2\pi}\quad\frac{61}{3}d\theta=\frac{122}{3}\pi$$

مثال

أحسب التكامل $I=\iiint\limits_{Q} 2y\ (x^2+z^2)^{3/2}dV$ ، حيث Q المجسم المحدود بالأسطوانة $x^2+z^2=1$ والمستوى $y=1$ ونصف الكرة $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$

الحل





نلاحظ أن المنطقة Q بالإحداثيات الأسطوانية هي.

$$Q=\left\{(r,\theta,y):1\leq y\leq -\sqrt{1-r^2},\ \text{لكل}\ (r,\theta)\in R\right\}$$

والمنطقة المستوية R هي.

$$R=\{(r,\theta):\ 0\leq r\leq 1, 0\leq \theta\leq 2\pi\ \ \}$$

بالتالي، فإن

$$\mathrm{I}=\iiint_Q 2\mathrm{y}(x^2+z^2)^{3/2}dV=\iint_R\left[\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{1}2y\,(x^2+z^2)^{3/2}dy\right]dA$$

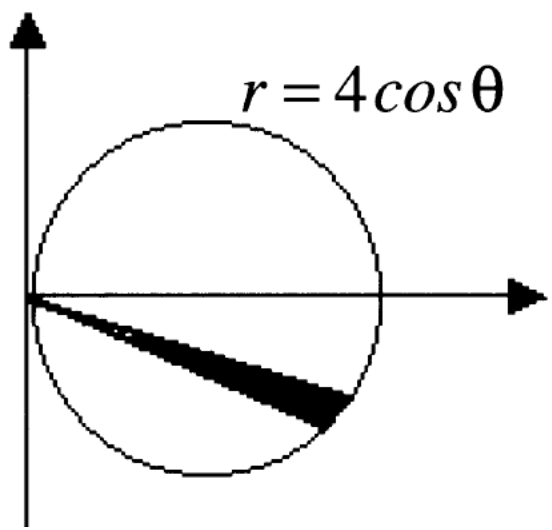
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{1}2y\ \ (r^4)\,dydrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(r^4)\left[y^2\right]_{-\sqrt{1-r^2}}^{1}drd\theta$$

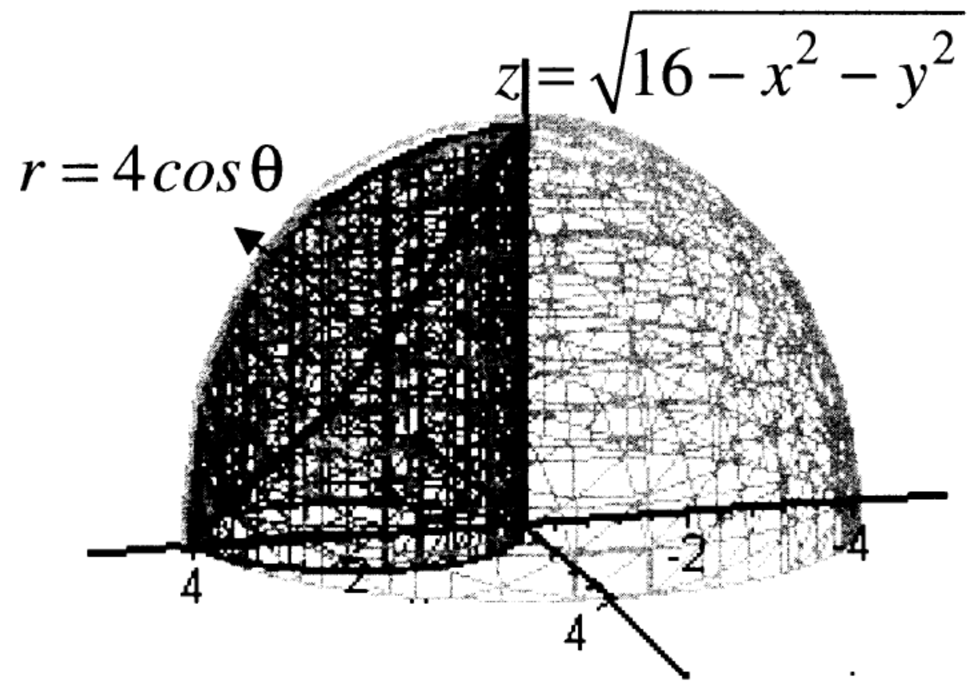
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(r^6)\,drd\theta=\frac{2\pi}{7}$$

مثال

أحسب حجم المجسم Q المحدود من الأعلى بنصف الكـــرة $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ ، ومـــن الأسفل بالمستوى ـــ xy ومن الجوانب بالاسطوانة $r=4\cos\theta$.

