حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الثاني

• التكاملات المتعددة MULTIPLE INTEGRALS

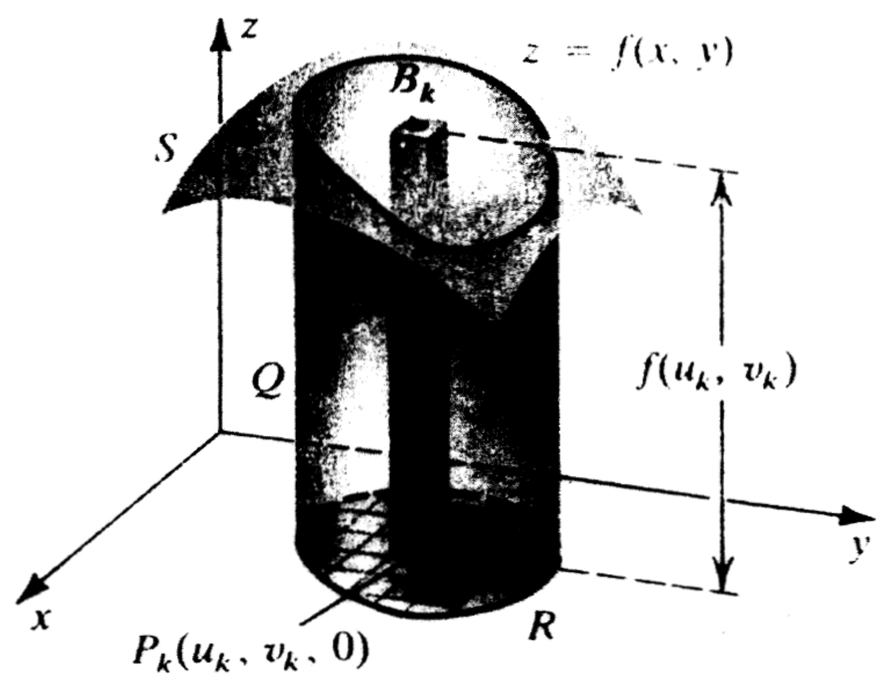
- مقدمة
- التكامل الثنائي
- حساب التكاملات الثنائية
- المساحات والحجوم
- الاحداثيات القطبية
- التكامل الثلاثي
- الاحداثيات الاسطوانية والكروية
- العزم ومركز الثقل
- المساحة السطحية

(٢-٢-١) تعريف

لتكن f دالة في متغيرين معرفة على المنطقة R نعرف التكامل الثنائي للدالة f على المنطقة R ، ونرمز له بالرمز $\iint_R f(x,y)dA$ ، بأنه

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(u_k, v_k)\,\Delta A_k = \iint_R f(x,y)dA \qquad (١)$$

شريطة أن النهاية موجودة ووحيدة لأي تجزئة P ولأي $(u_k, v_k) \in R_K$.



(٢-٢-٢) تعريف

إذا كانت f دالة متصلة في متغيرين بحيث إن $f(x,y) \geq 0$ لكل (x,y) في المنطقة R . فإن الحجم V للمجسم الواقع تحت سطح الدالة $z = f(x,y)$ وفوق المنطقة R ، هو

$$V = \iint_R f(x,y)dA.$$

(٢-٢-٣) نظرية (خواص التكامل الثنائي)

لتكن f و g دالتين في متغيرين x,y قابلتين للتكامل على منطقة مستوية R مغلقة ومحدودة، عندئذٍ.

(١) $\iint_R cf(x,y)\, dA = c \iint_R f(x,y)\, dA$ ، حيث $c \in R$

(٢) $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA \pm \iint_R g(x,y)\, dA$

(٣) إذا كانت R هي اتحاد منطقتين R_1 ، R_2 غير متداخلتين كما في شكل (٢-٣) فإن

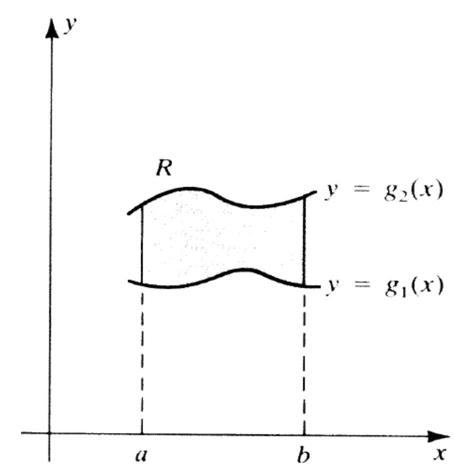
$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$

