حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الرابع

متسلسلات القوى

POWER SERIES

- مـــقــــدمــــــة
- التقريب بكثيرات الحــدود ونظريـــة تـــايلور
- مـــقــــدمــــــة لمتسلسلات القوى
- تمثيل الدوال بمتسلسلات القوى
- متسلسلة تايلور
- متسلسلة ذات الحدين

• مـــقـــدمــــة

سنرى في هذا الفصل أن العديد من الدوال يمكن تقريبها بكثيرات حدود ، ويمكن استخدام كثيرة الحدود هذه ، لا الدالة الأصلية ، في الحسابات وذلك عندما يكون الفرق في قيمة الدالة الأصلية وقيمة كثيرة الحدود صغيرا جدا.

هناك العديد من الطرائق لتقريب الدالة بكثيرات حدود. وأكثرها شيوعا واستخداما تلك التي تتضمن صيغة تايلور، سميت كتشريف للرياضي الإنجليزي بروك تايلور

إن أبسط كثيرات الحدود هي كثيرة الحدود الثابتة . وأفضل كثيرة حدود ثابتة P_0 لتقريب f هي

$$P_0(x) = f(c) \qquad (١)$$

حيث أن P_0 و f لهما القيمة نفسها عند c. في غالب الأحيان فإن التقريب الأفضل يتم الحصول عليه بوضع

$$P_1(x) = f(c) + f^{(1)}(c)(x-c) \qquad (٢)$$

لاحظ أن كلا من كثيرة الحدود والدالة لهما نفس القيمة والمشتقة الأولى عند c .

لا زلنا نستطيع الحصول على تقريب أفضل وذلك بتعريف كثيرة حدود P_2 لها نفس القيمة والمشتقات الأولى والثانية عند c

$$P_2(x) = f(c) + f^{(1)}(c)(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2}(x-c)^2 \qquad (٣)$$

يتضح من التعريف أن P_2 و f لهما نفس القيمة والمشتقات الأولى والثانية عند c .

إن كثيرة الحدود من الدرجة (على الأكثر) ثلاثة والتي يمكن أن تعطينا تقريبا لقيم f تعرف كما يلي

$$P_3(x) = f(c) + f^{(1)}(c)(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{6}(x-c)^3 \qquad (٤)$$

نلاحظ أن P_3 و f لهما نفس القيمة والمشتقات الأولى والثانية والثالثة عند c .

الآن نعرف كثيرة الحدود من الدرجة (على الأكثر) n بالصيغة

$$(٥) \quad P_n(x) = f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

تسمى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الدرجة n للدالة f بجوار العدد c . ويلاحظ أن P_n و f لهما نفس القيمة وكذلك المشتقات من الرتبة الأولى إلى الرتبة n عند c .

بوضع $c = 0$ في (٢) نحصل على حالة خاصة لكثيرة حدود تايلور :

$$(٦) \quad P_n(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

وتسمى كثيرة حدود ماكلورين ، نسبة إلى عالم الرياضيات الإسكتلندي كولين ماكلورين

مثال

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة ـــ n للدالة $f(x)=e^x$. وكذلك $P_n(1)$ ثم احسب $P_5(1)$.

الحل:

كي نتمكن من استخدام صيغة $P_n(x)$ في (٦) نحسب $f^{(k)}(0)$ لأي عدد صحيح غير سالب k . ولكن لكل k فإن $f^{(k)}(x)=e^x$ ، ومنه فإن $f^{(k)}(0)=e^0=1$ ، وبالتالي