الحل





نلاحظ أن المنطقة Q بالإحداثيات الأسطوانية هي.

$$Q=\left\{(r,\theta,z):0\le z\le\sqrt{16-r^2},\ \text{لكـل}\ (r,\theta)\in R\right\}$$

والمنطقة المستوية R هي.

$$R=\left\{(r,\theta):\ 0\le r\le 4\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

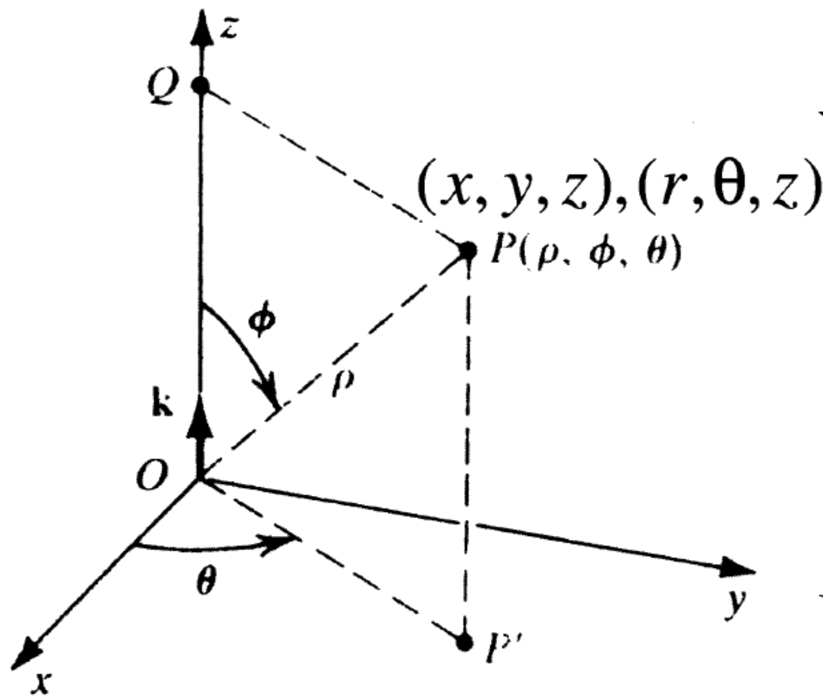
بالتالي، فإن

$$V=\iiint_Q dV=\iint_R\left[\int_0^{\sqrt{16-r^2}} dz\right] dA$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta} r\left[z\right]_0^{\sqrt{16-r^2}} dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}(r\sqrt{16-r^2})\,dr\,d\theta=\frac{8\ (3\pi-4)}{9}$$

الإحداثيات الكروية



آخر نظم الإحداثيات والتي سنناقشها هو نظام الإحداثيات الكروية. نظام الإحداثيات هذا يبسط حساب العديد من التكاملات وبالذات تلك التي تحوي كرة أو مخروطا. لتكن (x, y, z) و (r,θ, z) الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية للنقطة P في الفضاء الثلاثي، بحيث أن $0 \le \theta \le 2\pi$ و $r \ge 0$. ليكن ρ طول القطعة المستقيمة $\rho = |OP|$، إذا كان $\rho \ne 0$، ندع ϕ تساوي الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{OP}$ مع الاتجاه الموجب لمحور z، بالتالي فإن $0 \le \phi \le \pi$. وإذا كان $\rho = 0$ فإن ϕ تكون اختيارية. أخيرا لا زلنا نعتبر θ الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{OP'}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x. يتضح أن الكميات الثلاث ρ، ϕ و θ تحدد النقطة P تحديدا تاما. يسمى الثلاثي (ρ,ϕ,θ) بالإحداثيات الكروية للنقطة P.

العلاقة بين نظم الإحداثيات الثلاث الديكارتية والأسطوانية والكروية:

$$r=\rho \sin\phi \quad \text{و} \quad z=\rho \cos\phi$$

هذه المعادلات وصيغ الإحداثيات القطبية

$$y=r\sin\theta \quad \text{و} \quad x=r\cos\theta$$

معا تعطي العلاقات التالية بين الإحداثيات الديكارتية والكروية

$$x=r\cos\theta=\rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y=r\sin\theta=\rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z=\rho \cos\phi$$

المعادلة بالإحداثيات الكروية	المعادلة بالإحداثيات الديكارتية	السطح
$\rho=a$	$x^2+y^2+z^2=a^2$	الكرة
$\phi=\alpha$	$a>0,\ \ z^2=a(x^2+y^2)$	المخروط

مثال

أوجد معادلة السطح بالإحداثيات الديكارتية إذا علمت أن معادلته بالإحداثيات الكروية هي $\rho = \sin\phi\cos\theta$

الحل

بضرب الطرفين في ρ نجد

$$\rho^2 = 2\rho \sin\phi\cos\theta$$

بالتالي

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x$$

وبإكمال المربع بالنسبة للمتغير x ، نحصل على

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

وهي معادلة كرة مركزها $(1,0,0)$ ونصف قطرها 1 .

