حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الثاني

• التكاملات المتعددة MULTIPLE INTEGRALS

- مقدمة
- التكامل الثنائي
- حساب التكاملات الثنائيـــة
- المـــساحات والحجـــوم
- الاحداثيات القطبية
- التكامل الثلاثي
- الاحـــداثيات الاســـطوانية والكرويـــة
- العزم ومركز الثقل
- المساحة السطحية

• التكامل الثلاثي
The Triple Integral

في هذا الفصل نعرف التكامل الثلاثي لدالة في ثلاث متغيرات. أي أننا نعرف التكامل الثلاثي لدالة $w=f(x,y,z)$ معرفة على منطقة مغلقة ومحدودة Q في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$. وطريقة التعريف هنا شبيهة بتلك في التكامل الثنائي والأحادي وتستند إلى إيجاد مجموع ريمان وذلك بإحداث تجزئة للمنطقة Q على شكل متوازيات مستطيلات $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ تقع بكاملها داخل المنطقة Q ، ويتم ذلك برسم مستويات موازية للمستويات xy و xz و yz فيكون حجم متوازي المستطيلات Q_k هو $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$. نختار نقطة (u_k, v_k, w_k) من Q_k فيكون مجموع ريمان لهذه التجزئة هو

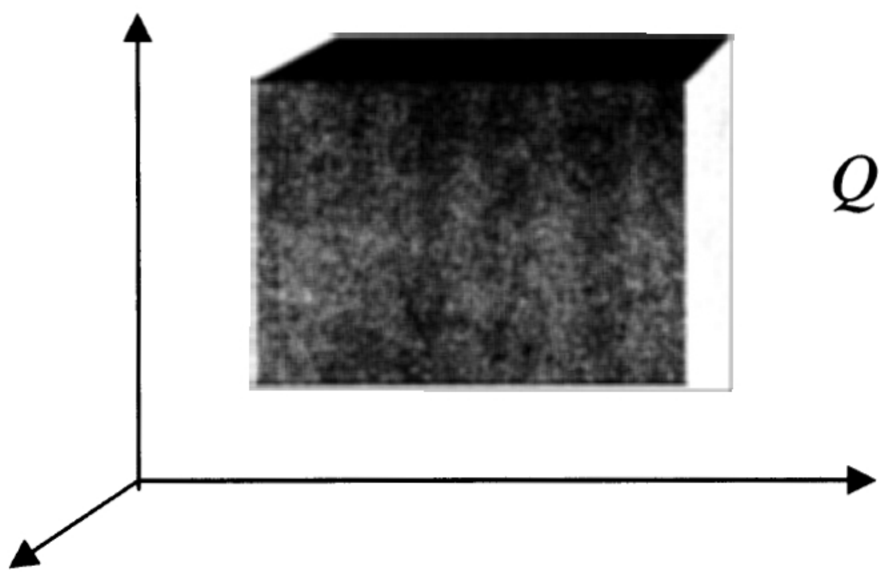
$$R_P = \sum_{k=1}^{n} f(u_k, v_k, w_k)\Delta V_k$$

ستقتصر دراستنا للتكامل الثلاثي على الأنواع التالية من المناطق Q في الفضاء الثلاثي. سنعتبر فيما يلي أن $w = f(x, y, z)$ دالة متصلة على Q.

النوع الأول :

المنطقة Q عبارة عن متوازي مستطيلات المعرف كما يلي :

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ c \le y \le d, m \le z \le n\right\}$$



بالتالي فإن :

$$I = \iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dx\, dy\, dz$$

$$= \int_a^b \int_m^n \int_c^d f(x,y,z)dy\, dz\, dx$$

$$= \int_c^d \int_a^b \int_m^n f(x,y,z)dz\, dx\, dy = \cdots$$

الحقيقة أن ترتيب التكامل هنا ليس ذا أهمية، أي يمكننا تغيير ترتيب التكامل دون تغيير في قيمة التكامل.