(٤) إذا كانت $f(x,y) \geq 0$ لكل $(x,y) \in R$ فإن $\iint_R f(x,y)\, dA \geq 0$

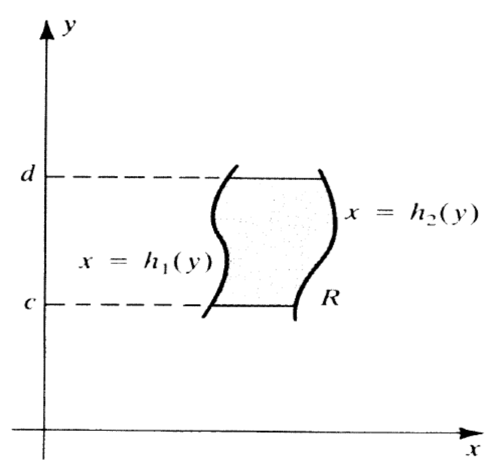
(٢-٢-٤) تعريف

(أ) نعرف المنطقة المستوية R_x بأنها المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين المعرفتين والمتصلتين $y=g_1(x)$ و $y=g_2(x)$ على الفترة المغلقة $[a,b]$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$، بحيث أن $g_2(x)\geq g_1(x)$ لكل $a\leq x\leq b$. كما هو موضح بالشكل (٢-٤) (أ).

(ب) نعرف المنطقة المستوية R_y بأنها المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين $x=h_1(x)$ و $x=h_2(y)$ المعرفتين والمتصلتين على الفترة المغلقة $[c,d]$ والمستقيمين $y=c$ و $y=d$، بحيث أن $h_2(y)\geq h_1(y)$ لكل $c\leq y\leq d$. كما هو موضح بالشكل (٢-٤) (ب).



الشكل (٢-٤) (أ)



الشكل (٢-٤) (ب)

● حساب التكاملات الثنائية Evaluation Of Double Integrals

(٢–٣–١) تعريف

(i) $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$

(ii) $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$

مثال

أحسب التكامل

$$\mathrm{I} = \int_1^2 \int_{-1}^1 (2y + 4y^2 x)dx\, dy$$

الحل

من الملاحظ أن المنطقة المراد التكامل عليها هي

$$R = \{ (x, y) : -1 \le x \le 1 , 1 \le y \le 2 \}$$

$$\int_1^2 \int_{-1}^1 (2y + 4y^2 x)dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_{-1}^1 (2y + 4y^2 x)dx \right) dy$$

$$\int_1^2 (\left(2yx + 2y^2 x^2 \right]_{-1}^1) dy = \int_1^2 [(2y + 2y^2) - (-2y + 2y^2)] dy$$

$$= \int_1^2 4y dy = \left(2y^2\right]_1^2 = 6$$

(٢-٣-٢) تعريف

$$\text{(i)} \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$\text{(ii)} \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

مثال

أحسب التكامل $\int_0^1\int_x^{2x}(2x+3y^2)dydx$

الحل

$$\int_0^1\int_x^{2x}(6\mathrm{x}+3y^2)dydx=\int_0^1\left[\int_x^{2x}(6x+3y^2)dy\right]dx=\int_0^1 6xy+y^3\Big|_x^{2x}dx$$

$$=\int_0^1[(12x^2+8x^3)-(6x^2+x^3)]dx$$

$$=\int_0^1(6x^2+7x^3)dx=2x^3+\frac{7}{4}x^4\Big|_0^1=2+\frac{7}{4}=3\frac{3}{4}$$

مثال

أحسب التكامل $I=\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{y}2x\sin y^{3}\,dx\,dy$

الحل

$$I=\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{y}(2x\sin y^{3})dxdy=\int_{0}^{\pi/2}\left[\int_{0}^{y}(2x\sin y^{3})dx\right]dy=\int_{0}^{\pi/2}x^{2}\sin y^{3}\Big|_{0}^{y}dy$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}(y^{2}\sin y^{3})dy=\frac{-1}{3}\cos y^{3}\Big|_{0}^{\pi/2}=\frac{-1}{3}(\cos(\frac{\pi}{2})^{3}-1)$$

(٢-٣-٣) نظرية

(أ) لتكن $z = f(x, y)$ دالة معرفة ومتصلة على المنطقة $R = R_x$ ، فإن

$$\text{(i)} \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(ب) لتكن $z = f(x, y)$ دالة معرفة ومتصلة على المنطقة $R = R_y$ ، فإن

$$\text{(ii)} \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال

احسب التكامل $\mathrm{I} = \iint\limits_R f(x, y)\, dA$

حيث $f(x, y) = 3x + 2y$ ، وَ $R = \{ (x, y) : -1 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le x + 1 \}$

