حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الأول

- مقدمــــة
- الـــدوال في عـــدة مـــتغيرات
- النـــهايات والاتـــصال
- الاشـــتقاق الجزئــــي
- قاعدة السلسلة
- **القيم العظمى والصغرى لدوال في عدة متغيرات**

القيم العظمى والصغرى لدوال في عدة متغيرات

Extrema Values For Functions Of Several Variables

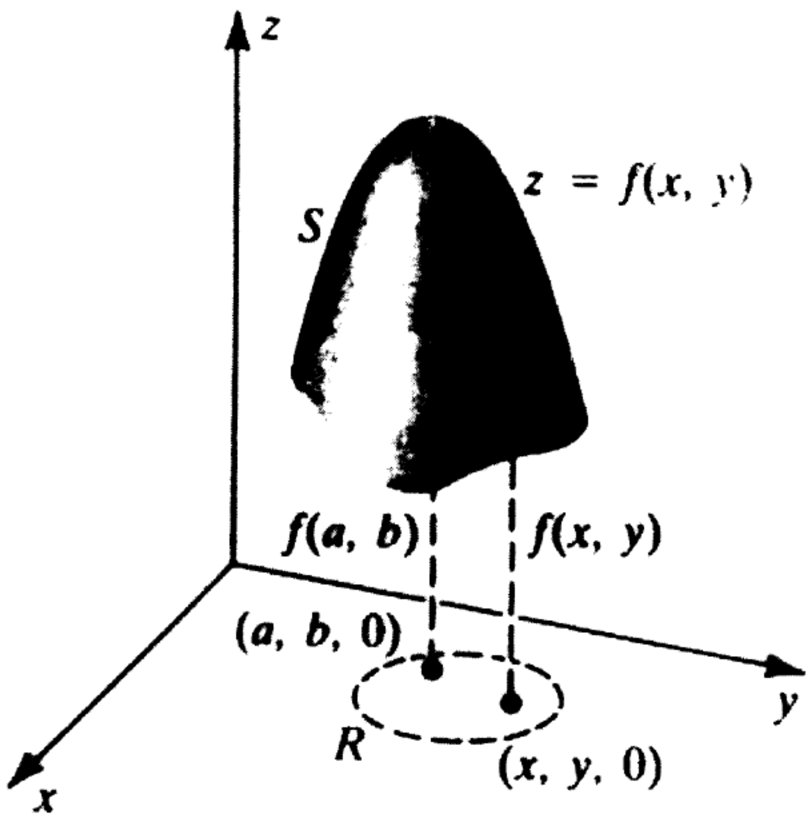
(١-١٤-١) تعريف

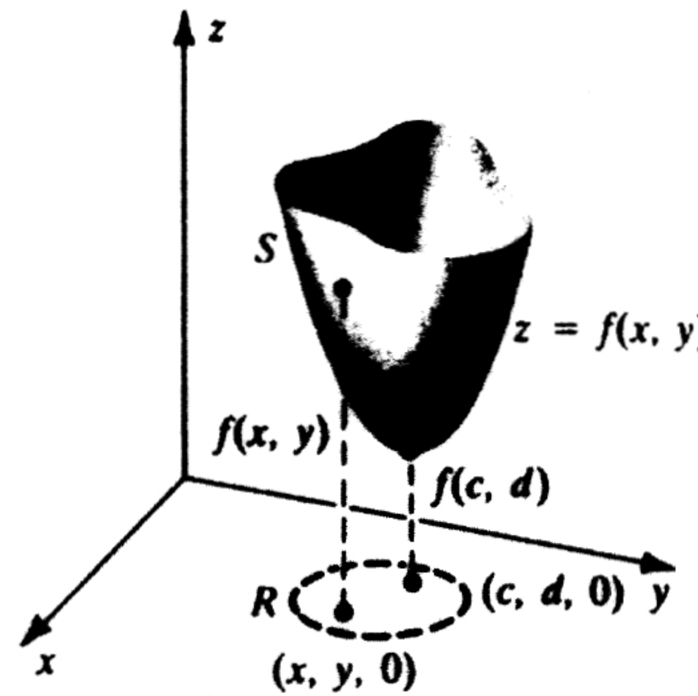
لتكن f دالة في المتغيرين x و y . نقول إن

(أ) f لها قيمة عظمى محلية (Local maximum) عند النقطة (a,b) إذا وجد مستطيل مفتوح R مركزه (a,b) (أو قرص مفتوح R مركزه (a,b)) بحيث يكون $f(x,y) \le f(a,b)$ لكل $(x,y) \in R$.