مثال

احسب التكامل $\mathrm{I}=\iiint\limits_{Q} 3xy^3z^2dy$

حيث Q معرفة كما يلي :

$$Q=\{(x,y,z):-1\le x\le 3,\ 1\le y\le 4,0\le z\le 2\}$$

الحل

$$\mathrm{I}=\int_1^4\int_{-1}^3\int_0^2 3xy^2z^2dz\ dx\ dy=\int_1^4\int_{-1}^3\left[xy^3z^3\right]_0^2 dxdy$$

$$=\int_1^4\int_{-1}^2 8xy^3dxdy=\int_1^4\left[4x^2y^3\right]_{-1}^3 dy$$

$$=\int_1^4 32y^3dy=\left[8y^4\right]=2040\cdot$$

النوع الثاني :

لتكن R إما R_x أو R_y، ولتكن Q المنطقة في $\mathbb{R}^3$ المحصورة بسطحي الدالتين المتصلتين $z=K_1(x,y)$ و $z=K_2(x,y)$ لكل $(x,y)\in R$ أي أن

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: K_1(x,y)\le z\le K_2(x,y) \text{ لكل } (x,y)\in R\right\}$$

عندئذٍ فإن f قابلة للتكامل على Q كما أن :

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\iint_R\left[\int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dA$$

على وجه الخصوص إذا كانت

(أ) $R=R_x$، فإن

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

(ب) $R=R_y$، فإن

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(\mathrm{y})}\int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dx\,dy$$

النوع الثالث:

لتكن R إما R_x أو R_z المنطقة المستوية في المستوى ـــ xz، ولتكن Q المنطقة في $\mathbb{R}^3$ المحصورة بسطحي الـ $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : G_1(x,z) \le y \le G_2(x,z)$ لكـل $(x,z) \in R\}$ أن

عندئذٍ فإن f قابلة للتكامل على Q كما أن :

$$\mathrm{I} = \iiint_Q f(x,y,z)\, dv = \iint_R \left[\int_{G_1(x,z)}^{G_2(x,z)} f(x,y,z) dy \right] dA$$

إذا كانت R إما R_x أو R_z، فإننا نكتب التكامل المتعاقب كما في النوع الثاني (أ) و (ب) مع مراعاة المتغيرات.

النوع الرابع:

لتكن R إما R_y أو R_z المنطقة المستوية في المستوى ـــ yz ، ولتكن Q المنطقة في $\mathbb{R}^3$ المحصورة بسطحي الدالتين المتصلتين $x = H_1(y,z)$ و $x = H_2(y,z)$ لكل $(y,z)\in R$ أي أن

$$Q = \left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : H_1(y,z) \le X \le H_2(y,z) \text{ لكل } (y,z)\in R\right\}$$

عندئذٍ فإن f قابلة للتكامل علىٍ Q كما أن :

$$\mathrm{I} = \iiint\limits_{Q} f(x,y,z)\, dV = \iint\limits_{R} \left[\int_{H_1(x,y)}^{H_2(x,y)} f(x,y,z)dx \right] dA$$

إذا كانت R إما R_x أو R_z، فإننا نكتب التكامل المتعاقب كما في النوع الثاني (أ) و (ب) مع مراعاة المتغيرات.

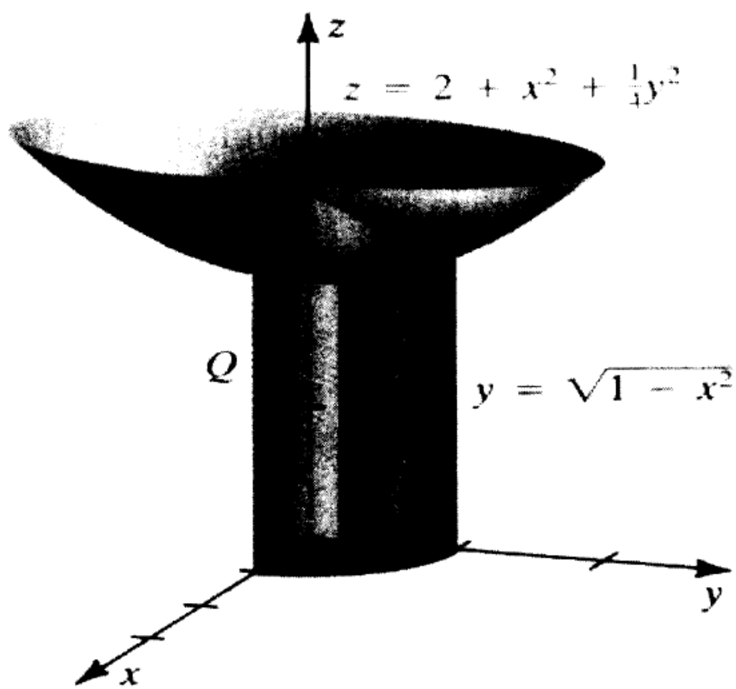
ملاحظة : الآن إذا كانت $f(x,y,z) = 1$ فإن التكامل الثلاثي $\iiint\limits_{Q} dV$ يمثل حجم المنطقة Q