الحل

$$\mathrm{I} = \iint\limits_R (3x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{x^3}^{x+1} (3x + 2y)\, dy dx = \int_{-1}^{1} 3xy + y^2 \Big|_{x^3}^{x+1}$$

$$= \int_{-1}^{1} \{ [3x(x+1) + (x+1)^2] - [3x^4 + x^6] \}$$

$$= 2\int_{0}^{1} (4x^2 + 5x - 3x^4 - x^6 + 1)\, dx = \frac{859}{105}$$

مثال

احسب التكامل $\mathrm{I} = \iint\limits_{R} f(x, y)\ dA$

حيث إن $f(x, y) = x^3 + 4y$ ، وَ R المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين $\mathrm{y} = 2x$ ، $y = x^2$.

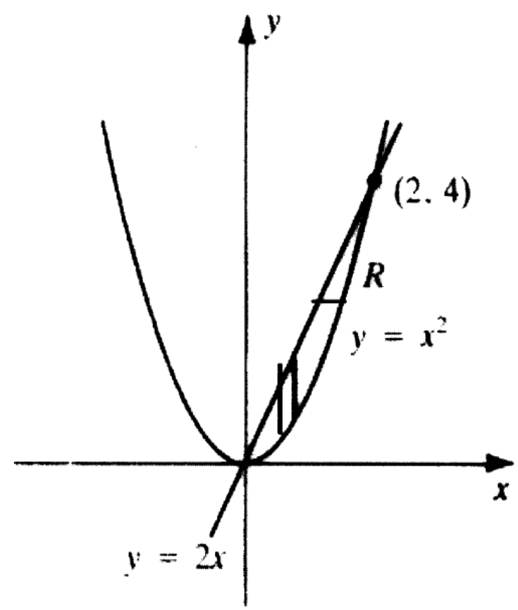
الحل

أولاً: نجد نقاط التقاطع للمنحنيين وذلك بحل معادلتي المنحنيين، أي

$$x^2 = 2x$$

ومنه فإن $x = 2$ وَ $x = 0$

أي أن نقطتي التقاطع هما $(0,0)$ وَ $(2,4)$ كما هو موضح في الشكل



نرسم شريحة إما رأسية أو أفقية داخل المنطقة، وهنا رسمنا شريحة رأسية. إن حركة الشريحة في المنطقة تحدد حدود التكامل الأول والحركة داخل الشريحة تحدد حدود التكامل الثاني. وبالتالي فإن

$x^2 \le y \le 2x$ ، $0 \le x \le 2$

ومنه فإن

$$\mathrm{I} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy \right) dx = \int_0^2 [x^3 y + 2y^2]_{x^2}^{2x}\, dx$$

$$= \int_0^2 [(2x^4 + 8x^2) - (x^5 + 2x^4)]\, dx = \int_0^2 (8x^2 - x^5)\, dx$$

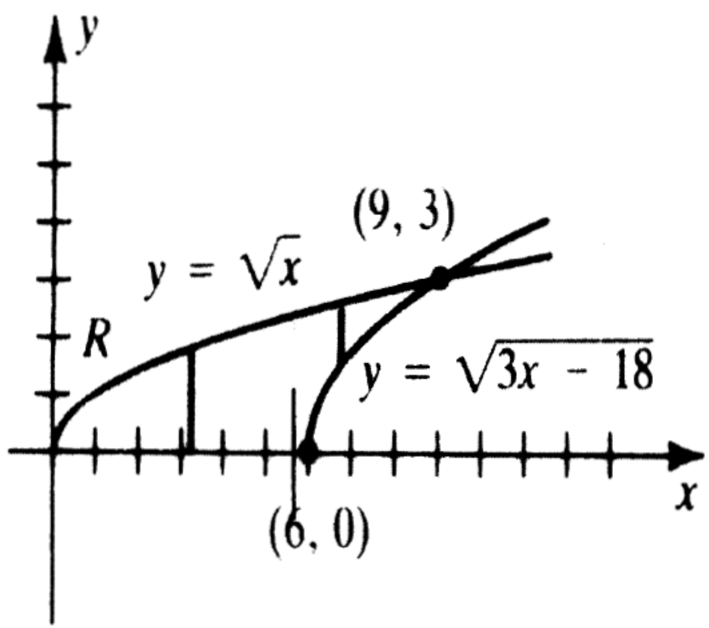
$$= \left[\frac{8}{3} x^3 - \frac{x^6}{6} \right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