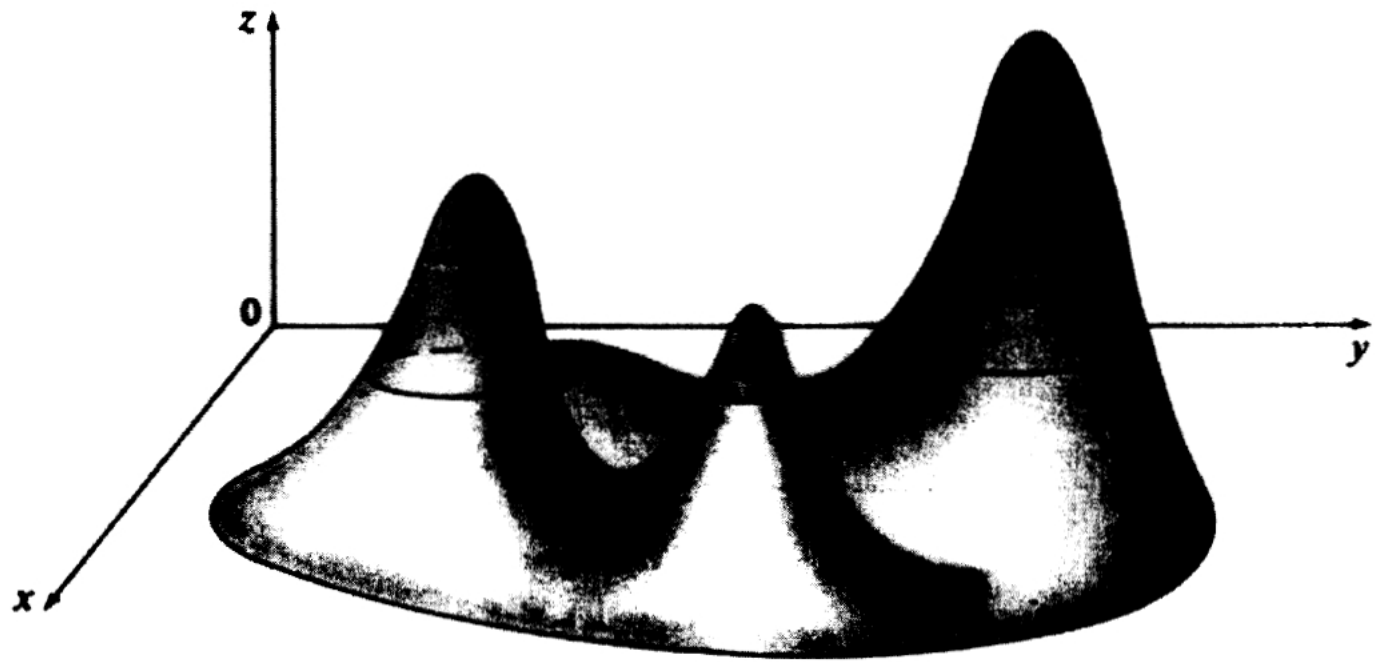
(ب) f لها قيمة صغرى محلية (Local minimum) عند النقطة (c,d) إذا وجد مستطيل مفتوح R مركزه (c,d) (أو قرص مفتوح R مركزه (c,d)) بحيث يكون $f(x,y) \ge f(c,d)$ لكل $(x,y) \in R$.

تسمى القيم العظمى والصغرى المحلية بالقيم القصوى المحلية (Local extrema).