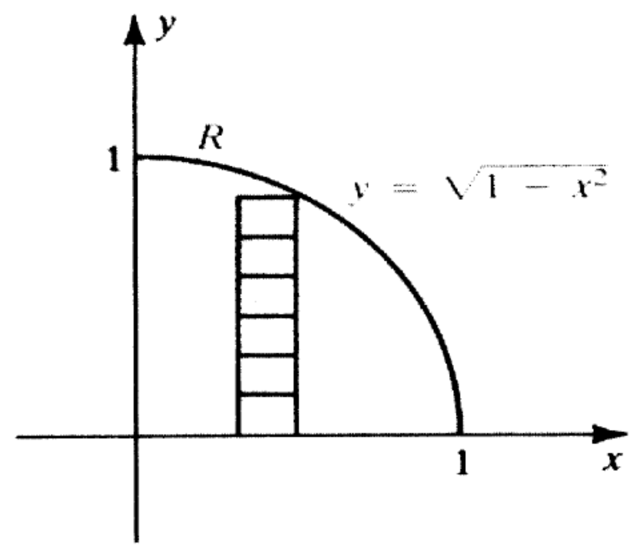
ونكتب: $V = \iiint\limits_{Q} dV$

مثال

لتكن $w = f(x, y, z)$ دالة متصلة على المنطقة Q الواقعة في الثمن الأول والمحدودة بالمستويات الإحداثية والسطحين $x^2 + y^2 = 1$ ، $z - 2 = x^2 + \frac{1}{4}y^2$

عبر عن التكامل $I = \iiint\limits_Q f(x, y, z)dV$ كتكامل متعاقب. وكذلك عن حجم المجسم Q.





الحل

المجسم Q هو :

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 2+x^2+\frac{1}{4}y^2 \text{ لكل } (x,y)\in R\right\}$$

إذاً

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

أما حجم المجسم Q فهو

$$V=\iiint_Q dV=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{2+x^2+\frac{1}{4}y^2} dz\,dy\,dx\cdot$$

