حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الرابع

متسلسلات القوى

POWER SERIES

- مــقــدمــة
- التقريب بكثيرات الحـدود ونظريـة تـايلور
- مــقــدمــة لمتسلسلات القوى
- تمثيل الدوال بمتسلسلات القوى
- متسلسلة تايلور
- متسلسلة ذات الحدين

تمثيل الدوال بمتسلسلات القوى

Power Series Representations Of Functions

تحدد متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دالة f نطاقها فترة تقارب المتسلسلة . لكل x في فترة تقارب المتسلسلة نعرف الدالة $f(x)$ بأنها

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ويقال في هذه الحالة أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تمثل الدالة f ، أو أن الدالة f مثلت بمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

مثال

أوجد الدالة الممثلة بمتسلسلة القوى : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

الحل

إذا كانت $|x| < 1$ ، فمن نظرية (٣-٧-١) المتسلسلة الهندسية المعطاة متقاربة ومجموعها

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

وبالتالي

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (١)$$

أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ تمثل الدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ في الفترة $(-1,1)$

يمكن استخدام متسلسلة القوى في (١) للحصول على متسلسلات قوى يمكن تحديد مجموعها. بوضع $-x$ بدلا من x في (١) نحصل على

$$|x|<1 ، \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (٢)$$

بوضع x^2 بدلا من x في (١) نحصل على

$$|x|<1 ، \frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} \quad (٣)$$

إذا وضعنا $-x^2$ عوضا عن x ، ينتج

$$|x|<1 ، \frac{1}{1-x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad (٤)$$

مثال

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $f(x)=\dfrac{5}{3-7x}$.

الحل

نكتب $f(x)$ على الصيغة : $f(x)=\dfrac{5}{3-7x}=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{1-(7/3)x}\right)$

نضع $(7/3)x$ بدلا من x في (١) نحصل على

$$f(x)=\frac{5}{3-7x}=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{1-(7/3)x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3}\left((7/3)x\right)^{n} \text{ ، } |x|<3/7 .$$

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ دالة. فيمكننا طرح التساؤل، هل مشتقتها موجودة ؟ سنرى أن متسلسلة القوى ذات نصف قطر تقارب لا يساوي الصفر دائما قابلة للاشتقاق ، وأكثر من ذلك فإننا نحصل على المشتقة باشتقاق حدا ـــ حدا تماما كما نفعل في إيجاد مشتقة كثيرة الحدود.

(٤–٦–١) نظرية (نظرية الاشتقاق لمتسلسلات القوى)

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى ذات نصف قطر تقارب $r>0$. ولتكن $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لكل x في فترة تقارب المتسلسلة . فإن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_n x^n)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

لكل $|x|<r$. وأكثر من ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ لها نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

مثال

اثبت أن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (٥)$$

الحل

نعلم من مثال (٢) فصل (٤-٢) أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل x . من نظرية الاشتقاق فإن

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}$ متقاربة لكل x وأن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

نعرف f بأنها $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ لكل x ، فإن (٥) يمكن إعادة كتابتها على الصيغة $f`(x)=f(x)$ لكل x . وبما أن $f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!}=1$. نستنتج أن $f(x)=e^x$ لكل x .

ومنه

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (٦)}$$

لاحظ أن (٦) تمكننا من التعبير عن العدد e كمجموع لمتسلسلة قوى متقاربة ذات حدود موجبة.

أي : $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

أيضا يمكننا استخدام (٦) للحصول على تمثيل لبعض الدوال بمتسلسلات قوى ، نورد بعضا منها

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$e^{-x}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{x^2}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

بجمع الحدود المتناظرة للمتسلسلتين e^x و e^{-x} نحصل على

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \cdots + 2\frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

ومنه نحصل على متسلسلة قوى تمثل الدالة $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^x)$، أي

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

أيضا نستطيع أن نجد متسلسلة قوى تمثل الدالة $\sinh x$ إما باستخدام الصيغة $\frac{1}{2}(e^x - e^x)$، أو باشتقاق حدود متسلسلة $\cosh x$. وسنترك ذلك كتمرين للبرهنة على أن

$$.\sinh x = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مثال

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $f(x) = xe^{-2x}$.