z
S
z = f(x, y)
f(a, b)
f(x, y)
(a, b, 0)
R
(x, y, 0)
x
y


z
S
z = f(x, y)
f(x, y)
f(c, d)
R
(c, d, 0)
(x, y, 0)
x
y

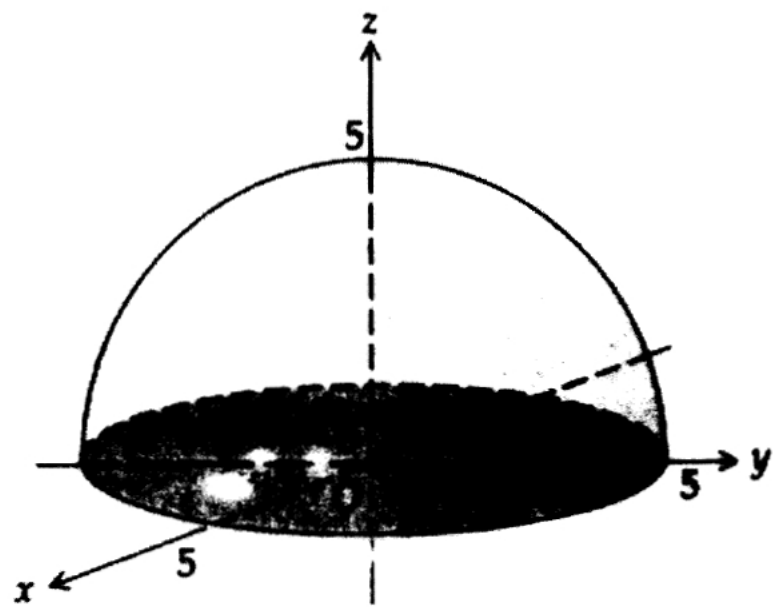
أما الشكل فهو يوضح أن القيم العظمى المحلية تقابل قمم الجبال والقيم الصغرى المحلية تقابل قاع الوديان.



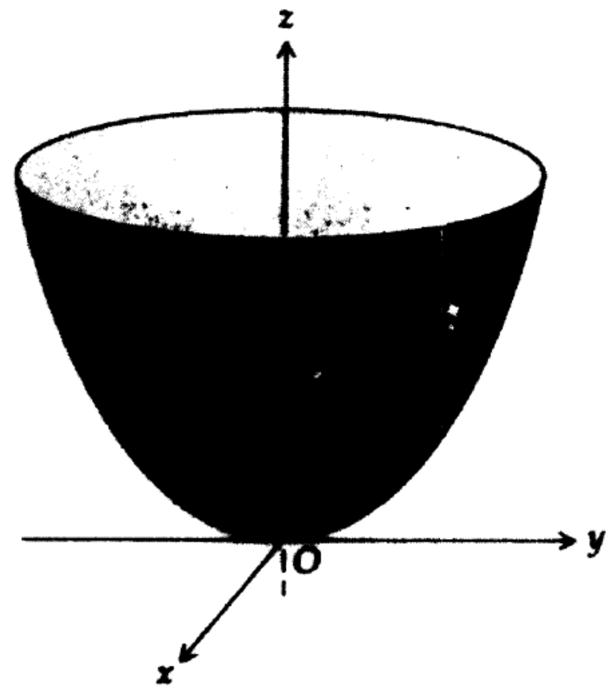
وبطريقة مماثلة نعرّف القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $w = f(x, y, z)$.

مثال

أ) إن السطح $z = f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ يمثل النصف العلوي لسطح كـــرة مركزهـــا $(0,0,0)$ ونصف قطرها 5 . وإذا أخذنا أي قرص دائري مفتوح B مركزه $(0,0)$ ونصف قطره r ، حيث $r \le 5$ فإنه وحسب التعريف (١-١٤-١)(أ) يكون للدالة f قيمـــة عظمـــى محليـــة وتساوي 5 عند النقطة $(0,0)$ ، كما هو موضح بالشكل



ب) إن السطح $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ يمثل مجسم قطع مكافئ . لنأخذ B قـــرص مفتـــوح مركزه $(0,0)$ ونصف قطره r ، وحسب التعريف (١-١٤-١)(ب) يكون للدالة قيمـــة صـــغرى محلية تساوي 0 عند النقطة $(0,0)$ ، كما هو موضح بالشكل



(١-١٤-٢) تعريف

لتكن f دالة في المتغيرين x و y . نقول إن

(أ) f لها قيمة عظمى مطلقة (Absolute maximum) عند النقطة (a,b) إذا كانت

$f(x,y) \le f(a,b)$ لكل $(x,y) \in D$.

(ب) f لها قيمة صغرى مطلقة (Absolute minimum) عند النقطة (c,d) إذا كانت

$f(x,y) \ge f(c,d)$ لكل $(x,y) \in D$.

تسمى القيم العظمى والصغرى المطلقة بالقيم القصوى المطلقة (Absolute extrema).

(١–١٤–٣) تعريف

لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$. نقول إن

(ا) D مجموعة محدودة (Bounded) إذا وجد مستطيل مفتوح أو قرص مفتـــوح R بحيـــث إن $D \subset R$.

(ب) D مغلقة (Closed) إذا كانت D اتحاد النقاط الداخلية للمجموعة D

(١–١٤–٤) تعريف

لتكن f دالة في المتغيرين x و y . نقول إن (a,b) هي نقطة حرجـــة (Critical points) للدالة f إذا تحققت إحدى الحالتين التاليتين :

١) $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$.

