حساب التكامل

111 ريض

الأسبوع السابع

الأهداف:

إبراز طريقة التكامل بالتجزئ للحصول على العديد من التكاملات التي لا نستطيع حسابها حتى الآن

يتعلم الطالب حساب تكامل قوى الدوال المثلثية

باب 5

طرائق التكامل

1.5 التكامل بالتجزئ

مبرهنة : إذا كانت $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ و كانت كل من f' و g' متصلة فإن :

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

مثال :

$$\int x^2 \ \ln|x| \, dx$$

الحل :

$$u = \ln|x| \qquad v = x^2 \, dx$$
$$du = \frac{1}{x} \, dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ \ln|x| \, dx = \frac{x^3}{3} \ \ln|x| - \int \frac{x^3}{3} \ \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ \ln|x| - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ \ln|x| - \frac{1}{3} \ \frac{x^3}{3} + c$$

مثال :

$$\int \ln(1+x^2)\,dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \ln(1+x^2) & \qquad dv &= dx \\ du &= \frac{2x}{1+x^2}\,dx & \qquad v &= x \end{aligned}$$

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int x\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{(2x^2+2)-2}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2(x^2+1)}{1+x^2}\,dx - \int \frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int 2\,dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - 2x - 2\tan^{-1}x + c$$

مثال :

$$\int \tan^{-1} x \, dx$$

الحل :

$$u = \tan^{-1} x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} \qquad v = x$$

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2} \, x \, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

مثال :

$$\int \sin^{-1} x \, dx$$

الحل :

$$u = \sin^{-1} x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad v = x$$

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int x \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \frac{1}{-2} \int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \, (-2x) \, dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \, \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

مثال :

$$\int e^x \cos x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \cos x & dv &= e^x \, dx \\ du &= -\sin x \, dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int -\sin x \, e^x \, dx = e^x \cos x + \int \sin x \, e^x \, dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$u = \sin x \qquad dv = e^x \, dx$$
$$du = \cos x \, dx \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \ \cos x \, dx = e^x \cos x + \int \sin x \, e^x \, dx$$

$$\int e^x \ \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \ \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \ \cos x \, dx = \frac{1}{2} \left[e^x \cos x + e^x \sin x \right] + c$$

2.5 تكامل قوى الدوال المثلثية

أولاً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x \, dx$ و $\int \cos^n x \, dx$

ثانياً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x \ \cos^m x \, dx$

ثالثاً - التكاملات من النوع $\int \tan^m x \ \sec^n x \, dx$

رابعاً - التكاملات من النوع $\int \cot^m x \ \csc^n x \, dx$

خامساً - التكاملات $\int \cos mx \ \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \ \sin nx \, dx$, $\int \sin mx \ \cos nx \, dx$

أولاً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x\, dx$ و $\int \cos^n x\, dx$

(1) إذا كان n عدداً فردياً فيمكن حل التكامل بالتعويض

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل $\int \sin^n x\, dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل $\int \cos^n x\, dx$

(2) إذا كان n عدداً زوجياً

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \sin^n x\, dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \cos^n x\, dx$

مثال :

$$\int \cos^3 x \, dx$$

الحل :

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \;\cos x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \;\cos x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x \, dx$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \;\cos x \, dx = \int (1 - u^2) \, du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

مثال :

$$\int \cos^4 2x\, dx$$

الحل : باستخدام متطابقة ضعف الزاوية $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int \cos^4 2x\, dx = \int \left(\cos^2 2x\right)^2\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2\, dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x\right]\, dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1+\cos 8x)\right]\, dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, \cos 4x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 8x\right]\, dx$$

$$= \int \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\, \cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right]\, dx$$

$$= \int \frac{3}{8}\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos 8x\, dx$$

$$= \int \frac{3}{8}\, dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)\, dx + \frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\int \cos 8x\,(8)\, dx$$

$$= \frac{3}{8}\,x + \frac{1}{8}\, \sin 4x + \frac{1}{64}\, \sin 8x + c$$

ثانياً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x \ \cos^m x \ dx$

(1) إذا كان n فردياً نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل

(2) إذا كان m فردياً نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل

(3) إذا كان كل من n و m زوجياً

مثال :

$$\int \sin^5 x \ \cos^2 x \ dx$$

الحل :

$$\int \sin^5 x \ \cos^2 x \ dx = \int \sin^4 x \ \cos^2 x \ \sin x \ dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \ \cos^2 x \ \sin x \ dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \ \cos^2 x \ \sin x \ dx$$