التكامل الثلاثي بالإحداثيات الكروية :

تعريف

نعرف المنطقة الكروية الأولية ΔQ بأنها المنطقة المحدودة بالسطوح

$\rho=\rho_0$ و $\rho=\rho_1$، $\phi=\phi_0$ و $\phi=\phi_1$ ، $\theta=\theta_0$ و $\theta=\theta_1$ ، بحيث إن

$0\le\rho_0\le\rho_1$ ، $0\le\phi_0\le\phi_1\le\pi$ ، و $0\le\theta_0\le\theta_1\le 2\pi$.

$$dV=\rho^2\sin\phi\; d\rho\; d\phi\; d\theta$$

نظرية

ليكن α و β أعدادا حقيقية بحيث $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$. لتكن h_1 و h_2 و F_1 و F_2 دوال متصلة بحبث $0 \le h_2 \le h_1$ و $0 \le F_1 \le F_2$. ليكن Q المجسم بحث أنه لكل $(\rho,\phi,\theta) \in Q$ فإن

$$\alpha \le \theta \le \beta \quad .$$

$$h_1(\theta) \le \phi \le h_2(\theta)$$

$$F_1(\phi,\theta) \le \rho \le F_2(\phi,\theta)$$

إذا كانت f دالة متصلة على Q، فإن

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

مثال

أوجد حجم الجسم المحدود من الأعلى بالسطح $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ومـــن الأســـفل بالـــسطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

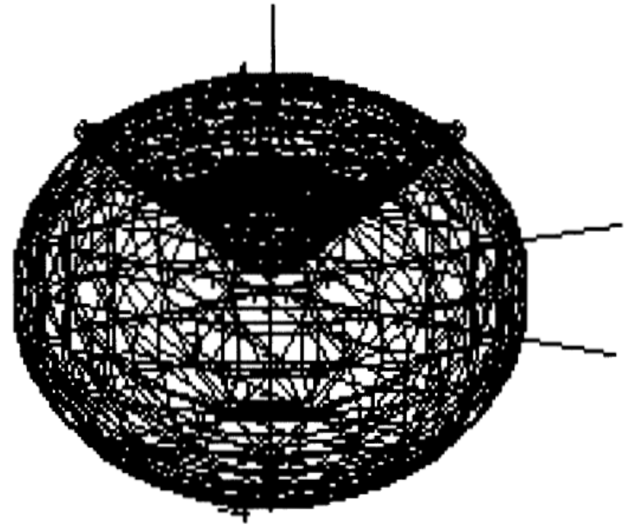
الحل

نستخدم الإحداثيات الكروية لحساب الحجم المطلوب.

من الفقرة السابقة فإن $\tan\phi = 1$ أي أن $\phi = \frac{\pi}{4}$

ومنه فإن $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$، من الواضح أن $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 4$. بالتالي فإن

$$Q = \left\{(\rho, \phi, \theta) : 0 \le \rho \le 4, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}\ , 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$



وبالتالي فإن

$$V=\iiint_{Q} dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4}\ \rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ \left[\frac{\rho^3}{3}\sin\phi\right]_0^4\ d\phi\ \ d\theta$$

$$=\ \frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ \sin\phi\ \ d\phi\ \ d\theta=\ \frac{64}{3}\ (1-\frac{\sqrt{2}}{2})2\pi=\ \frac{64}{3}\ (2-\sqrt{2})\ \pi\ \cdot$$

مثال

احسب التكامل

$$I=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

الحل

هناك بعض الصعوبة في حساب هذا التكامل ، لذا نكتب هذا التكامل بالإحداثيات الكروية ونتبع الخطوات التالية لحسابه. من حدود التكامل نلاحظ أن

$$0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\,,$$
$$-2\le x\le 2\,,$$
$$-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$$

أي أن منطقة التكامل هي النصف العلوي من الكرة التي معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

أما هذه المنطقة فإن حدودها بالإحداثيات الكروية هي

$$Q = \left\{ (\rho,\phi,\theta) : 0 \le \rho \le 2, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

