حساب التكامل

111 ريض

الأسبوع الثاني

الأهداف:

- يتعلم الطالب مفهوم الدالة الأصلية.
- يتعلم الطالب كيفية استخدام المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل.
- يتعلم الطالب حساب التكامل غير المحدد باستخدام قائمة من التكاملات غير المحددة.
- يتعلم الطالب طريقة التكامل بالتعويض وكيفية استخدامها.

باب 2
التكامل غير المحدد

1.2 الدالة الأصلية

2.2 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

3.2 التكامل غير المحدد

4.2 التكامل بالتعويض

1.2 الدالة الأصلية

تعريف الدالة الأصلية :

نقول أن الدالة $G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ إذا كانت $G'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

مثال : أوجد الدالة الأصلية لكل دالة فيما يلي :

$$f(x) = 2x \quad (1)$$

$$f(x) = \cos x \quad (2)$$

$$f(x) = \sec^2 x \quad (3)$$

$$f(x) = \sec x \tan x \quad (4)$$

الحل :

$$G(x) = x^2 + c \quad (1)$$

$$G(x) = \sin x + c \quad (2)$$

$$G(x) = \tan x + c \quad (3)$$

$$G(x) = \sec x + c \quad (4)$$

حيث c عدد حقيقي ثابت

ملاحظة : إذا كانت $G_1(x)$ و $G_2(x)$ دالتان أصليتان للدالة $f(x)$ فإن $G_1(x) - G_2(x) = c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

2.2 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :
لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة متصلة

(1) إذا عرفنا الدالة $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ كالتالي : $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x \in [a,b]$ فإن

$G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$

أي أن $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a) \quad (2)$$

مثال (1) : أحسب ما يلي :

$$\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}\frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\sin t\,dt \quad (2)$$

مثال (1) : أحسب ما يلي :

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+x^2} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt = \sin x \quad (2)$$

مثال (2) : أحسب ما يلي :

$$\int_{1}^{2} 2x \, dx \quad (1)$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \quad (2)$$

مثال (2) : أحسب ما يلي :

$$\int_1^2 2x\,dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int_1^2 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^2 = (2)^2 - (1)^2 = 4 - 1 = 3 \quad (1)$$

لاحظ أن x^2 هي دالة أصلية للدالة $2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1 \quad (2)$$

لاحظ أن $\sin x$ هي دالة أصلية للدالة $\cos x$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت g دالة قابلة للاشتقاق ومداها محتوى في $[a, b]$ فإن

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f\left(g(x)\right)\, g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{3x^2} \sin t\,dt \quad (2)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{3x^2} \sin t\,dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{3x^2} \sin t\,dt = \sin(3x^2)\,(6x) \quad (2)$$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت g و h دالتان قابلتان للاشتقاق ومداهما محتوى في $[a, b]$ فإن

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f\left(h(x)\right)\,h'(x) - f\left(g(x)\right)\,g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{2x^2} \frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^4}\,dt \quad (2)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{2x^2}\frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{2x^2}\frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt=\frac{1-\left(2x^2\right)^2}{1+\left(2x^2\right)^4}(4x)-\frac{1-(\cos x)^2}{1+(\cos x)^4}(-\sin x) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt=\sqrt{1+\left(x^2\right)^4}\,(2x)-\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^4}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (2)$$

3.2 التكامل غير المحدد

تعريف : نرمز للتكامل غير المحدد للدالة f بالرمز $\int f(x)\,dx$ ويعرف كالتالي

$\int f(x)\,dx = G(x) + c$ حيث $G(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ و c عدد حقيقي ثابت

بعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$\int 1\,dx = x + c \quad (1)$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (2)$$ حيث $n \neq -1$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad (3)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad (4)$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c \quad (5)$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c \quad (6)$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c \quad (7)$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c \quad (8)$$