ثانياً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x \ \cos^m x \ dx$

(1) إذا كان n فردياً نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل

(2) إذا كان m فردياً نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل

(3) إذا كان كل من n و m زوجياً

مثال :

$$\int \sin^5 x \ \cos^2 x \ dx$$

الحل :

$$\int \sin^5 x \ \cos^2 x \ dx = \int \sin^4 x \ \cos^2 x \ \sin x \ dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \ \cos^2 x \ \sin x \ dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \ \cos^2 x \ \sin x \ dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x \, dx \implies -du = \sin x \, dx$$

$$\int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \; \cos^2 x \; \sin x \, dx = -\int \left(1 - u^2\right)^2 \; u^2 \, du$$

$$= -\int \left(1 - 2u^2 + u^4\right) \; u^2 \, du = -\int \left(u^2 - 2u^4 + u^6\right) \; du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\,\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\,\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

مثال :

$$\int \sqrt{\sin x}\ \cos^3 x\, dx$$

الحل :

$$\int \sqrt{\sin x}\ \cos^3 x\, dx = \int \sqrt{\sin x}\ \cos^2 x\ \cos x\, dx$$

$$= \int \sqrt{\sin x}\left(1-\sin^2 x\right)\ \cos x\, dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x\, dx$$

$$\int \sqrt{\sin x}\left(1-\sin^2 x\right)\ \cos x\, dx = \int \sqrt{u}\,(1-u^2)\, du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}\ (1-u^2)\, du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}}\right)\ du$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{3}\,(\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}\,(\sin x)^{\frac{7}{2}} + c$$

مثال : $\int \sin^2 x \ \cos^4 x \, dx$

الحل :

$$\int \sin^2 x \ \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \left(\cos^2 x\right)^2 \ dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \ \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \ dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1-\cos^2 2x\right) \left(1+\cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \left(1+\cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \ \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) \ dx + \frac{1}{8} \, \frac{1}{2} \int \sin^2 2x \ \cos 2x \, (2) \, dx$$

$$= \frac{1}{16} \int 1 \, dx - \frac{1}{16} \, \frac{1}{4} \int \cos 4x \, (4) \, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \ \cos 2x \, (2) \, dx$$

$$= \frac{1}{16} \, x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \, \frac{\sin^3 2x}{3} + c$$

ثالثاً - التكاملات من النوع $\int \tan^m x \, \sec^n x \, dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \tan^m x \, \sec^n x \, dx = \int \sec^n x \, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\int \tan^m x \, \sec^n x \, dx = \int \tan^m x \, dx = \int \tan^{m-2} x \, (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \tan^{m-2} x \, \sec^2 x \, dx - \int \tan^{m-2} x \, dx$$

$$= \frac{1}{m-1} \, \tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} x \, dx$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \tan x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \sec x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\sec x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

ثالثاً - التكاملات من النوع $\int \tan^m x \ \sec^n x \ dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \tan^m x \ \sec^n x \ dx = \int \sec^n x \ dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\int \tan^m x \ \sec^n x \ dx = \int \tan^m x \ dx = \int \tan^{m-2} x \ (\sec^2 x - 1) \ dx$$

$$= \int \tan^{m-2} x \ \sec^2 x \ dx - \int \tan^{m-2} x \ dx$$

$$= \frac{1}{m-1} \ \tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} x \ dx$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \tan x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \sec x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\sec x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال :
$$\int \sec^3 x \, dx$$

الحل : باستخدام التكامل بالتجزئ

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \ \sec^2 x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \sec x & dv = \sec^2 x \, dx \\ du = \sec x \ \tan x \, dx & v = \tan x \end{array}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \ \tan x - \int \tan^2 x \ \sec x \, dx$$

$$= \sec x \ \tan x - \int (\sec^2 - 1) \ \sec x \, dx$$

$$= \sec x \ \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) \ dx$$

$$= \sec x \ \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \ \tan x + \int \sec x \, dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} (\sec x \ \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + c$$