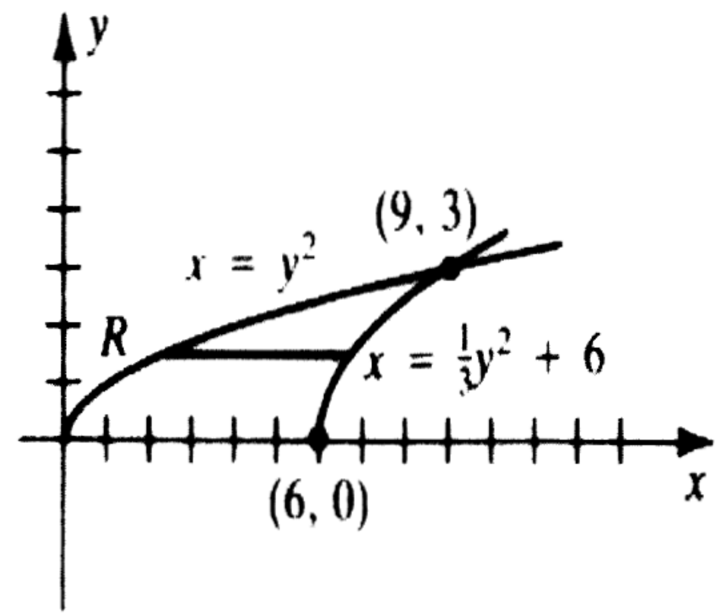
مثال

إذا كانت f دالة متصلة على المنطقة المستوية R المحدودة بالمنحنيات $y=\sqrt{x}$ ، $y=0$ و $y=\sqrt{3x-18}$ أكتب $\iint f(x,y)dA$ كتكامل متعاقب.

الحل

الطريقة الأولى : نأخذ شريحة أفقية، وهنا نلاحظ أنه أثناء حركة الشريحة من بداية المنطقة إلى نهايتها فإن بداية ونهاية الشريحة تبقى على نفس المنحنيين، وهذا يعني أن لا تجزئة للمنطقة. كما في شكل





نجد نقاط تقاطع المنحنيين وذلك بحل المعادلتين $y=\sqrt{3x-18}$ وَ $y=\sqrt{x}$.

أي أن

$$\sqrt{3x-18}=\sqrt{x}$$

بتربيع الطرفين نحصل على

$$3x-18=x$$

ومنه

$$x=9 \text{ ، بالتالي فإن } y=3$$

كما أن $x=\dfrac{y^2+18}{3}$ ، $x=y^2$. من حركة الشريحة في اتجاه محور ـــ y ةالحركة داخل الشريحة في اتجاه محور ـــ x ، وبالتالي يكون

$$y^2\le x\le \frac{y^2+18}{3} \text{ و } 0\le y\le 3$$

ومنه فإن

$$\mathrm{I} = \iint\limits_R f(x,y)\, dA = \int_0^3 \left(\int_{y^2}^{\frac{y^2+18}{3}} f(x,y)\, dx \right) dy$$

الطريقة الثانية : نأخذ شريحة رأسية، نجد أنه أثناء حركة الشريحة من بداية المنطقة إلى نهايتها فإن على الأقل أحد نهايتيها تصبح على منحنى مختلف، هذا يعني أننا علينا تجزئة المنطقة عند الخط الفاصل في تغير نهايتي الشريحة إلى منطقتين R_1 ، R_2. بالمثل من حركة الشريحة والحركة داخل الشريحة فإن $0 \le x \le 6 , 0 \le y \le \sqrt{x}$ على R_1 وأن $6 \le x \le 9 , \sqrt{3x-18} \le y \le \sqrt{x}$ على R_2

وبالتالي فإن :

$$\mathrm{I} = \iint\limits_R f(x,y)\, dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\, dA$$

$$= \int_0^6 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y) dy \right) dx + \int_6^9 \left(\int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy \right) dx$$

من الملاحظ أن أخذ شريحة أفقية في هذا المثال أفضل من الشريحة الرأسية.