الحل

نضع $-2x$ بدلا من x في (٦) نحصل على: $e^{-2x} = \sum_{0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^n}{n!}$

بضرب الطرفين بـــ x نحصل على : $xe^{-2x} = \sum_{0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$

(٤-٦-٢) نظرية (التكامل لمتسلسلات القوى)

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r > 0$. ولتكن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

لكل x في فترة تقارب المتسلسلة. فإن

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

لكل $-r < x < r$. وأكثر من ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ لها نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

مثال

اثبت أن

$$\arctan x = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (٧)$$

لكل $-1 < x < 1$.

الحل

من مثال (١) في هذا الفصل نعلم أن

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \qquad (٨)$$

إذا كانت $|t|<1$ فإن $|t^2|<1$. وبالتالي يمكننا التعويض بـــ t^2 بدلا من t في (٨) نحصل على

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$ لكل $|t|<1$.

من نظرية التكامل للمتسلسلات فإن

$$\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n})\ dt=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

لكل $|x|<1$.

يمكن إثبات أن هذه المتسلسلة متقاربة أيضا عندما $x=\pm 1$. تسمى المتسلسلة

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

بمتسلسلة جريجوري (Gregory's Series) نسبة إلى عالم الرياضيات الاسكتلندي جيمس جريجوري (James Gregory). بوضع $x = 1$ نحصل على الصيغة التالية لقيمة $\pi/4$

$$.\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

والتي تسمى في غالب الأحيان بمتسلسلة لبنتز (Leibniz).

مثال

اثبت أن

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \qquad (١١)$$

لكل x ، حيث $|x| < 1$.

الحل

إذا كانت $|x| < 1$ فإن

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x [\sum_0^\infty (-1)^n t^n]\, dt$$

$$= \sum_0^\infty \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

لكل x ، حيث $|x| < 1$.

مثال

لتكن g دالة معرفة

$$g(t)=\begin{cases} e^{t}-1\big/t & ; \ t\neq 0 \\ \\ 1 & ; \ t=0 \end{cases}$$

(أ) اثبت أن g متصلة عند 0.

(ب) أوجد متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ التي تمثل الدالة

$$\int_0^x g(t)\,dt$$

الحل

فقط سنثبت فقرة (ب). من المعادلة (٦) فإن

$$e^{t}-1=t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

$$\frac{e^t - 1}{t} = 1 + \frac{t}{2!} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{n!} + \cdots$$

بما أن متسلسلة القوى هذه لها القيمة 1 عند $t = 0$ وبما أن $g(0) = 1$ فإن

$$g(t) = 1 + \frac{t}{2!} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{n!} + \cdots$$

لكل t. بتطبيق نظرية التكامل للمتسلسلات، ينتج

$$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_1^\infty \frac{t^{n-1}}{n!}\right) dt = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n(n!)}$$

$$= x + \frac{x^2}{2(2!)} + \frac{x^3}{3(3!)} + \cdots + \frac{x^n}{n(n!)} + \cdots$$

وبالتالي فإن متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $\int_0^x g(t)\,dt$ هي $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$، حيث $a_n = \frac{1}{n(n!)}$.

متسلسلة تايلور
Taylor Series

بينا أن

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} \qquad \text{لكل } x \qquad (١)$$

$$\ln(1+x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \qquad \text{لكل } -1 < x < 1 \qquad (٢)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \text{لكل } -1 < x < 1 \qquad (٣)$$

في الحالات الثلاث، نقول أن لدينا متسلسلة قوى تمثل الدالة المعطاة. بشكل أعم إذا كانت f دالة، و I فترة مفتوحة تحتوي 0 ، وكانت

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \quad \text{لكل } x \text{ في } I$$

إذا كانت f دالة معطاة، نريد تحديد ما إذا كانت هناك متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ وفترة مفتوحة I تحتوي 0 بحيث أن

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{لكل } x \text{ في } I \qquad (٤)$$

