حساب التكامل

111 ريض

الأسبوع الرابع

الأهداف:

- يتعرف الطالب عن الدالة الأسية العامة و خواصها كذلك يتعلم اشتقاق و تكامل الدالة الأسية العامة
- يتعرف الطالب عن الدالة اللوغارتمية العامة و خواصها كذلك يتعلم اشتقاق و تكامل الدالة اللوغاريتمية العامة
- تكامل الدوال المثلثية العكسية

الدوال اللوغاريتمية والأسية

- ✓ 1.3 الدالة اللوغاريتمية الطبيعية
- ✓ 2.3 الدالة الأسية الطبيعية
- 3.3 الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة
- 4.3 تكامل الدوال المثلثية العكسية

3.3 الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة

الدالة الأسية العامة :

إذا كان $a > 0$ عدداً حقيقياً ، نرمز للدالة الأسية العامة للأساس a بالرمز a^x وتعرف كالتالي $a^x = e^{x \ln a}$

ملاحظات عامة :

(1) مجال الدالة الأسية العامة هو $\mathbb{R}$

(2) مدى الدالة الأسية العامة هو الفترة $(0, \infty)$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$ حيث $a > 1$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ حيث $a > 1$

بعض خواص الدالة الأسية العامة :

إذا كانت $x, y \in \mathbb{R}$ فإن :

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (1)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (2)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (3)$$

إشتقاق الدالة الأسية العامة :

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\, a^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x)\, \ln a$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = 3^{x^2+x} \quad (1)$$

الحل : $f'(x) = 3^{x^2+x}(2x+1)\ \ln(3)$

$$f(x) = 5^{\sqrt{x}} \quad (2)$$

الحل : $f'(x) = 5^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \ln(5)$

$$f(x) = \pi^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

الحل : $f'(x) = \pi^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2}\right) \ln(\pi)$

$$f(x) = 3^{\tan(x^2+1)} \quad (4)$$

الحل : $f'(x) = 3^{\tan(x^2+1)}\ \sec^2(x^2+1)\,(2x)\ \ln 3$

$$f(x) = \left(4^{x^2} + 7^{3x+1}\right)^6 \quad (5)$$

الحل : $f'(x) = 6\left(4^{x^2} + 7^{3x+1}\right)^5 \left(4^{x^2}(2x)\ \ln(4) + 7^{3x+1}(3)\ln(7)\right)$

$$f(x) = \ln\left|5^{x^2} + x^3\right| \quad (6)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{5^{x^2}(2x)\ln(5) + 3x^2}{5^{x^2} + x^3}$

تكامل الدالة الأسية العامة :

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int a^{f(x)} \, f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int x^2 6^{x^3-2} \, dx \quad (1)$$

الحل : $\int x^2 6^{x^3-2} \, dx = \frac{1}{3} \int 6^{x^3-2} (3x^2) \, dx = \frac{1}{3} \frac{6^{x^3-2}}{\ln 6} + c$

$$\int \frac{3^{\cot x}}{\sin^2 x} \, dx \quad (2)$$

الحل : $\int \frac{3^{\cot x}}{\sin^2 x} \, dx = \int 3^{\cot x} \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int 3^{\cot x} \csc^2 x \, dx$

$$= - \int 3^{\cot x} (-csc^2 x) \, dx = -\frac{3^{\cot x}}{\ln 3} + c$$

$$\int \left(5^x + \frac{1}{2^x}\right)\, dx \quad (3)$$

الحل : $\int \left(5^x + \frac{1}{2^x}\right)\, dx = \int \left(5^x + 2^{-x}\right)\, dx = \int 5^x \, dx + \int 2^{-x} \, dx$

$$= \int 5^x \, dx + \frac{1}{-1} \int 2^{-x} (-1) \, dx = \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + c$$

$$\int (7^x + 4)^{10} \; 7^x \, dx \quad (4)$$

الحل : $\int (7^x + 4)^{10} \; 7^x \, dx = \frac{1}{\ln 7} \int (7^x + 4)^{10} \left(7^x \ln 7\right)\, dx$

