حساب التكامل

111 ريض

الأسبوع الثالث

الأهداف:

يتعرف الطالب عن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية و خواصها وكيفية استخدام الاشتقاق اللوغاريتمي لإيجاد مشتقة بعض الدوال

.حساب بعض التكاملات غير المحددة التي تكتب بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية

.يتعرف الطالب عن الدالة الأسية الطبيعية و خواصها

يتعلم الطالب اشتقاق و تكامل الدالة الأسية الطبيعية

باب 3
الدوال اللوغاريتمية والأسية

1.3 الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

2.3 الدالة الأسية الطبيعية

3.3 الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة

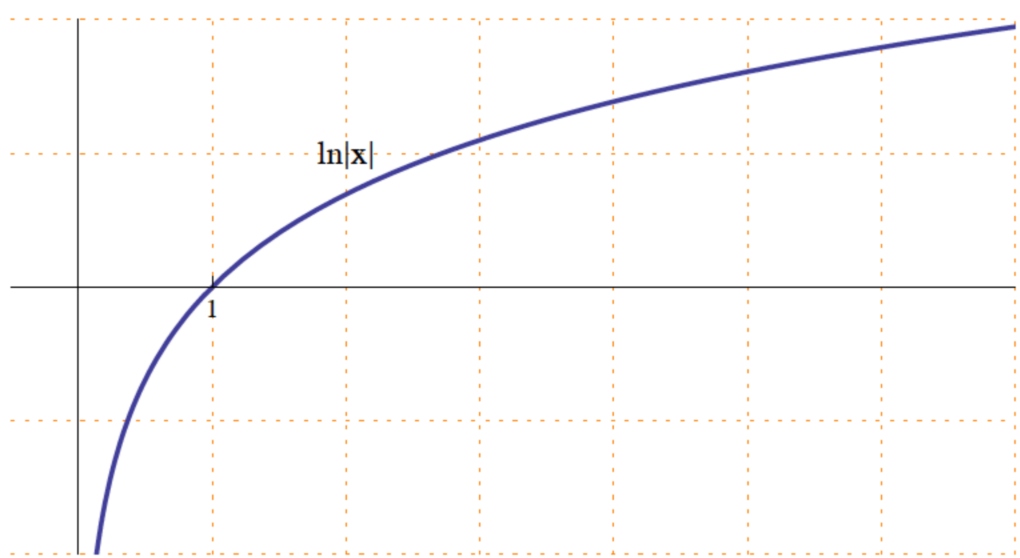
4.3 تكامل الدوال المثلثية العكسية

1.3 الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

تعريف : نرمز للدالة اللوغاريمية الطبيعية بالرمز $\ln(x)$ وتعرف كالتالي :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad \text{لكل} \quad x \in (0,\infty)$$

رسم الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :



ملاحظات هامة :

(1) مجال الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هو $(0, \infty)$

(2) $\ln(1) = 0$

(3) $\ln(x) > 0$ لكل $x > 1$

(4) $\ln(x) < 0$ لكل $0 < x < 1$

ملاحظات هامة :

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{لكل } x \in (0,\infty) \quad (1)$$

أي أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية دالة تزايدية

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad (3)$$

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

إذا كانت $x, y > 0$ وكانت $r \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad (2)$$

$$\ln\left(x^r\right) = r\ln(x) \quad (3)$$

اشتقاق الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال : أحسب مشتقات الدوال التالية

$$y = \sqrt{x}\ \ln|x| \quad (1)$$

الحل : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \ln|x| + \sqrt{x}\,\frac{1}{x}$

$$f(x) = \ln|x^2 + 3x - 1| \quad (2)$$

الحل : $$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1}$$

$$f(x) = \ln|\sin x + 5| \quad (3)$$

الحل : $$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 5}$$

$$f(x)=\frac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

الحل : $\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}\right|$

$$=\ln\left|(x^2+1)^5(x-8)^3\right|-\ln\left|(x^3-1)^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$=\ln\left|(x^2+1)^5\right|+\ln\left|(x-8)^3\right|-\ln\left|(x^3-1)^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$=5\ln|x^2+1|+3\ln|x-8|-\frac{3}{2}\ln|x^3-1|$$

باشتقاق الطرفين :

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=5\,\frac{2x}{x^2+1}+3\,\frac{1}{x-8}-\frac{3}{2}\,\frac{3x^2}{x^3-1}$$

$$f'(x)=f(x)\,\left[\frac{10x}{x^2+1}+\frac{3}{x-8}-\frac{3}{2}\,\frac{3x^2}{x^3-1}\right]$$

$$f'(x)=\left(\frac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}\right)\,\left[\frac{10x}{x^2+1}+\frac{3}{x-8}-\frac{3}{2}\,\frac{3x^2}{x^3-1}\right]$$

$$f(x) = (\sin x)^x \quad (5)$$

الحل : $\ln|f(x)| = \ln|(\sin x)^x| = x \ \ln|\sin x|$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1)\ \ln|\sin x| + x\ \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = f(x)\ \left[\ln|\sin x| + x\ \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$f'(x) = (\sin x)^x\ \left[\ln|\sin x| + x\ \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

