

حساب التكامل

111 رياض

الأسبوع الخامس

الأهداف:

- يتعرف الطالب عن الدوال الزائدية و خواصها
- يتعلم الطالب اشتقاق الدوال الزائدية ورسم بيانها
- يتعلم الطالب تكامل الدوال الزائدية

باب 4

الدوال الزائدية ومعكوساتها

1.4 الدوال الزائدية

2.4 الدوال الزائدية العكسية

1.4 الدوال الزائدية

(1) دالة الجيب الزائدية :

نرمز لدالة الجيب الزائدية بالرمز $\sinh x$ وتعرف كالتالي :

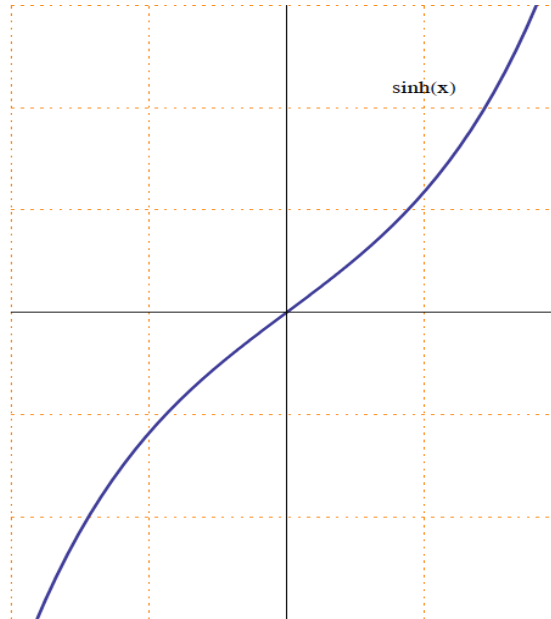
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ملاحظات عامة :

1 مجال دالة الجيب الزائدية \mathbb{R} ومداتها \mathbb{R}

2 دالة الجيب الزائدية دالة فردية (متناظرة حول نقطة الأصل) و $\sinh(0) = 0$

3 رسم دالة الجيب الزائدية



(2) دالة جيب التمام الزائدية :

نرمز لدالة جيب التمام الزائدية بالرمز $\cosh x$ وتعرف كالتالي :

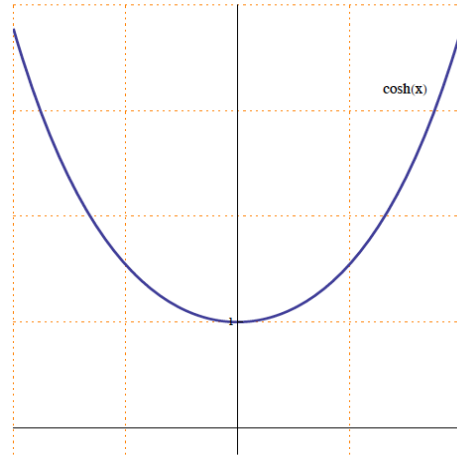
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ملاحظات عامة :

1 مجال دالة جيب التمام الزائدية \mathbb{R} ومداهما الفترة $[1, \infty)$

2 دالة جيب التمام الزائدية دالة زوجية (متناظرة حول محور y) و $\cosh(0) = 1$

3 رسم دالة جيب التمام الزائدية



(3) دالة الظل الزائدية :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

(4) دالة ظل التمام الزائدية :

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(5) دالة القاطع الزائدية :

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

(6) دالة قاطع التمام الزائدية :

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

قوانين هامة :

$$x \in \mathbb{R} \text{ لكل } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (1)$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ لكل } 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ لكل } \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x \quad (3)$$

إشتقاق الدوال الزائدية :

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh (f(x)) = \cosh (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh (f(x)) = \sinh (f(x)) f'(x)$$

مثال :

$$f(x) = e^{\sinh 4x}$$

الحل :

$$f'(x) = e^{\sinh 4x} \cosh 4x (4)$$

مثال :

$$f(x) = \ln |\cosh(1 - x^2)|$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\sinh(1 - x^2) (-2x)}{\cosh(1 - x^2)}$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh (f(x)) = \operatorname{sech}^2 (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \coth (f(x)) = -\operatorname{csch}^2 (f(x)) f'(x)$$