٢) $f_x(a,b)$ أو $f_y(a,b)$ غير موجودة .

نظرية (١-١٤-٥)

إذا كان للدالة $f(x, y)$ قيمة قصوى محلية عند (x_0, y_0) وكانت كل من $f_x(x_0, y_0)$ و $f_y(x_0, y_0)$ موجودة فإن :

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

مثال

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $z = f(x,y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$

الحل

بما أن المشتقتين للدالة f من الرتبة الأولى موجودتان لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، لذلك نستطيع استخدام النظرية (١-٧-٥) فنجد أن

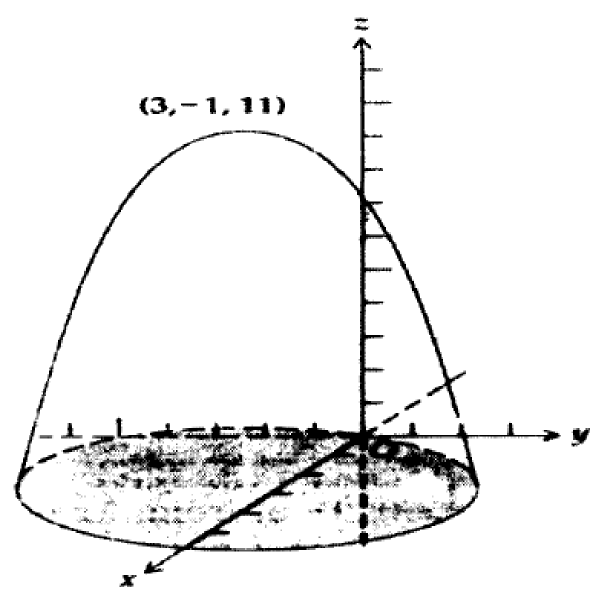
$$f_x(x,y) = 6 - 2x \quad , \quad f_y(x,y) = -4 - 4y$$

بوضع $f_x(x,y) = 0$ ، وكذلك $f_y(x,y) = 0$ نجد أن :

$$-4 - 4y = 0 \quad \text{و} \quad 6 - 2x = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $(3,-1)$ هي النقطة الحرجة للدالة f .

لكن السطح $z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$ يمثل مجسم قطع مكافئ مقعر نحو الأسفل ، ورأسه النقطة $V(3,-1,11)$ ، ومنه $f(3,-1) = 11$ $f(x, y) \le f(3,-1) = 11$ لكل $(x, y) \in \mathbb{R}$ وحسب التعريف (١-١٤-١) نجد أن $f(3,-1) = 11$ هي قيمة عظمى محلية كما هو موضح بالشكل

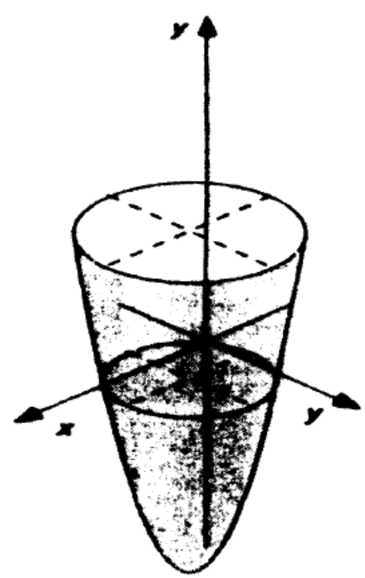


مثال

أوجد النقاط الحرجة والقيم القصوى المحلية للدالة $z = f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 4y$.

الحل

لدينا $f_x(x,y) = 2x - 6$ و $f_y(x,y) = 2y - 4$ ، إن النقاط الحرجة تنتج من حل المعادلتين $f_x(x,y) = 0$ و $f_y(x,y) = 0$ ، وبالتالي يوجد فقط نقطة حرجة واحدة هي $(3,2)$ كما أن $f(3,2) = -13$. لكن الدالة $z = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 13$ ، وهي معادلة مجسم قطع مكافئ رأسه النقطة $(3,2,-13)$ ، ومقعر نحو الأعلى . أي أن $f(x,y) \geq f(3,2) = -13$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، وحسب التعريف (١-١٤-١) نجد أن $f(3,2) = -13$ تمثل قيمة صغرى محلية كما هو موضح بالشكل



نظرية (١-١٤-٧)

إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة على قرص مفتوح R مركزه (a,b) وأن $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$. لنعرّف الدالة التالية :

$$g(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-(f_{xy}(x,y))^2$$ فإن :

١) للدالة f قيمة عظمى محلية عند (a,b) إذا كانت :

$$g(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2>0$$ و $f_{xx}(a,b)<0$.