(٢-٣-٤) **تغير ترتيب التكامل المتعاقب** : كما رأينا فإن التكامل $\iint_R f(x,y)dA$ يمكن حسابه بإحدى التكاملين المتعاقبين $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$ أو $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$. ولكن أي من التكاملين نستخدم، هذا يعتمد على الدالة المكاملة وقد يعتمد أيضا على حدود التكامل والمنطقة المراد حساب التكامل عليها. على سبيل المثال فإن التكامل $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dydx$ بسبب الدالة المكاملة، بينما التكامل $\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{y} dydx$ لا يمكن حسابه بسبب حدود التكامل. هل هذا يعني أن مثل هذه التكاملات لا يمكن حسابها. الإجابة بالنفي فقد نستطيع حساب بعض هذه التكاملات إذا ما كتبت بطريقة ثانية مكافئة. فإذا ما كتبنا التكامل الأول على الصورة المكافئة $\int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dxdy$ نستطيع حساب هذا التكامل. ما قمنا به هو أننا كتبنا التكامل بصورة مكافئة ولكننا عكسنا ترتيب التكامل.

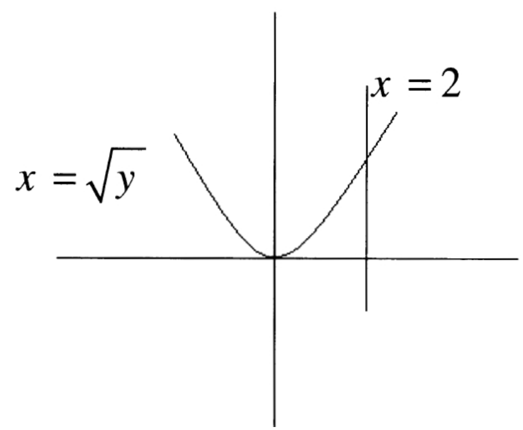
مثال

أحسب التكامل

$$I=\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^{2} y\cos(x^5)dx\,dy$$

الحل

من حدود التكامل نلاحظ أن $\sqrt{y}\le x\le 2$ وأن $0\le y\le 4$ كما هو موضح بالشكل كما أن هذا التكامل لا يمكن إجراءه بالترتيب المعطى لذلك سوف نعيد كتابة التكامل بطريقة مكافئة ولكن بعكس ترتيب التكامل. من الترتيب المعطى فإن الشريحة المأخوذة أفقية. بالتالي لعكس ترتيب التكامل نأخذ شريحة رأسية، نجد أن $0\le x\le 2$, $0\le y\le x^2$ كما يتضح من الشكل



وبالتالي فإن

$$\mathrm{I} = \iint_R y\cos(x^5)\,dA = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{x^2} y\cos(x^5)\,dy \right] = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \cos(x^5) \right]_0^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x^4 \cos(x^5)\,dx = \frac{1}{10}\left[\sin(x^5) \right]_0^2 = \frac{1}{10}\sin(32) = 0.053$$

مثال

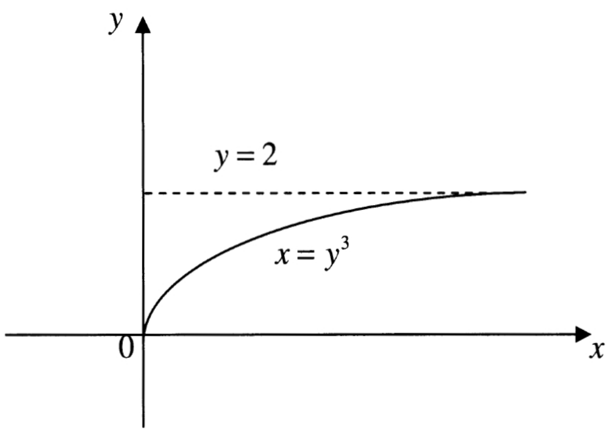
أحسب التكامل
$$I=\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{1}{y^4+1}dydx$$

الحل

من حدود التكامل نلاحظ أن $\sqrt[3]{x}\le y\le 2$ وأن $0\le x\le 8$ كما هو موضح بالشكل

من الواضح أنه من الصعب إيجاد التكامل بهذا الترتيب وبعكس ترتيب التكامل نجد أن

$$0\le x\le y^3,0\le y\le 2$$



وبالتالي فإن

$$I=\iint_R\frac{1}{y^4+1}dA=\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy\,dx}{y^4+1}=\int_0^2\left(\int_0^{y^3}\frac{dx}{y^4+1}\right)dy$$

$$=\int_0^2\frac{y^3}{y^4+1}dy=\frac{1}{4}\left[\ln y^4+1)\right]_0^2=\frac{1}{4}\ln(17).$$

تمـــــارين

في التمارين من ١-٣ احسب التكامل المعطى على R

١- $I = \iint\limits_R \frac{\sin x}{x} dA$ ، حيث أن R هي المنطقة المحدودة بالمثلث الذي رؤوسه $(0,0)$، $(1,0)$ ، $(1,1)$.