$$\boxed{P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}}$$

كنتيجة لذلك نجد أن

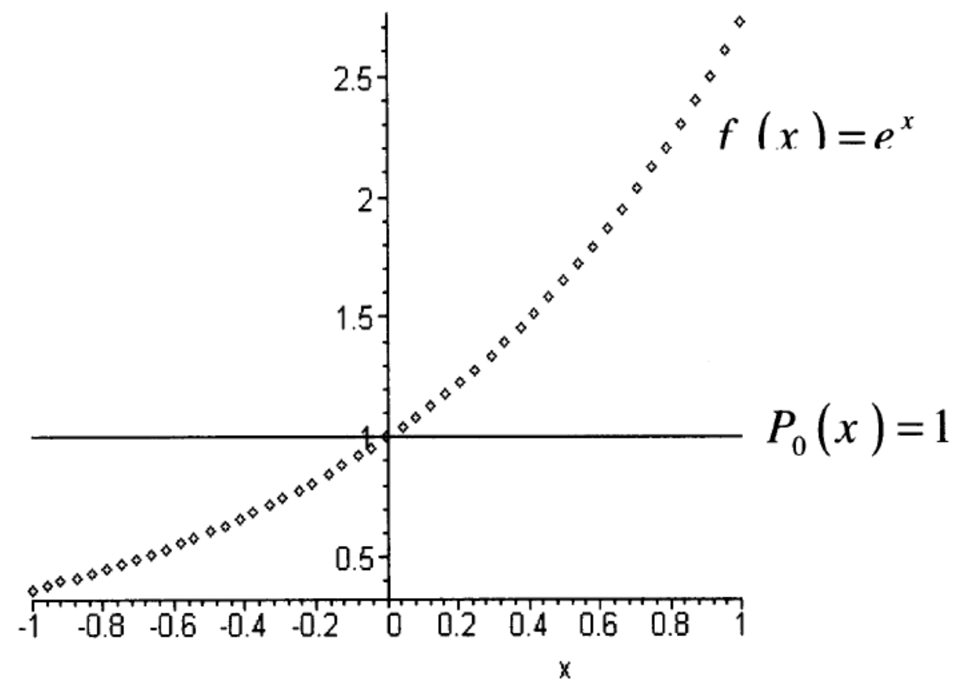
$$P_n(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}$$

وعندما $n=5$ نحصل على

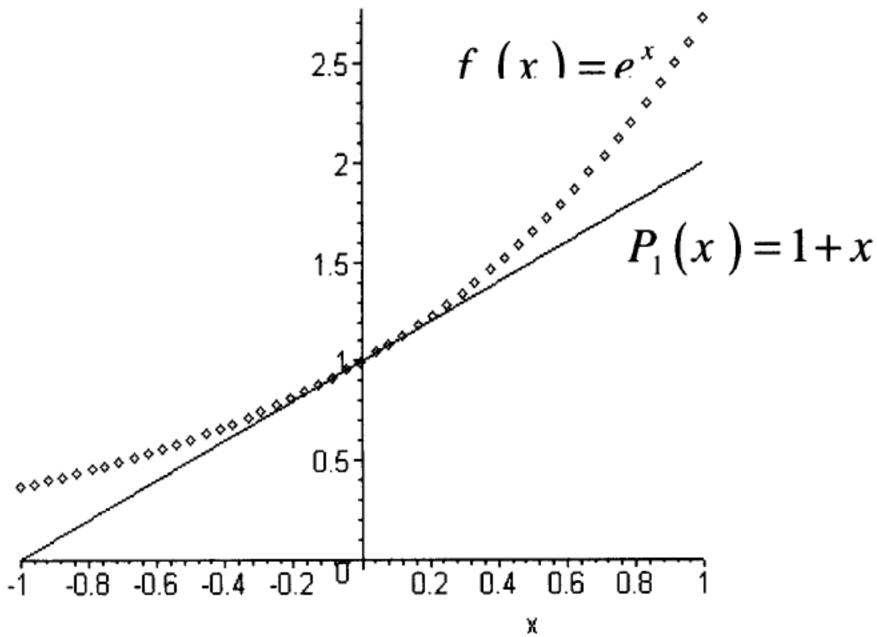
$$P_5(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=\frac{163}{60}\approx 2.71667$$

بما أن الهدف من إيجاد $P_n(x)$ هو الحصول على قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ ، فإن علينا التأكد إلى أي مدى تعتبر $P_5(1)$ تقريبا للقيمة $f(1)=e$. نعلم أن $e=2.71828$ (صحيحة لستة منازل عشرية) وحيث أن $P_5(1)\approx 2.71667$ ، فإن $P_5(1)$ تقريب للعدد e بخطأ مقداره 0.00161 .