٢) للدالة f قيمة صغرى محلية عند (a,b) إذا كانت :

$$g(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2>0$$ و $f_{xx}(a,b)>0$.

٣) للدالة f نقطة سرجية (a,b) إذا كانت :

$$g(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2<0$$

٤) الاختبار يفشل إذا كانت $g(a,b)=0$.

مثال

إذا كانت $z = f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x + xy^2$

١) أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة .

٢) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك السرجية إن وجدت للدالة f .

الحل

(١) $f_x(x, y) = x^2 - 1 + y^2$ و $f_y = 2xy$

لنجد الآن النقاط (x, y) التي تحقق المعادلتين

$$x^2 - 1 + y^2 = 0 \quad (١١)$$

$$2xy = 0 \quad (١٢)$$

من المعادلة (١٢) لدينا : إما $x=0$ ومنه $y^2=1$ إذاً $y=\mp 1$ أي أن $(0,1)$ ، $(0,-1)$ تحقق المعادلتين (١١) ، (١٢) . وإما $y=0$ ومنـــه $x^2=1$. إذاً $x=\mp 1$ أي أن $(1,0)$ ، $(-1,0)$ تحقق المعادلتين (١١) ، (١٢) . وبالتالي تكون النقاط الحرجة للدالة f هي: $(0,+1)$ ، $(0,-1)$ ، $(1,0)$ ، $(-1,0)$.

٢) لدينا $f_{xx}=2x, f_{yy}=2x, f_{xy}=2y$ إذاً :

$$g(x,y)=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=4x^2-4y^2$$

(أ) عند النقطة $(1,0)$ لدينا

$$g(1,0)=4>0$$

$$f_{xx}(1,0)=2>0$$

لذلك فإن $f(1,0)=\dfrac{-2}{3}$ قيمة صغرى محلية .

(ب) عند النقطة $(-1,0)$ لدينا

$$g(-1,0) = 4 > 0$$

$$f_{xx}(-1,0) = -2 < 0$$

وبالتالي فإن $f(-1,0) = \frac{2}{3}$ قيمة عظمى محلية .

(ج) عند النقطة $(0,1)$ لدينا

$$g(0,1) = -4 < 0$$

وبالتالي فإن $(0,1)$ هي نقطة سرجية .

(د) عند النقطة $(0,-1)$ لدينا :

$$g(0,-1) = -4 < 0$$

ولذلك فإن $(0,-1)$ نقطة سرجية أيضاً .

مثال

أوجد النقاط الحرجة للدالة : $z = f(x,y) = x^4 + y^2$ ، ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية والنقاط السرجية للدالة f إن وجدت .

الحل

بحل المعادلتين

$$f_y(x,y) = 2y = 0 \quad \text{و} \quad f_x(x,y) = 4x^3 = 0$$

نجد أن النقطة الحرجة الوحيدة هي $(0,0)$.

ولكن

$$f_{xx} = 12x^2 \quad , \quad f_{yy} = 2 \quad , \quad f_{xy} = 0$$

ومنه فإن

$$g(x,y) = 24x^2$$

وبالتالي نجد أن

$$g(0,0) = 0$$

وعليه فالنظرية (١-١٤-٧) لا تعطينا أي معلومات ، لذلك نعود إلى تعريف القيم القصوى المحليــة نأخذ قرص D مفتوح مركزه $(0,0)$ ونصف قطره $r>0$ فنجد

$$f(x,y)=x^4+y^2 \geq f(0,0)=0 \qquad \text{لكل} \quad (x,y)\in D$$

أي أن $f(0,0)=0$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f .

مثال

أوجد القيم القصوى المحلية إن وجدت ، للدالة $z = f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$.

الحل

نجد أولاً النقاط الحرجة للدالة f ، وذلك بإيجاد (x,y) التي تحقق المعادلتين التاليتين

$$f_x(x,y) = 8x^3 - 2x = 0 \quad \text{و} \quad f_y(x,y) = 2y - 2 = 0$$

بحل المعادلتين نجد أن النقاط الحرجة هي : $(\frac{-1}{2},1)$ ، $(\frac{1}{2},1)$ ، $(0,1)$.