(٤–٨–١) نظرية:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r>0$. ولتكن

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (٥)$$

لكل $-r<x<r$. فإن f لها مشتقات من جميع الرتب على الفترة $(-r,r)$، و

$$f^{(n)}(0)=n!a_n \qquad (٦)$$

لكل $n\geq 0$. ونتيجة لذلك

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (٧)$$

٤-٨-٢ نظرية:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r > 0$. ولتكن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \qquad (٩)$$

لكل $c - r < x < c + r$. فإن f لها مشتقات من جميع الرتب على الفترة $(c - r, c + r)$، و

$$f^{(n)}(c) = n! a_n \qquad (١٠)$$

لكل $n \geq 0$. ونتيجة لذلك

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \qquad (١١)$$

(٤-٨-٣) تعريف:

إذا كانت f دالة لها مشتقات من جميع الرتب عند c. فإن متسلسلة تايلور للدالة f عند c هي متسلسلة القوى

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

لاحظ أنه عندما $c=0$ نحصل على متسلسلة ماكلورين كحالة خاصة لمتسلسلة تايلور.

مثال

لتكن f دالة معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة f، واثبت أنها متقاربة لجميع قيم x ولكنها تمثل الدالة فقط عند $x=0$.

الحل

لإيجاد المشتقة نستخدم تعريف المشتقة

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{-1/x^2}}$$

استخدام قاعدة لوبيتال، ينتج أن $f'(0)=0$. بالطريقة نفسها، أي باستخدام تعريف المشتقة وقاعدة لوبيتال نحصل على أن جميع المشتقات تساوي صفرا. أي $f^{(n)}(0)=0$ لكل n. وبالتالي فإن متسلسلة ماكلورين للدالة هي $0+0+0+0+\cdots+0+\cdots$ وهذه المتسلسلة متقاربة للصفر لكل x؛ ولكن، إذا كان $x\neq 0$ ، فإن $f(x)=e^{-1/x^2}$ و $e^{-1/x^2}\neq 0$.

(٤–٨–٤) نظرية (تايلور)

لتكن f دالة بحيث أن f ومشتقاتها من جميع الرتب موجودة على فترة مفتوحة $(c-r, c+r)$. فإن f تمثل بمتسلسلة تايلور

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

لكل x بحيث أن $|x-c| < r$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{n+1!}(x-c)^{n+1} = 0$$

حيث z_x تقع بين c و x .

ننوه هنا إلى أنه غالبا ما يكون من الصعب تطبيق نظرية (٤-٨-٤)، ويرجع سبب ذلك إلى أن قيم z_x اختيارية. ولكن، وفي بعض الأحيان يمكن إيجاد حد علوي للمقدار

$$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (١٣)$$

والذي يمكن إثبات أن نهايته تساوي الصفر عندما $n\to\infty$. أثبتنا في مثال (٢) فصل (٤-٢) أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل عدد حقيقي x، وبالتالي فإن نهاية الحد النوني للمتسلسلة يساوي الصفر. أي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0 \quad \text{لكل } x \qquad (١٤)$$

بطريقة مماثلة وبسبب أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل x، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x-c)^n}{n!}=0 \quad \text{لكل } x \qquad (١٥)$$

مثال

اثبت أن

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{n!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{لكل } x$$

الحل:

إذا كانت $f(x) = e^x$ فإن $f^{(n)}(x) = e^x$ لكل x، وبالتالي $f^{(n)}(0) = 1$ لكل n. لذلك ومن (٧) فإن متسلسلة ماكلورين هي

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (١٦)$$

نثبت الآن أن هذه المتسلسلة تتقارب من e^x لكل x. أي يجب إثبات أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x. هناك ثلاث حالات: $x>0$ و $x<0$ و $x=0$.