مثال :

$$\int \tan^4 x \, dx$$

الحل :

$$\int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x \ \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x \ \left(\sec^2 x - 1\right) \ dx$$

$$= \int \tan^2 x \ \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$

$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x \, dx - \int \left(\sec^2 x - 1\right) \ dx$$

$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x \, dx - \int \sec^2 x \, dx + \int 1 \, dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$$

مثال :

$$\int \tan^2 x \ \sec^6 x \, dx$$

الحل :

$$\int \tan^2 x \ \sec^6 x \, dx = \int \tan^2 x \ \sec^4 x \ \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \ \left(\sec^2 x\right)^2 \ \sec^2 x \, dx = \int \tan^2 x \ \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \ \sec^2 x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \tan x$

$$du = \sec^2 x \, dx$$

$$\int \tan^2 x \ \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \ \sec^2 x \, dx = \int u^2 \left(1 + u^2\right)^2 \ du$$

$$= \int u^2 \left(1 + 2u^2 + u^4\right) \ du = \int \left(u^2 + 2u^4 + u^6\right) \ du$$

$$= \frac{u^3}{3} + 2\,\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + 2\,\frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + c$$

رابعاً - التكاملات من النوع $\int \cot^m x \ \csc^n x \, dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \cot^m x \ \csc^n x \, dx = \int \csc^n x \, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\int \cot^m x \ \csc^n x \, dx = \int \cot^m x \, dx = \int \cot^{m-2} x \, (\csc^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \cot^{m-2} x \ \csc^2 x \, dx - \int \cot^{m-2} x \, dx$$

$$= -\frac{1}{m-1} \ \cot^{m-1} x - \int \cot^{m-2} x \, dx$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cot x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \csc x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\csc x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال :

$$\int \cot^4 x \ \csc^4 x \, dx \ \ (1)$$

الحل :

$$\int \cot^4 x \ \csc^4 x \, dx = \int \cot^4 x \ \csc^2 x \ \csc^2 x \, dx$$

$$= \int \cot^4 x \ \left(1 + \cot^2 x\right) \ \csc^2 x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cot x$

$$du = -csc^2 x \, dx \implies -du = \csc^2 x \, dx$$

$$\int \cot^4 x \ \left(1 + \cot^2 x\right) \ \csc^2 x \, dx = -\int u^4 \left(1 + u^2\right) du$$

$$= -\int \left(u^4 + u^6\right) du = -\left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + c = -\frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^7 x}{7} + c$$

مثال :

$$\int \cot^5 x \ \csc^5 x \, dx$$

الحل :

$$\int \cot^5 x \ \csc^5 x \, dx = \int \cot^4 x \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx$$

$$= \int \left(\cot^2 x\right)^2 \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx$$

$$= \int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \csc x$

$$du = -\csc x \ \cot x \, dx \implies -du = \csc x \ \cot x \, dx$$

$$\int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx = -\int (u^2 - 1)^2 \, u^4 \, du$$

$$= -\int (u^4 - 2u^2 + 1) \, u^4 \, du = -\int (u^8 - 2u^6 + u^4) \, du$$

$$= -\left(\frac{u^9}{9} - 2\,\frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5}\right) + c = -\frac{\csc^9 x}{9} + 2\,\frac{\csc^7 x}{7} - \frac{\csc^5 x}{5} + c$$

خامساً - التكاملات $\int \cos mx \ \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \ \sin nx \, dx$, $\int \sin mx \ \cos nx \, dx$

تحل هذه التكاملات باستخدام المتطابقات التالية :

$$\sin mx \ \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)x]\right)$$

$$\sin mx \ \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]\right)$$

$$\cos mx \ \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x]\right)$$

مثال :

$$\int \sin 7x \;\cos 5x \, dx$$

الحل :

$$\int \sin 7x \;\cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2} \left(\sin[(7-5)x] + \sin[(7+5)x]\right) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin 12x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \sin 2x \; (2) \, dx + \frac{1}{2} \; \frac{1}{12} \int \sin 12x \; (12) \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{24} \cos 12x + c$$

مثال :

$$\int \sin 4x \ \sin 3x \, dx$$

الحل :

$$\int \sin 4x \ \sin 3x \, dx = \int \frac{1}{2} \left(\cos[(4-3)x] - \cos[(4+3)]x \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 7x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \frac{1}{7} \int \cos 7x \, (7) \, dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{14} \sin 7x + c$$