

حساب التكامل

111 رياض

الأسبوع السادس

الأهداف:

يتعرف الطالب عن الدوال الزائدية العكسية و بيانها

يتعلم الطالب اشتقاق الدوال الزائدية العكسية

يتعلم الطالب كيفية إستخدام الدوال الزائدية العكسية لحساب بعض التكاملات

الدوال الزائدية ومعكوساتها

1.4 ✓ الدوال الزائدية

2.4 الدوال الزائدية العكسية

2.4 الدوال الزائدية العكسية

(1) الدالة العكسية لدالة الجيب الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة الجيب الزائدية بالرمز $\sinh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\sinh y = x \iff y = \sinh^{-1} x$$

(2) الدالة العكسية لدالة جيب التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة جيب التمام الزائدية بالرمز $\cosh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\cosh^{-1} : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

$$\cosh y = x \iff y = \cosh^{-1} x$$

(3) الدالة العكسية لدالة الظل الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة الظل الزائدية بالرمز $\tanh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\tanh^{-1} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tanh y = x \iff y = \tanh^{-1} x$$

(4) الدالة العكسية لدالة ظل التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة ظل التمام الزائدية بالرمز $\coth^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\coth^{-1} : \mathbb{R} - [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\coth y = x \iff y = \coth^{-1} x$$

(5) الدالة العكسية لدالة القاطع الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة القاطع الزائدية بالرمز $sech^{-1}x$ وتعرف كالتالي

$$sech^{-1} : (0, 1] \longrightarrow [0, \infty)$$

$$sechy = x \iff y = sech^{-1}x$$

(6) الدالة العكسية لدالة قاطع التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة قاطع التمام الزائدية بالرمز $csch^{-1}x$ وتعرف كالتالي

$$csch^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

$$cschy = x \iff y = csch^{-1}x$$

إشتقاق الدوال الزائدية العكسية :

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

مثال :

$$f(x) = \sinh^{-1}(5x - 1)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(5x-1)^2}} \quad (5)$$

مثال :

$$f(x) = \sqrt{x} \sinh^{-1}(5x)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sinh^{-1}(5x) + \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{1 + (5x)^2}} (5)$$

إشتقاق الدوال الزائدية العكسية :

$$x \in (1, \infty) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (2)$$

$$f(x) \in (1, \infty) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \cosh^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}$$

مثال :

$$f(x) = 6^{\cosh^{-1}(2x)}$$

الحل :

$$f'(x) = 6^{\cosh^{-1}(2x)} \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 - 1}} (2) \ln 6$$

مثال :

$$f(x) = \frac{\cosh^{-1}(x^2)}{e^{3x}}$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{(x^2)^2-1}} (2x) e^{3x} - \cosh^{-1}(x^2) e^{3x} (3)}{(e^{3x})^2}$$

إشتقاق الدوال الزائدية العكسية :

$$x \in (-1, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (3)$$

$$f(x) \in (-1, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \tanh^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$$

مثال :

$$f(x) = \tanh^{-1} (\sqrt{x})$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{1-(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

إشتقاق الدوال الزائدية العكسية :

$$x \in \mathbb{R} - [-1, 1] \text{ لكل } \frac{d}{dx} \coth^{-1} x = \frac{-1}{1-x^2} \quad (4)$$

$$f(x) \in \mathbb{R} - [-1, 1] \text{ لكل } \frac{d}{dx} \coth^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$$

مثال :

$$f(x) = \ln |x^2 + \coth^{-1}(2x)|$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{2x + \frac{-1}{1-(2x)^2}}{x^2 + \coth^{-1}(2x)} \quad (2)$$

إشتقاق الدوال الزائدية العكسية :

$$x \in (0, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (5)$$

$$f(x) \in (0, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

مثال :

$$f(x) = [\operatorname{sech}^{-1}(3x) + 7^x]^5$$

الحل :

$$f'(x) = 5 [\operatorname{sech}^{-1}(3x) + 7^x]^4 \left[\frac{-1}{3x\sqrt{1-(3x)^2}} (3) + 7^x \ln 7 \right]$$

إشتقاق الدوال الزائدية العكسية :

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ لكل } \frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \quad (6)$$

$$f(x) \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ لكل } \frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

مثال :

$$f(x) = \operatorname{csch}^{-1} (e^{3x})$$

الحل :

$$f'(x) = -\frac{1}{e^{3x}\sqrt{1+(e^{3x})^2}} (e^{3x} (3)) = -\frac{3}{\sqrt{1+e^{6x}}}$$

تكامل الدوال الزائدية العكسية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 + [f(x)]^2}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

مثال :

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 25}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 25}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{(2x)^2 + 5^2}} dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{2x}{5} \right) + c$$

مثال :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{4+x}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{4+x}} dx = 2 \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{x})^2}} dx : \text{الحل}$$

$$= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) + c$$

تكامل الدوال الزائدية العكسية :

$$x > a \text{ حيث } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (2)$$

$$f(x) > a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

مثال :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} dx$$
$$\text{الحل : } \int \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 2x + 1) - 9}} dx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x + 1)^2 - 3^2}} dx = \cosh^{-1} \left(\frac{x + 1}{3} \right) + c$$

مثال :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 16}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 16}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{(x^2)^2 - 4^2}} dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{2} \cosh^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c$$

تكامل الدوال الزائدية العكسية :

$$|x| < a \text{ حيث } \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (3)$$

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2 - [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

مثال :

$$\int \frac{e^x}{25 - e^{2x}} dx$$

$$\int \frac{e^x}{25 - e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{5^2 - (e^x)^2} dx : \text{الحل}$$

$$|e^x| < 5 \text{ حيث } = \frac{1}{5} \tanh^{-1} \left(\frac{e^x}{5} \right) + c$$

تكامل الدوال الزائدية العكسية :

$$|x| > a \text{ حيث } \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \coth^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (4)$$

$$|f(x)| > a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2 - [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \coth^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

تكامل الدوال الزائدية العكسية :

$$|x| < a \text{ حيث } \int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{|x|}{a} \right) + c \quad (5)$$

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{|f(x)|}{a} \right) + c$$

مثال :

$$\int \frac{1}{x\sqrt{16 - x^4}} dx$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{16 - x^4}} dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{4^2 - (x^2)^2}} dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2\sqrt{4^2 - (x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \frac{-1}{4} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c$$

مثال :

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$$

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} dx = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{3-(x^2-2x)}} dx : \text{الحل}$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{4-(x^2-2x+1)}} dx = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{2^2-(x-1)^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{x-1}{2} \right) + c$$

تكامل الدوال الزائدية العكسية :

$$|x| \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{|x|}{a} \right) + c \quad (6)$$

$$|f(x)| \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2 + [f(x)]^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{|f(x)|}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} dx \quad \text{مثال :}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} dx = \int \frac{e^x}{e^x \sqrt{1^2 + (e^x)^2}} dx \quad \text{الحل :}$$

$$= -\operatorname{csch}^{-1} (e^x) + c$$