إذا كان $x>0$، فإن $0<z_x<x$، وبالتالي $e^{z_x}<e^x$. لذلك

$$0<\frac{e^{z_x}}{(n+1)!}x^{n+1}<e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (١٧)$$

من (١٤) ينتج أن $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ ، وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty} e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

من (١٧) ونظرية الحصر، ينتج أن

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{z_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \, .$$

إذا كان $x < 0$ ، فإن $x < z_x < 0$ ، وبالتالي $0 < e^{z_x} < 1$. نتيجة لذلك

$$0 < \left| R_n(x) \right| = \left| \frac{e^{z_x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$ ، نستنتج أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

أخيرا إذا كان $x = 0$ ، فإن المتسلسلة لها المجموع 1، وهو e^0. أي أن (١٦) تتقارب من الدالة e^x لكل x . ■

مثال

اثبت أن

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{لكل } x$$

الحل:

لتكن $f(x) = \sin x$ فإن مشتقات f تتكرر في مجموعات رباعية:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & \qquad f(0) &= 0 \\
f^{(1)}(x) &= \cos x & f^{(1)}(0) &= 1 \\
f^{(2)}(x) &= -\sin x & f^{(2)}(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(5)}(0) = 1$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x \qquad f^{(6)}(0) = 0$$

$$f^{(7)}(x) = -\cos x \qquad f^{(7)}(0) = -1$$

$$f^{(8)}(x) = \sin x \qquad f^{(8)}(0) = 0$$

وهكذا، تتضمن المشتقات الزوجية دالة $\sin x$ بينما تتضمن المشتقات الفردية دالة $\cos x$.

بالتحديد لكل عدد صحيح غير سالب k،

$$f^{2k+1}(x) = (-1)^k \cos x \quad \text{و} \quad f^{2k}(x) = (-1)^k \sin x \tag{١٨}$$

وبالتالي

$$f^{2k+1}(0) = (-1)^k \quad \text{و} \quad f^{2k}(0) = 0$$

وهكذا، تتضمن المشتقات الزوجية دالة $\sin x$ بينما تتضمن المشتقات الفردية دالة $\cos x$.

بالتحديد لكل عدد صحيح غير سالب k،

$$f^{2k}(x) = (-1)^k \sin x \quad و \quad f^{2k+1}(x) = (-1)^k \cos x \qquad (١٨)$$

وبالتالي

$$f^{2k}(0) = 0 \quad و \quad f^{2k+1}(0) = (-1)^k$$

وبما أن $f^{2k}(0) = 0$ ، فإن جميع معاملات قوى x الزوجية في متسلسلة ماكلورين للدالة $\sin x$ تساوي صفرا. لذلك نحذف القوى الزوجية ونكتب متسلسلة تايلور للدالة $\sin x$ كما يلي:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ولإثبات أن متسلسلة ماكلورين تتقارب من $\sin x$ لكل x، نثبت أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x.

من (١٨) نستنتج أن $\left|f^{2n+1}(z_x)\right|\le 1$، بغض النظر عن العدد الصحيح n أو الأعداد x و z_x ،

لذلك ومن (١٣)،

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (١٩)$$

من (١٤) ينتج أن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x. من نظرية (٤-٨-٤) فإن متسلسلة ماكلورين لدالة sin تتقارب من $\sin x$ لكل x.

مثال

أوجد متسلسلة تايلور للدالة e^x عند c.

الحل:

نكتب e^x على الصيغة $e^x = e^c e^{x-c}$، وبالتالي

$$e^x = e^c\left[1+(x-c)+\frac{(x-c)^2}{n!}+\cdots+\frac{(x-c)^n}{n!}+\cdots\right]=e^c\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-c)^n}{n!}\right]$$

مثال

أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\sin x$ عند $\pi/6$. ثم اثبت أنها تتقارب من $\sin x$ لكل x.

الحل:

لتكن $f(x)=\sin x$. هنا نرغب كتابة $f(x)$ كما في نظرية (٤-٢-٢)، حيث $c=\pi/6$.