تكامل الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+8}\,dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+8}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+8}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x+8| + c$$

$$\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2\sin x|+c$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int \left(\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$= \int \left(x+1+\frac{1}{x}\right)\,dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x|+c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}\,dx}\,dx = \int \frac{1}{x\;(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int (\ln x)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c$$

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| + c$$

تكاملات مهمة :

$$\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + c \quad (1)$$

$$\int \tan(f(x)) \; f'(x) \, dx = \ln|\sec(f(x))| + c$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c \quad (2)$$

$$\int \cot(f(x)) \; f'(x) \, dx = \ln|\sin(f(x))| + c$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c \quad (3)$$

$$\int \sec(f(x)) \; f'(x) \, dx = \ln|\sec(f(x)) + \tan(f(x))| + c$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c \quad (4)$$

$$\int \csc(f(x)) \; f'(x) \, dx = \ln|\csc(f(x)) - \cot(f(x))| + c$$

مثال : أحسب ما يلي

$$\int \tan(3x)\, dx \quad (1)$$

$$\int x \sec(x^2-3)\, dx \quad (2)$$

الحل :

$$(1) \qquad \int \tan(3x)\, dx = \frac{1}{3}\int \tan(3x)\,(3)\, dx = \frac{1}{3}\ln|\sec(3x)| + c$$

$$(2) \qquad \int x\sec(x^2-3)\, dx = \frac{1}{2}\int \sec(x^2-3)\,(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sec(x^2-3)+\tan(x^2-3)\right| + c$$

2.3 الدالة الأسية الطبيعية

تعريف : الدالة الأسية الطبيعية هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية الطبيعية ، نرمز للدالة الأسية الطبيعية بالرمز e^x حيث e عدد حقيقي غير نسبي

ملاحظات عامة :

(1) مجال الدالة الأسية الطبيعيه هو $\mathbb{R}$

(2) مدى الدالة الأسية الطبيعية هو الفترة $(0, \infty)$

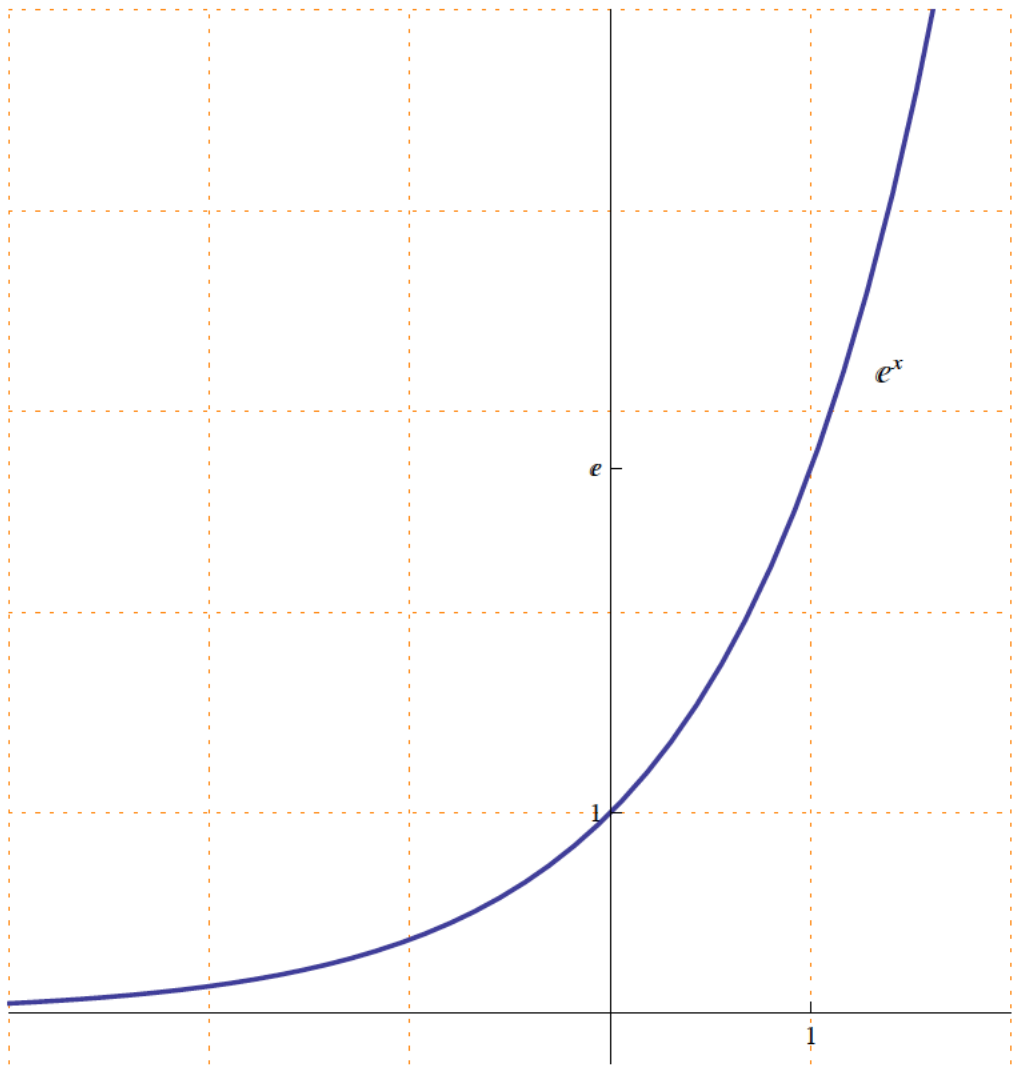
أي أن الدالة الأسية الطبيعية موجبة دائماً