مثال :

$$f(x) = \tanh(5^x)$$

الحل :

$$f'(x) = \operatorname{sech}^2(5^x) 5^x \ln 5$$

مثال :

$$f(x) = (\coth(3x) + e^{6x})^4$$

الحل :

$$f'(x) = 4 (\coth(3x) + e^{6x})^3 (-\operatorname{csch}^2(3x) (3) + e^{6x} (6))$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} (f(x)) = -\operatorname{sech} (f(x)) \tanh (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \operatorname{coth} x \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} (f(x)) = -\operatorname{csch} (f(x)) \operatorname{coth} (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} (f(x)) = -\operatorname{sech} (f(x)) \tanh (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \operatorname{coth} x \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} (f(x)) = -\operatorname{csch} (f(x)) \operatorname{coth} (f(x)) f'(x)$$

مثال :

$$f(x) = \operatorname{sech}(1 + \sqrt{x})$$

الحل :

$$f'(x) = -\operatorname{sech}(1 + \sqrt{x}) \tanh(1 + \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

مثال :

$$f(x) = x^{cschx}$$

الحل :

$$\ln |f(x)| = \ln |x^{cschx}| = cschx \ln |x|$$

بإشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (-cschx \coth x) \ln |x| + cschx \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \left[(-cschx \coth x) \ln |x| + cschx \frac{1}{x} \right]$$

$$f'(x) = x^{cschx} \left[(-cschx \coth x) \ln |x| + cschx \frac{1}{x} \right]$$

تكامل الدوال الزائدية :

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c \quad (1)$$

$$\int \cosh (f(x)) \, f'(x) \, dx = \sinh (f(x)) + c$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c \quad (2)$$

$$\int \sinh (f(x)) \, f'(x) \, dx = \cosh (f(x)) + c$$

$$\int x^2 \cosh(x^3) dx \quad \text{مثال :}$$

$$\int x^2 \cosh(x^3) dx = \frac{1}{3} \int \cosh(x^3) (3x^2) dx \quad \text{الحل :}$$

$$= \frac{1}{3} \sinh(x^3) + c$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} dx \quad \text{مثال :}$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} dx = \ln |1 + \cosh x| + c \quad \text{الحل :}$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh^2 x} dx$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh^2 x} dx = \int \frac{\sinh x}{1 + (\cosh x)^2} dx = \tan^{-1}(\cosh x) + c \quad \text{الحل :}$$

مثال :

$$\int \frac{\coth x}{\sqrt{\sinh^2 x - 4}} dx$$

$$\int \frac{\coth x}{\sqrt{\sinh^2 x - 4}} dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x \sqrt{(\sinh x)^2 - (2)^2}} dx : \text{الحل}$$
$$= \frac{1}{2} \sec^{-1} \left(\frac{\sinh x}{2} \right) + c$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + c \quad (3)$$

$$\int \operatorname{sech}^2 (f(x)) f'(x) \, dx = \tanh (f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\operatorname{coth} x + c \quad (4)$$

$$\int \operatorname{csch}^2 (f(x)) f'(x) \, dx = -\operatorname{coth} (f(x)) + c$$

مثال :

$$\int \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx : \text{الحل}$$

$$= 2 \int \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \tanh(\sqrt{x}) + c$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + c \quad (5)$$

$$\int \operatorname{sech}(f(x)) \tanh(f(x)) f'(x) \, dx = -\operatorname{sech}(f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + c \quad (6)$$

$$\int \operatorname{csch}(f(x)) \coth(f(x)) f'(x) \, dx = -\operatorname{csch}(f(x)) + c$$

مثال :

$$\int \frac{\operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{coth}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{coth}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx &= \int \operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{coth}\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \int -\operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{coth}\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{-1}{x^2}\right) dx = \operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) + c \end{aligned}$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln |\cosh x| + c \quad (7)$$

$$\int \tanh (f(x)) \, f'(x) \, dx = \ln |\cosh (f(x))| + c$$

$$\int \coth x \, dx = \ln |\sinh x| + c \quad (8)$$

$$\int \coth (f(x)) \, f'(x) \, dx = \ln |\sinh (f(x))| + c$$

مثال :

$$\int e^x \tanh(e^x) dx$$

$$\int e^x \tanh(e^x) dx = \int \tanh(e^x) e^x dx = \ln |\cosh(e^x)| + c : \text{الحل}$$

مثال :

$$\int e^{\tanh x} \operatorname{sech}^2 x dx$$

$$\int e^{\tanh x} \operatorname{sech}^2 x dx = e^{\tanh x} + c : \text{الحل}$$