٢- $I = \iint\limits_R \frac{y^2}{x^2} dA$، حيث R المنطقة المحدودة بالمنحنيات $yx = 1 , y = 2 , y = x$.

٣- $I = \iint\limits_R x^2\sqrt{9 - y^2}\, dA$، حيث R المنطقة المحدودة بمحيط الدائرة $x^2 + y^2 = 9$.

٤- $\mathrm{I}=\iint_R xy^2dA$، حيث R المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $y=4-x^2$ ومحور السينات على الفترة $[-1,1]$.

٥- $\mathrm{I}=\iint_R xdA$ ، حيث R المنطقة على شكل شبه منحرف محدودة بالخطوط المستقيمة $x=3$ ، $x=5$ ، $y=1$ ، و $y=x$.

٦- $\mathrm{I}=\iint_R x(x-1)e^{xy}dA$ ، ، حيث R المنطقة على شكل مثلث محدودة بالخطوط المستقيمة $x=0$ ، $y=0$ ، و $y+x=2$.

٧- $I=\iint\limits_R (3x-5)dA$، حيث R المنطقة على شكل مثلث محدودة بالخطوط المستقيمة $y=5+x$، $y=-x+7$، و $x=10$.

٨- $I=\iint\limits_R xydA$، حيث R المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y=x^2$ و $y=x$.

٩- $I=\iint\limits_R 1dA$ ، حيث R المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y=1+x$ و $y=\sin x$ على الفترة $[\pi,2\pi]$.

١٠- $I=\iint\limits_R (4+x^2)dA$ ، حيث R المنطقة المحدودة بالمنحنى $y=1+x^2$ والمنحنى $y=9-x^2$.

١١- $I=\iint\limits_R xdA$، حيث R القرص المغلق $x^2+y^2\le 16$.

في التمارين من ١٢–٢٥ احسب التكاملات المعطاة.

١٢– $\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y}\,dydx$

١٣– $\int_0^1 \int_x^{x^2} 1\,dydx$

١٤– $I = \int_0^1 \int_0^1 |x-y|\;dy\,dx$

١٥– $\int^1 \int^y x\sqrt{y^2-x^2}\,dxdy$

١٦– $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} y\,dxdy$

١٧– $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dxdy$

١٨– $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sin\theta\,drd\theta$

١٩– $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,drd\theta$

٢٠– $\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r\,drd\theta$

٢١– $\int_1^3 \int_0^x \frac{2}{x^2+y^2}\,dydx$

٢٢– $\int_1^e \int_1^{\ln y} e^x\,dxdy$

٢٣– $\int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dydx$

٢٤– $\int_{\ln\pi/6}^{\ln\pi/2} \int_0^{e^y} \cos e^y\,dxdy$

٢٥– $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos y} e^x \sin y\,dxdy$

في التمارين من ٢٦– ٣٥. استخدم طريقة عكس ترتيب التكامل لحساب التكاملات المعطاة.

٢٦– $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin(\pi y^3) dy\ dx$

٢٧– $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx\, dy$

٢٨– $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y} \sin y \cos \frac{x}{y} dy\ dx$

٢٩– $\int_1^e \int_0^{\ln x} y dy dx$

٣٠– $\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y e^{(x-1)^2} dx dy$

٣١– $\int_1^e \int_{1/e}^{1/y} \cos(x - \ln x) dx dy$

٣٢– $\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\pi/2} \sec^2 x (\cos x)\, dx dy$

٣٣– $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_y^{\sqrt{\pi/2}} y^2 \sin x^2 dx dy$

٣٤– $\int_0^{\pi^{1/3}} \int_{y^2}^{\pi^{2/3}} \sin x^{3/2} dx dy$

٣٥- أثبت أن

$$\int_{x=1}^{2}\int_{y=\sqrt{x}}^{x} \sin(\frac{\pi x}{2y})\, dy\, dx + \int_{x=2}^{4}\int_{y=\sqrt{x}}^{2} \sin(\frac{\pi x}{2y}) dy\, dx = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

٣٦- أثبت أن $\int_0^1\{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy\}\, dx = \frac{1}{2}$

وَ

$$\int_0^1\{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\}\, dy = -\frac{1}{2}$$

علل سبب اختلاف الجواب ؟