مشتقات f هي:

$$f(x) = \sin x \qquad f(\pi/6)=\tfrac{1}{2}$$

$$f^{(1)}(x)=\cos x \qquad f^{(1)}(\pi/6)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(2)}(x)=-\sin x \qquad f^{(2)}(\pi/6)=\tfrac{-1}{2}$$

$$f^{(3)}(x)=-\cos x \qquad f^{(3)}(\pi/6)=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x \qquad f^{(4)}(\pi/6)=\tfrac{1}{2}$$

هذا النمط يتكرر رباعيا وبشكل غير منته. وبالتالي فإن متسلسلة تايلور لدالة $sin\,x$ هي:

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/6)-\frac{1}{2(2!)}(x-\pi/6)^2-\frac{\sqrt{3}}{2(3!)}(x-\pi/6)^3$$

الحد النوني u_n لهذه المتسلسلة هو:

$$u_n=\begin{cases}(-1)^{n/2}\dfrac{1}{2(n)!}(x-\pi/6)^n & ;\ n=0,2,4,6,\ldots\\ (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{\sqrt{3}}{2(n)!}(x-\pi/6)^n & ;\ n=1,3,5,7,\ldots\end{cases}$$

لإثبات أن هذه المتسلسلة تتقارب من $\sin x$ لكل x ، نثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

بما أن $f^{(4)}(x)=f(x)$ ، نستنتج أن .

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!}(x-\pi/6)^{n+1}\right|\le\frac{|x-\pi/6|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (٢١)$$

من (١٥) ينتج أن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x-\pi/6\right|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x. من نظرية (٤–٨–٤) فإن متسلسلة تايلور لدالة sin تتقارب من $\sin x$ لكل x.

مثال

أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ عند c ($c>0$).

الحل:

نكتب

$$\ln x = \ln[c+(x-c)] = \ln c + \ln\left(1+\frac{x-c}{c}\right)$$

في مثال (٦) فصل (٤-٦) أثبتنا أن : $\ln(1+x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ لكل $-1<x<1$

ومنه : $\ln\left(1+\frac{x-c}{c}\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)c^{n+1}} (x-c)^{n+1}$

وبالتالي : $\ln x = \ln c + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)c^{n+1}} (x-c)^{n+1}$

وهذه المتسلسلة تمثل $\ln x$ لكل $0<x\le 2c$.

متسلسلة ماكلورين	فترة التقارب
(a) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$(-\infty,\infty)$
(b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$(-\infty,\infty)$
(d) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + \cdots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$	$(-\infty,\infty)$
(e) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$(-1,1]$
(f) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$[-1,1]$
(g) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty,\infty)$

متسلسلة ذات الحدين
Binomial Theorem

ننهي هذا الباب بإيجاد متسلسلة ماكلورين للدوال $f(x)=(1+x)^k$ ، حيث k أي عدد ثابت. تسمى هذه الدوال بدوال ذات الحدين لأنها مكونة من تركيب جبري لحدين 1 و x .

سبق وأن تم دراسة نظرية ذات الحدين والتي تنص على أن لأي عدد صحيح موجب k ، فإن لكل عددين a و b،

$$(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}b^2 + \cdots$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}a^{k-n}b^n + \cdots + b^k$$

بوضع $a=1$ و $b=x$، فإن

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots + x^k$$

إذا كان k عدد غير صحيح موجب (أو 0) فإننا نحصل على متسلسلة القوى

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

وهذه متسلسلة ماكلورين للدالة $(1+x)^k$ وتسمى متسلسلة ذات الحدين.

(٤–١٠–١) نظرية (متسلسلة ذات الحدين)

إذا كان k أي عدد حقيقي،فإن

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

لكل x بحيث أن $|x| < 1$.

مثال

أوجد متسلسلة القوى في x والتي تمثل الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

الحل

من نظرية (٤-١٠-١)، لكل x حيث $|x|<1$، فإن

$$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(\frac{-5}{2})\ldots(\frac{-1}{2}-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!}+x^n\ldots$$

مثال

استخدم نتيجة مثال (١) لإيجاد متسلسلة ذات الحدين للدالة $f(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ ، ثم استخدمها لإيجاد متسلسلة القوى للدالة $\sin^{-1}x$.

الحل

نضع $-x^2$ بدلا من x في متسلسلة $(1+x)^{-1/2}$ ونحصل لكل x حيث $|x|<1$ على

$$(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+\cdots$$

نستخدم نظرية التكامل للمتسلسلات ونكامل حدا ــ حدا، نحصل على

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{5}x^5+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\ldots$$

وبالتالي

$$\sin^{-1}x=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

لكل x ، حيث $|x|<1$.