(3) $e^0 = 1$ و $e \approx 2.718128$

(4) $\ln\left(e^x\right) = x$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وبالتالي $\ln(e) = 1$

$e^{\ln(x)} = x$ لكل $x \in (0, \infty)$

(5) رسم الدالة الأسية الطبيعية :



$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad (6)$$

بعض خواص الدالة الأسية الطبيعية :

إذا كانت $x, y \in \mathbb{R}$ فإن :

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad (1)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (2)$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad (3)$$

مثال (1) : أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $e^{x-1} = 3$

الحل : $e^{x-1} = 3 \Longrightarrow \ln\left(e^{x-1}\right) = \ln(3)$

$\Longrightarrow x - 1 = \ln(3) \Longrightarrow x = 1 + \ln(3)$

مثال (2) : أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\ln(x+2) = 5$

الحل : $\ln(x+2) = 5 \Longrightarrow e^{\ln(x+2)} = e^5$

$\Longrightarrow x + 2 = e^5 \Longrightarrow x = e^5 - 2$

إشتقاق الدالة الأسية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx}\, e^{x} = e^{x}$$

$$\frac{d}{dx}\, e^{f(x)} = e^{f(x)}\, f'(x)$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي :

$$f(x) = e^{x^2+x} \quad (1)$$

الحل : $f'(x) = e^{x^2+x}(2x+1)$

$$f(x) = e^{\sin x} + \frac{1}{e^x} \quad (2)$$

الحل : $f(x) = e^{\sin x} + e^{-x}$

$$f'(x) = e^{\sin x}\cos x + e^{-x}(-1)$$

$$f(x) = \left(e^{5x} + x^2\right)^3 \quad (3)$$

الحل : $f'(x) = 3\ \left(e^{5x} + x^2\right)^2 \left(e^{5x}(5) + 2x\right)$

$$f(x) = \ln\left|e^{\tan x} + 4x^3\right| \quad (4)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{e^{\tan x}\sec^2 x + 12x^2}{e^{\tan x} + 4x^3}$

تكامل الدالة الأسية الطبيعية :

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int e^{7x+1} \, dx \quad (1)$$

الحل : $\int e^{7x+1} \, dx = \frac{1}{7} \int e^{7x+1} (7) \, dx = \frac{1}{7} \, e^{7x+1} + c$

$$\int x \, e^{x^2-3} \, dx \quad (2)$$

الحل : $\int x \, e^{x^2-3} \, dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2-3} (2x) \, dx = \frac{1}{2} \, e^{x^2-3} + c$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx \quad (3)$$

الحل : $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$$= 2\int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = 2\, e^{\sqrt{x}} + c$$

$$\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\, dx \quad (4)$$

الحل : $\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\, dx = \int e^{\sin x} \frac{1}{\sec x}\, dx$

$$= \int e^{\sin x} \cos x\, dx = e^{\sin x} + c$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx \quad (5)$$

الحل : $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx = \int e^{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}\, dx$

$$= \int e^{\tan x}\sec^2 x\, dx = e^{\tan x} + c$$

$$\int_0^{\ln(5)} e^x\, dx \quad (6)$$

الحل : $\int_0^{\ln(5)} e^x\, dx = [e^x]_0^{\ln(5)} = e^{\ln(5)} - e^0 = 5 - 1 = 4$

$$\int e^{x}\cos\left(e^{x}\right)\,dx \quad (7)$$

الحل : $\int e^{x}\cos\left(e^{x}\right)\,dx = \int \cos\left(e^{x}\right)\,e^{x}\,dx = \sin\left(e^{x}\right) + c$

$$\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+4}\,dx \quad (8)$$

الحل : $\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+4}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{e^{5x}\,(5)}{e^{5x}+4}\,dx = \frac{1}{5}\,\ln\left|e^{5x}+4\right| + c$

$$\int \frac{e^{5x}}{\left(e^{5x}+4\right)^3}\,dx \quad (9)$$

الحل : $\int \frac{e^{5x}}{\left(e^{5x}+4\right)^3}\,dx = \int \left(e^{5x}+4\right)^{-3}\, e^{5x}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\int \left(e^{5x}+4\right)^{-3}\, e^{5x}\,(5)\,dx = \frac{1}{5}\,\frac{\left(e^{5x}+4\right)^{-2}}{-2} + c$$

$$\int \frac{e^{5\ln x}}{x^3}\,dx \quad (10)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{5\ln x}}{x^3}\,dx = \int \frac{e^{\ln x^5}}{x^3}\,dx = \int \frac{x^5}{x^3}\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$