$$= \frac{1}{\ln 7} \, \frac{(7^x + 4)^{11}}{11} + c$$

$$\int \frac{2^x}{2^x + 1} \, dx \quad (5)$$

الحل : $\int \frac{2^x}{2^x + 1} \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} \, dx = \frac{1}{\ln 2} \ln |2^x + 1| + c$

$$\int 3^x \left(1+\cos\left(3^x\right)\right)\, dx \quad (6)$$

الحل : $\int 3^x \left(1+\cos\left(3^x\right)\right)\, dx = \int \left[3^x + \cos\left(3^x\right) 3^x\right]\, dx$

$$= \int 3^x\, dx + \int \cos\left(3^x\right) 3^x\, dx = \int 3^x\, dx + \frac{1}{\ln 3}\int \cos\left(3^x\right)\left(3^x \ln 3\right)\, dx$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\, \sin\left(3^x\right) + c$$

$$\int 4^x\, 5^{4^x} dx \quad (7)$$

الحل : $\int 4^x\, 5^{4^x} dx = \frac{1}{\ln 4}\int 5^{4^x}\, \left(4^x \ln 4\right)\, dx = \frac{1}{\ln 4}\, \frac{5^{4^x}}{\ln 5} + c$

الدالة اللوغاريتمية العامة :

نرمز للدالة اللوغاريتمية للأساس a بالرمز $\log_a x$ وهي الدالة العكسية للدالة الأسية a^x حيث $a > 0$ عدداً حقيقياً

ملاحظات عامة :

$$\ln x = \log_e x \text{ و } \log x = \log_{10} x \quad (1)$$

$$\log_a x = y \iff x = a^y \quad (2)$$

$$\log_a a = 1 \quad (3)$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (4)$$

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية العامة :

إذا كانت $x, y > 0$ وكانت $r \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad (1)$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad (2)$$

$$\log_a x^r = r \log_a x \quad (3)$$

مثال : أوجد قيمة x التي تحقق $\log(x+1) = 2$

الحل : $\log(x+1) = 2 \implies 10^{\log(x+1)} = 10^2$

$\implies x+1 = 100 \implies x = 100 - 1 = 99$

مثال : أوجد قيمة x التي تحقق $3^{2x-1} = 7$

الحل : $3^{2x-1} = 7 \implies \log_3 3^{2x-1} = \log_3 7$

$$2x - 1 = \log_3 7 \implies 2x = 1 + \log_3 7 \implies x = \frac{1 + \log_3 7}{2}$$

إشتقاق الدالة اللوغاريتمية العامة :

$$\frac{d}{dx}\log_a|x| = \frac{1}{\ln a}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a|f(x)| = \frac{1}{\ln a}\,\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)\,\ln a}$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \log_5\left|x^3 + \sin 5x\right| \quad (1)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{1}{\ln 5}\,\dfrac{3x^2 + \cos 5x\,(5)}{x^3 + \sin 5x}$

$$f(x) = \left[\log_3|x^2 - 1| + e^{3x}\right]^8 \quad (2)$$

الحل : $f'(x) = 8\left[\log_3|x^2 - 1| + e^{3x}\right]^7\left(\dfrac{1}{\ln 3}\,\dfrac{2x}{x^2 - 1} + e^{3x}(3)\right)$

$$f(x) = \sin\left(\log_7 |2x+3|\right) \quad (3)$$

الحل : $$f'(x) = \cos\left(\log_7 |2x+3|\right) \left(\frac{1}{\ln 7}\,\frac{2}{2x+3}\right)$$

$$f(x) = \sin(x^2)\,\log_7 |2x+3| \quad (4)$$

الحل :

$$f'(x) = \cos(x^2)\,(2x)\,\log_7 |2x+3| + \sin(x^2)\,\frac{1}{\ln 7}\,\frac{2}{2x+3}$$

4.3 تكامل الدوال المثلثية العكسية

مراجعة إشتقاق الدوال المثلثية العكسية :

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x| < 1 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \quad , \quad |f(x)| < 1$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x| < 1 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \quad , \quad |f(x)| < 1$$