بما أن.

$$f_{xx}(x,y) = 24x^2 - 2 \quad , \quad f_{yy} = 2 \quad , \quad f_{xy} = 0$$

فإن

$$g(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4(12x^2 - 1)$$

(أ) عند النقطة $(0,1)$ لدينا

$$g(0,1) = -4 < 0$$

أي أن النقطة $(0,1)$ هي نقطة سرجية و أن $f(0,1) = -1$ ليست قيمة قصوى محلية .

(ب) عند النقطة $(\frac{-1}{2},1)$ لدينا

$$f_{xx}(\frac{-1}{2},1) = 4 > 0 \quad ، \quad g(\frac{-1}{2},1) = 8 > 0$$

وبالتالي فإن $f(\frac{-1}{2},1) = \frac{-9}{8}$ قيمة صغرى محلية .

(ج) عند النقطة $(\frac{1}{2},1)$ لدينا

$$f_{xx}(\frac{1}{2},1) = 4 > 0 \quad ، \quad g(\frac{1}{2},1) = 8 > 0$$

بالتالي $f(\frac{1}{2},1) = \frac{-9}{8}$ قيمة صغرى محلية أيضاً.

مضاريب لاجرانج
Lagrange multipliers

(١-١٤-٩) نظرية (نظرية لاجرانج مع قيد واحـــد) (Lagrange's theory with one constraint)

لتكن f و g دالتين في المتغيرين x و y ولنفرض أن المـــشتقات الجزئيـــة مـــن الرتبـــة الثانيـــة للدالتين f و g متصلة على مجال تعريفهما ، ولنفرض أيضاً أن $f(x_0, y_0)$ هي قيمة قـــصوى للدالة f عندما تكون (x, y) مقيّدة على المنحنى $g(x, y) = 0$. فإذا كانت

$$\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$$

فإنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث يكون

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

نستنتج من النظرية (١-١٤-٩) أنه إذا كانت للدالة f قيمة قصوى عند (x_0, y_0) مع القيد $g(x, y) = 0$ فإن (x_0, y_0) يجب أن تحقق المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \qquad (**) \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

مثال

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x, y) = xy$ إذا كانت (x, y) مقيّدة على المنحنى

$$g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

الحل

من المعادلات في (**) نحصل على

١) $x = 2\lambda y$ ، ٢) $y = 8\lambda x$ ، ٣) $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ (١٣)

لنجد حل هذه المعادلات .

بالتعويض من (٢) في (١) لدينا

$$x = 2\lambda y = 2\lambda(8\lambda x)$$

مثال

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x, y) = xy$ إذا كانت (x, y) مقيّدة على المنحنى

$$g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

الحل

من المعادلات في (**) نحصل على

١) $x = 2\lambda y$ ، ٢) $y = 8\lambda x$ ، ٣) $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ (١٣)

لنجد حل هذه المعادلات .

بالتعويض من (٢) في (١) لدينا

$$x = 2\lambda y = 2\lambda(8\lambda x)$$

إذاً $x = 16\lambda^2 x$ أو $x(1-16\lambda^2) = 0$

وهذا يعني أن $x = 0$ أو أن $\lambda = \mp\frac{1}{4}$

فإذا كانت $x = 0$ فبالتعويض في المعادلة (٣) نجد أن $y = \mp 2$ ، ولكن لا يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث تكون $x = 0$ ، $y = \mp 2$ في نفس الوقت تحقق λ المعادلات (١) ، (٢) و (٣) ومنه فإنه لا يمكن أن تكون كل من $f(0,2)$ و $f(0,-2)$ قيمة قصوى للدالة f على القيد $g(x,y) = 0$. أما إذا كانت $\lambda = \mp\frac{1}{4}$ فإن

$$y = 8\lambda x = 8x(\mp\frac{1}{4}) = \mp 2x$$

نعوض أيضاً في المعادلة (٣) فنجد أن :

$$4x^2 + 4x^2 - 4 = 0$$

ومنه فإن

$$x = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

فإذا كانت $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $y = \mp\sqrt{2}$

أما إذا كانت $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ فإن $y = \mp\sqrt{2}$

وهكذا فإن للدالة f قيم قصوى عند النقاط $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp 2)$ ، $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \mp\sqrt{2})$

أن القيمة العظمى للدالة f هي 1

$$f(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}) = 1$$

وأن القيمة الصغرى للدالة f هي -1 ، كما أن :

$$f(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}) = -1$$

وذلك على القيد $g(x, y) = 0$.

أوجد أبعاد المستطيل الذي يمكن رسمه داخل دائرة مركزها $(0,0)$ ، ونصف قطرها 1 بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.