أما الدالة

$$f(x,y,z) = z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

فإن صيغتها بالإحداثيات الكروية هي :

$$f(\rho \sin\phi \ \cos\theta \ , \ \rho \ \sin\phi \sin\theta \ , \ \cos\theta \cos\phi) = \rho^3 \cos^2\phi$$

وعليه فإن

$$I = \iiint_Q f(x,y,z) dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (\rho^3 \cos^2\phi) \ \rho^2 \sin\phi \ d\rho \ d\phi \ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \rho^5 \cos^2\phi \, \sin\phi \, d\rho \, d\theta = \frac{32}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi \, \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{32}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}\cos^3\phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{32}{9} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{64\pi}{9}.$$

مثال

احسب حجم الكرة التي نصف قطرها a ومركزها $(0,0,0)$.

الحل

(أ) بالإحداثيات الأسطوانية :

نظرا لتناظر الكرة بالنسبة للمستوى oxy نجد :

$$I = 2\iiint_Q dV$$

حيث

ومن ثم فإن $$Q = \left\{(r,\theta,z) : 0 \le z \le \sqrt{a^2 - r^2},\ 0 \le r \le a\ ,0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

$$I = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\ dz\ dr\ d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\mathrm{a}} r(\sqrt{a^2-r^2})\ dr\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a d\theta = 2\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}d\theta = \frac{4\pi}{3}a^3 .$$

(ب) بالإحداثيات الكروية

أيضاً لدينا
$$\mathrm{I} = 2\iiint_Q dV$$

$$Q = \left\{(\rho,\phi,\theta) : 0 \le \rho \le a,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}\ ,0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

وبالتالي فإن

$$I = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^a \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi}[\cos\phi]_0^{\pi/2} \, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}a^3\pi \cdot$$

تمـــــارين

في التمارين من ١– ٨ اكتب المعادلات بالإحداثيات الأسطوانية.

١- $y = -4$

٢- $x = 2z$

٣- $x + y + z = 3$

٤- $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

٥- $x^2 + y^2 + z = 1$

٦- $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

٧- $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

٨- $x^2 + y^2 + 3z^2 = 9$

في التمارين من ٩–١٤ أحسب التكامل المتعاقب

٩- $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^5 e^z r\,dz\,dr\,d\theta$

١٠- $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{1-2\cos^2\theta}\int_0^1 r\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$

١١- $\int_0^{\pi/4}\int_0^{1+\cos\theta}\int_0^r 1\,dz\,dr\,d\theta$

١٢- $\int_{-\pi/2}^{0}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r^2} r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta$

١٣- $\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$

١٤- $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$

في التمارين ١٥– ١٧ عبر عن التكامل الثلاثي كتكامل متعاقب بالإحداثيات الأسطوانية، ثم احسبه.

١٥– $\iiint_Q (x^2 + y^2)\, dV$ ،حيث Q المجسم المحدود من أعلى بالأسطوانة $x^2 + y^2 = 1$ والمستويين $z = 0$ و $z = 4$.

١٦– $\iiint_Q z\, dV$ ، حيث Q جزء القرص $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ الواقع في الثمن الأول.

١٧– $\iiint_Q y^2\, dV$ ، حيث Q المجسم المشترك بين الأسطوانة $x^2 + y^2 = 1$ والكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

في التمارين من ١٨- ٢٥ احسب حجم المجسم Q.

١٨- المجسم المحدود بالسطوح $x^2 + y^2 = az$، $x^2 + y^2 = 4ay$، $z = 0$، حيث $a > 0$.

١٩- المجسم المحدود من أعلى بالكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ومن الأسفل بالسطح المكافيء الدائري $z = x^2 + y^2$.

٢٠- المجسم المحدود من أعلى بالكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ومن أسفل بالمستوى $z = 1$.

٢١- المجسم المحدود من أعلى بالكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ومن الجوانب بالجزء العلوي للمخروط $z^2 = 3x^2 + 3y^2$.

٢٢- المجسم المحدود من أعلى بالسطح المكافيء $z=1-x^2-y^2$ ومن الأسفل بالمستوى $z=-3$.

٢٣- المجسم داخل الكرة $r^2+z^2=a^2$ والأسطوانة $r=a\sin\theta$.

٢٤- المجسم المحدود من أعلى بالمستوى $z=y$ ومن الأسفل بالسطح المكافيء $z=x^2+y^2$.

٢٥- المجسم المحدود من أعلى بالمخروط $z=8-\sqrt{x^2+y^2}$، ومن الجوانب بالأسطوانة $x^2+y^2=2x$ ومن الأسفل بالمستوى xy.