مثال :

$$f(x) = \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right) \quad (1)$$

الحل : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

مثال :

$$f(x) = \tan^{-1}(2x^2+3) \quad (2)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{1}{1+(2x^2+3)^2}(4x) = \dfrac{4x}{1+(2x^2+3)^2}$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1 \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} \quad , \quad |f(x)|>1$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} \quad , \quad |f(x)|>1$$

مثال :

$$f(x) = \sec^{-1}(3+\sin 3x) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(3+\sin 3x)\sqrt{(3+\sin 3x)^2-1}}(\cos 3x)(3)$$

$$(4)\quad f(x)=e^{\cos^{-1}(4x+1)}$$

الحل : $$(4)\ \frac{-1}{\sqrt{1-(4x+1)^2}}\, f'(x)=e^{\cos^{-1}(4x+1)}$$

$$(5)\quad f(x)=\ln\left|e^{5x}+\sec^{-1}(3x)\right|$$

الحل : $$f'(x)=\frac{e^{5x}\,(5)+\frac{1}{3x\sqrt{(3x)^2-1}}\,(3)}{e^{5x}+\sec^{-1}(3x)}$$

$$(6)\quad f(x)=\left(5^x+\tan^{-1}(2x+1)\right)^5$$

الحل :

$$f'(x)=5\left(5^x+\tan^{-1}(2x+1)\right)^4\left(5^x\ln 5+\frac{1}{1+(2x+1)^2}\,(2)\right)$$

تكامل الدوال المثلثية العكسية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c \quad , \quad |x|<a \quad (1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c \quad , \quad |f(x)|<a$$

مثال : $\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}\,dx$

الحل : $\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4^2-(x^2)^2}}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{4^2-(x^2)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c \quad (2)$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$

مثال : $\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$

الحل : $\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{3^2+(x^3)^2}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{3^2+(x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{3}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad , \quad |x| > a \quad (3)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c \quad , \quad |f(x)| > a$$

مثال : $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}\,dx$

الحل : $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x^2-2x+1)-4}}\,dx$

$$= \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-2^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية

مثال :

$$(1)\quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx = \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1^2-(\ln x)^2}}\,dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\ln x}{1}\right) + c = \sin^{-1}(\ln x) + c$$

مثال :

$$(2)\quad \int \frac{e^{2x}}{25+e^{4x}}\,dx$$

الحل : $$\int \frac{e^{2x}}{25+e^{4x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{5^2+\left(e^{2x}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}\,(2)}{5^2+\left(e^{2x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\tan^{-1}\left(\frac{e^{2x}}{5}\right)+c$$

مثال :

$$(3)\int \frac{\sin x}{\sqrt{25-\cos^2 x}}\,dx$$

الحل : $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{25-\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{5^2-(\cos x)^2}}\,dx$

$$= \frac{1}{-1}\int \frac{-\sin x}{\sqrt{5^2-(\cos x)^2}}\,dx = -\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{5}\right)+c$$

مثال :

$$(4) \int \frac{1}{x^2+6x+25}\, dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x^2+6x+25}\, dx = \int \frac{1}{(x^2+6x+9)+16}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{(x+3)^2+4^2}\, dx = \frac{1}{4}\, \tan^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right) + c$$

مثال :

$$(5) \quad \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

الحل : $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + c$$

مثال :

$$(6)\ \int \frac{x+2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

الحل : $\displaystyle \int \frac{x+2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx + \int \frac{2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

$$= \frac{1}{-2}\int \left(16-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{-2}\,\frac{\left(16-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

مثال :

$$(7)\ \int \frac{x+\tan^{-1}x}{x^2+1}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{x+\tan^{-1}x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{\tan^{-1}x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \left(\tan^{-1}x\right)^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{\left(\tan^{-1}x\right)^2}{2} + c$$

مثال :

$$(8) \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-36}}\,dx$$

الحل : $$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-36}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2-6^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{e^x}{e^x\sqrt{(e^x)^2-6^2}}\,dx = \frac{1}{6}\,\sec^{-1}\left(\frac{e^x}{6}\right)+c$$