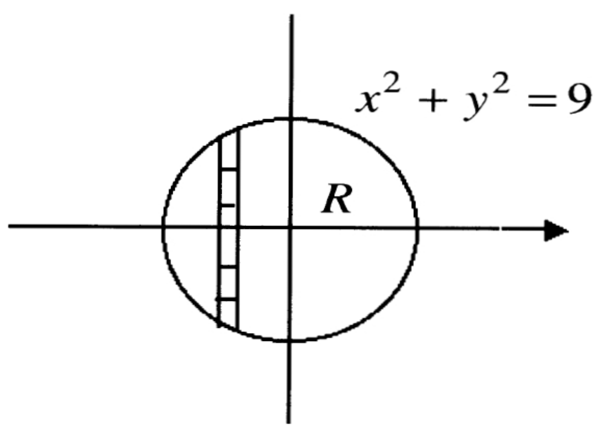
مثال

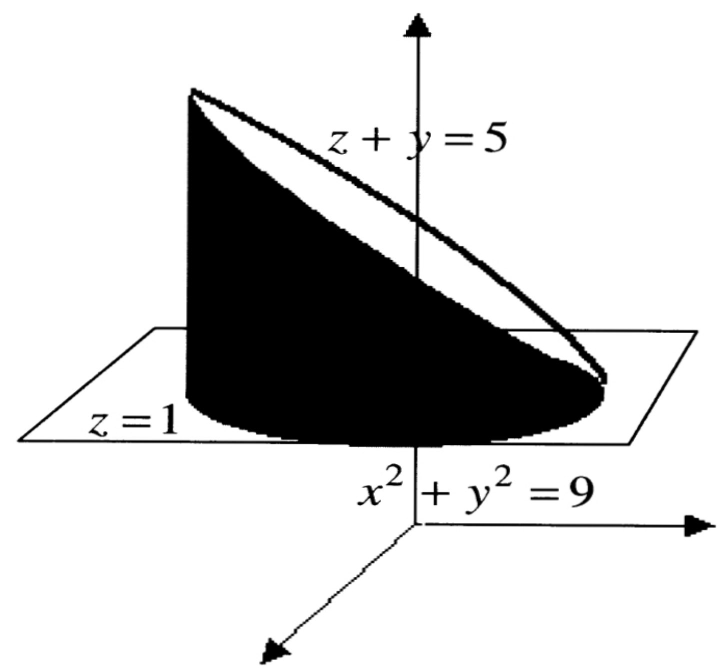
أوجد حجم المجسم المحدود بالاسطوانة $x^2 + y^2 = 9$ وبالمستويين $z = 1$ ، $x + z = 5$

الحل

إن حدود المجسم Q هي :

$$Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 5 - y \text{ لكل } (x, y) \in R \right\}$$





وعندئذٍ فإن حجم المجسم يعطي بالعلاقة التالية :

$$V = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} dz\, dy\, dx = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (5-y-1)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (4-y)\, dy\, dx = \int_{-3}^{3} \left(4y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$= 8\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx = 36\pi$$

لحساب التكامل نضع $x = 3\sin\theta$.

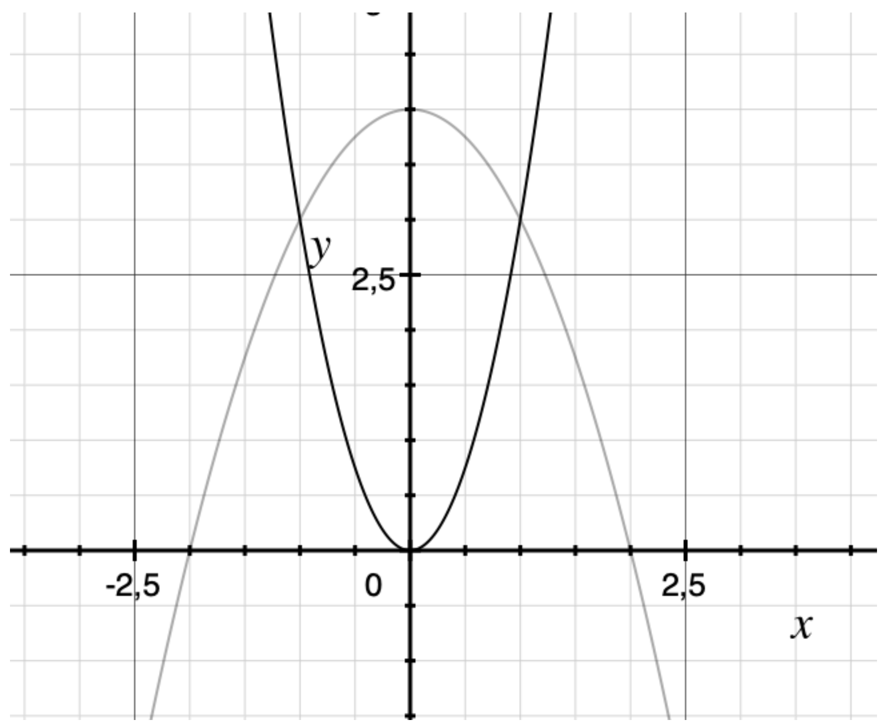
مثال

أوجد حجم المجسم Q المحدود بالسطوح $y=0$, $y+z=6$, $z=4-x^2$, $z=3x^2$.

الحل

المجسم Q هو:

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le 6-z \text{ لكل } (x,z)\in R\right\}$$



بالنظر إلى R نجد أن $3x^2 \le z \le 4 - x^2$ وأن $-1 \le x \le 1$

وبالتالي فإن

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2}\int_{0}^{6-z} dy\ dz\ dx = \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2} (6-z)dz\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[6z - \frac{1}{2}z^2\right] \Big|_{3x^2}^{4-x^2} dx = \frac{304}{15}$$

مثال

أوجد حجم المجسم المحدد بالسطحين $z = 8 - x^2 - y^2$ ، $z = x^2 + 3y^2$.