خواص التكامل المحدد :

$$\int m\, f(x)\, dx = m \int f(x)\, dx \quad (1)$$ حيث $m \in \mathbb{R}$

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx \quad (2)$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \left(7x^2 + 5\sqrt{x} \right)\, dx \quad (1)$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right)\, dx \quad (2)$$

$$\int \left(-4\cos x + 8\sec^2 x \right)\, dx \quad (3)$$

$$\int \left(3 + 4\sec x \tan x \right)\, dx \quad (4)$$

$$\int \left(7x^2 + 5\sqrt{x}\right)\, dx \quad (1)$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\, dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \left(7x^2 + 5\sqrt{x}\right)\, dx = \int 7x^2\, dx + \int 5\sqrt{x}\, dx \quad (1)$$

$$= 7\int x^2\, dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\, dx = 7\,\frac{x^3}{3} + 5\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\, dx = \int \frac{5}{x^4}\, dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\, dx = 5\int \frac{1}{x^4}\, dx - 2\int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx \quad (2)$$

$$= 5\int x^{-4}\, dx - 2\int x^{-\frac{1}{3}} = 5\,\frac{x^{-3}}{-3} - 2\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \left(-4\cos x + 8\sec^2 x\right)\ dx \quad (3)$$

$$\int \left(3 + 4\sec x \tan x\right)\ dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \left(-4\cos x + 8\sec^2 x\right)\ dx = \int -4\cos x\, dx + \int 8\sec^2 x\, dx \quad (3)$$

$$= -4\int \cos x\, dx + 8\int \sec^2 x\, dx = -4\sin x + 8\tan x + c$$

$$\int \left(3 + 4\sec x \tan x\right)\ dx = \int 3\, dx + \int 4\sec x \tan x\, dx \quad (4)$$

$$= 3\int 1\, dx + 4\int \sec x \tan x\, dx = 3x + 4\sec x + c$$

4.2 التكامل بالتعويض

نظرية : إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ وكانت f دالة متصلة على فترة J تحتوي مدى g وكانت F دالة أصلية للدالة f على J فإن :

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\, dx = F\left(g(x)\right) + c \quad \text{لكل } x \in [a,b]$$

مثال : حل التكامل التالي $\int (x^2+1)^{11} x\, dx$

الحل الأول : ضع $u = x^2 + 1$

عندئذ $du = 2x\, dx \Longrightarrow \frac{1}{2}\, du = x\, dx$

$$\int (x^2+1)^{11} x\, dx = \int u^{11}\, \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2} \int u^{11}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{u^{12}}{12} + c = \frac{1}{2}\, \frac{(x^2+1)^{12}}{12} + c$$

مثال : حل التكامل التالي $\int (x^2+1)^{11} x\, dx$

الحل الثاني : باستخدام $\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$

$$\int (x^2+1)^{11} x\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{11}(2x)\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{12}}{12} + c$$

تعميم لبعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$(1)\quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{حيث } n \neq -1$$

$$\int [f(x)]^n\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{حيث } n \neq -1$$

مثال :

$$\int \sqrt{x^2+2x}(x+1)\,dx$$

الحل : $\int \sqrt{x^2+2x}\,(x+1)\,dx = \int \left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}(x+1)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}\ [2(x+1)]\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}(2x+2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2+2x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad (2)$$

$$\int \cos\left(f(x)\right) \; f'(x) \, dx = \sin\left(f(x)\right) + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad (3)$$

$$\int \sin\left(f(x)\right) \; f'(x) \, dx = -\cos\left(f(x)\right) + c$$

مثال :

$$\int \cos(5x+7) \, dx$$

الحل : $\int \cos(5x+7)\,5\,dx \; \frac{1}{5}\int = \int \cos(5x+7) \, dx$

$$= \frac{1}{5}\sin(5x+7) + c$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c \quad (4)$$

$$\int \sec^2 (f(x)) \;\; f'(x) \, dx = \tan (f(x)) + c$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c \quad (5)$$

$$\int \csc^2 (f(x)) \;\; f'(x) \, dx = -\cot (f(x)) + c$$

مثال :

$$\int x \sec^2(x^2 + 2) \, dx$$

الحل : $$\int x \sec^2(x^2 + 2) \, dx = \frac{1}{2} \int \sec^2(x^2 + 2) \, (2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \tan(x^2 + 2) + c$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c \quad (6)$$

$$\int \sec(f(x)) \tan(f(x)) \; f'(x) \, dx = \sec(f(x)) + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c \quad (7)$$

$$\int \csc(f(x)) \cot(f(x)) \; f'(x) \, dx = -\csc(f(x)) + c$$

مثال :

$$\int \sec(6x-2) \tan(6x-2) \, dx$$

الحل : $$\int \sec(6x-2) \tan(6x-2) \, dx = \frac{1}{6} \int \sec(6x-2) \tan(6x-2) \, (6) \, dx$$

$$= \frac{1}{6} \sec(6x-2) + c$$