إذاً $x=16\lambda^2 x$ أو $x(1-16\lambda^2)=0$

وهذا يعني أن $x=0$ أو أن $\lambda=\mp\frac{1}{4}$

فإذا كانت $x=0$ فبالتعويض في المعادلة (٣) نجد أن $y=\mp 2$ ، ولكن لا يوجد $\lambda\in\mathbb{R}$ بحيث تكون $x=0$ ، $y=\mp 2$ في نفس الوقت تحقق λ المعادلات (١) ، (٢) و (٣) ومنه فإنه لا يمكن أن تكون كل من $f(0,2)$ و $f(0,-2)$ قيمة قصوى للدالة f على القيد $g(x,y)=0$. أما إذا كانت $\lambda=\mp\frac{1}{4}$ فإن

مثال

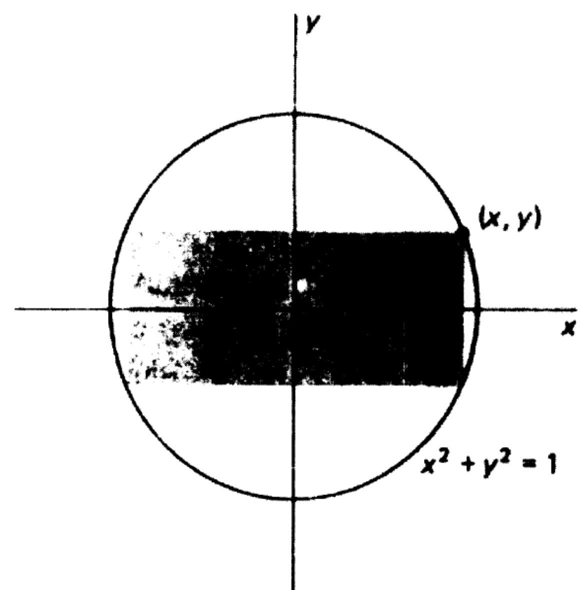
أوجد أبعاد المستطيل الذي يمكن رسمه داخل دائرة مركزها $(0,0)$ ، ونصف قطرها 1 بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل

بسبب تناظر المستطيل بالنسبة للمحاور الإحداثية ، فإن مساحة المستطيل هي

$$f(x,y)=4xy$$

كما هو موضح بالشكل حيث أن (x,y) مقيّدة على محيط الدائرة :



من (**) ، فإن

$$4y = 2\lambda x$$
$$4x = 2\lambda y$$
$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

وحيث أن أبعاد المستطيل لا تساوي صفرا، فإن $x \neq 0$ و $y \neq 0$ وبالتالي فإن

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

إذاً لدينا $y^2 = x^2$ ، وحيث أن (x, y) واقعة في الربع الأول ، لذا فإن $y = x$ ، وبــالتعويض في معادلة الدائ ة نجد أن

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي فإن مساحة المستطيل تساوي 2 وحدة مربعة ،كما أن هذه المساحة هي أكبر ما يمكن لأنــه إذاً أخذنا مستطيل آخر رؤوسه تقع على محيط الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ ، ولتكن أحد رؤوسه والواقع

في الربع الأول $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، ويكون مساحة المستطيل تساوي $\sqrt{3}$ وهكـــذا نلاحـــظ أن طريقـــة لاجرانج محدّدة فقط القيم القصوى بدون تحديد القيم العظمى أو القيم الصغرى ، لـــذلك نـــستخدم بعض الطرق المناسبة لتحديد القيم العظمى أو الصغرى . في مثالنا هذا تكون المساحة أكبر ما يمكـــن عندما يكون لدينا مربع رؤوسه $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ ، $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ ، $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})$، $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})$.

أما القيمة العظمى للدالة $f(x,y)=4xy$ على القيد $x^2+y^2=1$ فهي :

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=2$$

والقيمة الصغرى للدالة f على نفس القيد فهي

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=f(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=-2$$

(١-١٤-١٠) نظرية (نظرية لاجرانج في ثلاثة متغيرات وبقيد واحد)

لتكن f و f دالتين في ثلاثة متغيرات ، ولنفرض أن مشتقات f ، g الجزئية من الرتبة الأولى متصلة على نطاقهما ولنفرض أيضاً أن $f(x_0, y_0, z_0)$ هي قيمة قصوى للدالة f عندما تكون (x, y, z) مقيدة على السطح $g(x, y, z) = 0$. فإذا فرضنا أن $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ فإنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث يكون :

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

نستنتج من النظرية (١-١٤-١٠) أنه إذا كانت للدالة f قيمة قصوى عند (x_0, y_0, z_0) مع القيد $g(x, y, z) = 0$ فإن (x_0, y_0, z_0) يجب أن تحقق المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \qquad (***)$$

مثال

إذا كانت $T(x,y,z)=20+2x+2y+z^2$ تمثل درجة الحرارة على سطح نصف الكرة $x^2+y^2+z^2=8$ أي $z\geq 0$. أوجد القيمة العظمى لدرجة الحرارة على سطح نصف هذه الكرة .