الحل

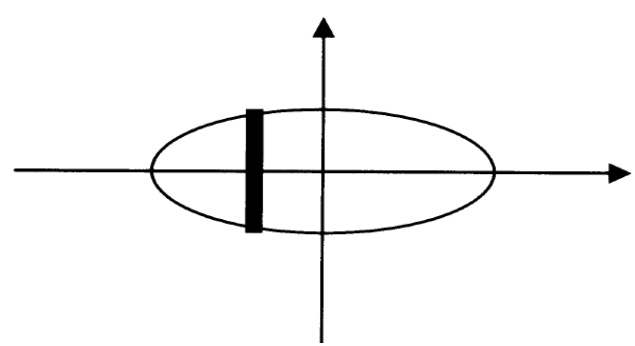
أن تقاطع السطحين هو منحنى معادلته ناتجة من العلاقة الآتية : $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$

$\frac{y^2}{1/2} + x^2 = 4$ وهي معادلة قطع ناقص .

وبالتالي فإن كل نقطة (x, y, z) واقعة داخل المجسم تقع أيضاً في المنطقة R أي داخل القطع الناقص

حدود المجسم Q هي:

$$Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2 \text{ لكـل } (x, y) \in R \right\}$$



$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2/2}}^{\sqrt{4-x^2/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\ dy\ dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2/2}}^{\sqrt{4-x^2/2}}(8-2x^2-4y^2)\ dy\ dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}\ (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = 8\pi\sqrt{2}$$

لحساب التكامل الأخير وضعنا $x = 2sin\theta$.

تمــــارين

في التمارين من ١ – ١٠ احسب التكاملات المتعاقبة التالية.

١– $\displaystyle\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 (y-xz)\,dzdydx$

٢– $\displaystyle\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 (y-xz)\,dydxdz$

٣– $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^x\int_{x-y}^{x+y} (z-2x-y)\,dzdydx$

٤– $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\cos z\,dydxdz$

٥– $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\int_0^1\int_0^y (z^2+1)\,e^{y^2}\,dxdzdy$

٦– $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/6}}\int_0^y\int_0^y (1+yz\cos xz^2)\,dxdzdy$

٧– $\displaystyle\int_{-15}^{13}\int_1^e\int_0^{1/\sqrt{x}} z(\ln x)^2\,dzdxdy$

٨– $\displaystyle\int_1^2\int_2^z\int_0^{\sqrt{3}\,y} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$

٩– $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin z} x^2\sin y\,dxdydz$

١٠– $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\cos z}^{\cos z}\int_{-\cos zy}^{\cos zy} x\cos zy\,dxdydz$

في التمارين من ١٣– ١٧ احسب التكامل.

١٢– $\iiint\limits_{Q} z dV$ ، حيث Q المجسم في الثمن الأول المحدود بالأسطوانة $y^2+z^2=1$ ، والمستويات $y=x$ و $x=0$.

١٣– $\iiint\limits_{Q} \cos\left(\frac{z}{y}\right) dv$ ، حيث Q هي :

$$Q=\left\{(x,y,z): y\le x\le \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}\le y\le \frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le z\le x\,y\right\}$$

١٤– $\iiint\limits_{Q} e^{y}\ dV$ ، حيث Q المجسم المحدود بالمستويات $y=1$ ، $z=0$ ، $y=x$ ، $y=-x$ و $z=y$.

١٥- $\iiint\limits_{Q} ye^{xy}\, dV$ ، حيث Q المكعب المحدود بالمستويات $x=1$ ، $x=3$ ، $y=0$ ، $y=2$ و $z=-2$ ، $z=0$.

١٦- $\iiint\limits_{Q} xy dV$ ، حيث Q المجسم في الثمن الأول المحدود من أعلى بنصف الكرة $z=\sqrt{4-y^2-z^2}$ ومن الجوانب والأسفل بالمستويات الإحداثية.

١٧- $\iiint\limits_{Q} zy dV$ ، حيث Q المجسم في الثمن الأول المحدود من أعلى بالمستوى $z=1$ ومن الأسفل بالخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$.