الحل

من (***) ، نحصل على

١) $2=2\lambda$ ٢) $2=2\lambda y$ ٣) $2=2\lambda z$ ٤) $x^2+y^2+z^2=8$.

من المعادلة (٣) لدينا $z(1-\lambda)$ ، وبالتالي إما $z=0$ أو $\lambda=1$. فإذا كان $z=0$ فإن $x^2+y^2=8$ ، $1=\lambda y$ ، $1=\lambda x$ وبالتالي فإن $x\neq 0$ ، $y\neq 0$ و $\lambda\neq 0$. ومنه فإن $y=x=\frac{1}{\lambda}$. بالتعويض في معادلة القيد نجد : $\frac{2}{\lambda^2}=8$ ، أي أن $\lambda=\mp\frac{1}{2}$

عندما $\lambda = \frac{1}{2}$ فإن $x = y = 2$ ، $z = 0$

عندما $\lambda = \frac{-1}{2}$ فإن $x = y = -2$ ، $z = 0$

وبالتالي فإن

$$f(2,2,0) = T(2,2,0) = 28$$

$$f(-2,-2,0) = T(-2,-2,0) = 12$$

أما إذا كانت $\lambda = 1$ فإن $x = y = 1$ وبالتعويض في معادلة القيد نجد

$$z^2 = 6 \quad \text{ومنه} \quad z = \mp\sqrt{6}$$

نأخذ فقط النقطة $(1,1,\sqrt{6})$ ونرفض النقطة $(1,1,-\sqrt{6})$ لأنها تقع في النصف الأسفل لسطح الكرة . ويكون لدينا

$$f(1,1,\sqrt{6}) = 20 + 2 + 2 + 6 = 30$$

أي أن القيمة العظمى لدرجة الحرارة هي $T(1,1,\sqrt{6}) = 30$.

تمـــارين

أوجد القيم القصوى المحلية للدوال الآتية ، ثم حدّد نوعية هذه القيم .

١) $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$

٢) $f(x,y)=x^3+3xy-y^3$

٣) $f(x,y)=4x^3-2x^2y+y^2$

٤) $f(x,y)=x^2+4y^2-x+2y$

٥) $f(x,y)=5+4x-2x^2+3y-y^2$

٦) $f(x,y)=x^4+y^2+32-9y$

٧) $f(x,y)=\dfrac{4y+x^2y^2+8x}{xy}$

٨) $f(x,y)=\dfrac{(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1}$

٩) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ حيث إن $0\le y\le 2\pi$ و $0\le x\le \pi$

١٠) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ حيث إن $0\le y\le \dfrac{\pi}{4}$ و $0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$

١٠) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ حيث إن $0\le y\le \frac{\pi}{4}$ و $0\le x\le \frac{\pi}{4}$

١١) $f(x,y)=\frac{x}{y^2}+xy$

١٢) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2+2x)}$

١٣) $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{8}{y}$

١٤) $f(x,y)=e^x\cos y$

١٥) $f(x,y)=x^3+y^3+3y^2-3x-9y+2$

١٦) $f(x,y)=x^4+y^4$

١٧) $f(x,y)=x^4+y^3+32x-9y$

١٨) $f(x,y)=(x+y)(xy+1)$

١٩) $f(x,y)=xe^x\sin y$

٢٠) $f(x,y)=x^4-y^4$

أوجد القيم القصوى للدوال الآتية ، حيث أن (x, y) مقيدة بالقيود المرافقة لكل دالـــة ، ثم حدّد نوعية القيم القصوى .

٤٩) $f(x,y) = x^2 + y$ على القيد $x^2 + y^2 = 9$

٥٠) $f(x,y) = 2x + y$ على القيد $x^2 + 4y^2 = 1$

٥١) $f(x,y) = x^2 + y^2$ على القيد $x^4 + y^4 = 1$

٥٢) $f(x,y) = 2x^2 + xy - y^2 + y$ على القيد $2x + 3y = 1$

٥٣) $f(x,y) = x^2 + y^2$ على القيد $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$