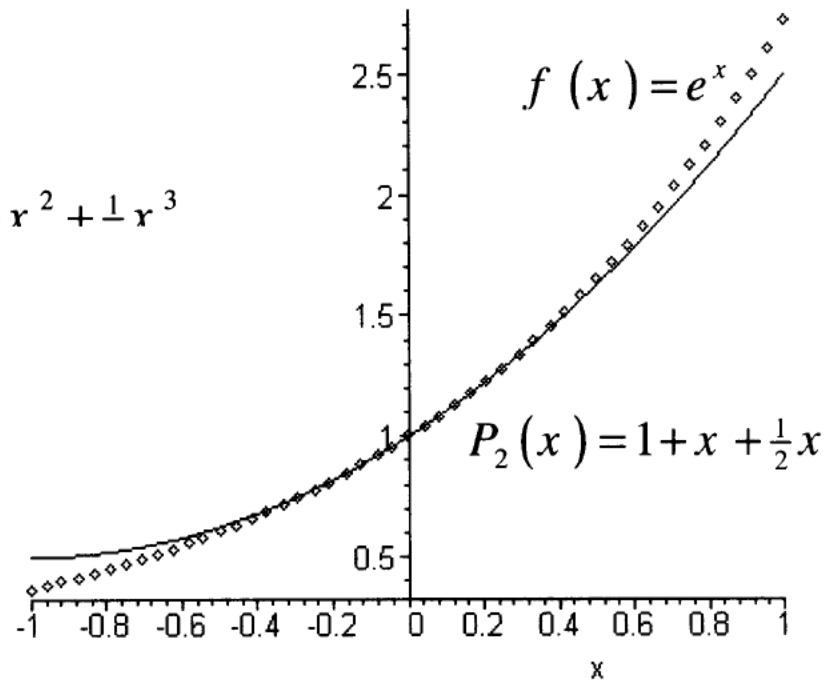
يظهر في الأشكال من (١) إلى (٤) منحنى e^x إلى جانب منحنيات P_0 ، P_1 ، P_2 و P_3 ، على التوالي . في شكل (٥) تظهر منحنيات كثيرات حدود ماكلورين ومنحنى $f(x)=e^x$. لاحظ أن منحنيات كثيرات الحدود هي تقريب للدالة e^x لقيم x القريبة من الصفر ، وأن هذا التقريب يأخذ بالتحسن كلما زادت قيمة n .



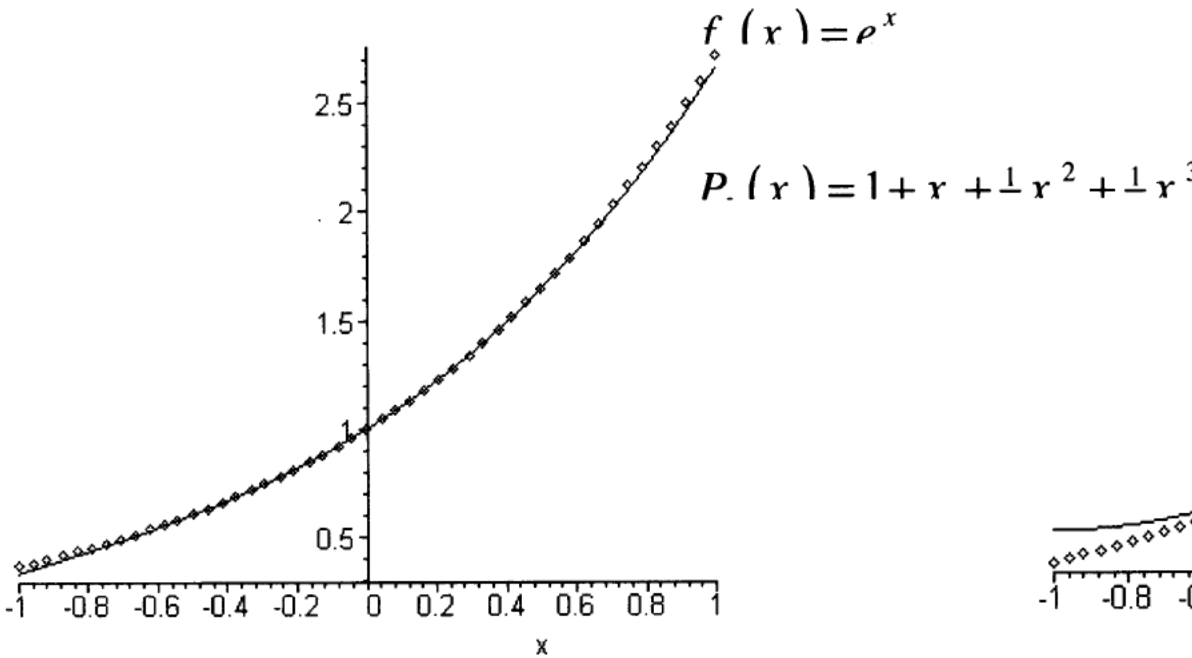
شكل (١)



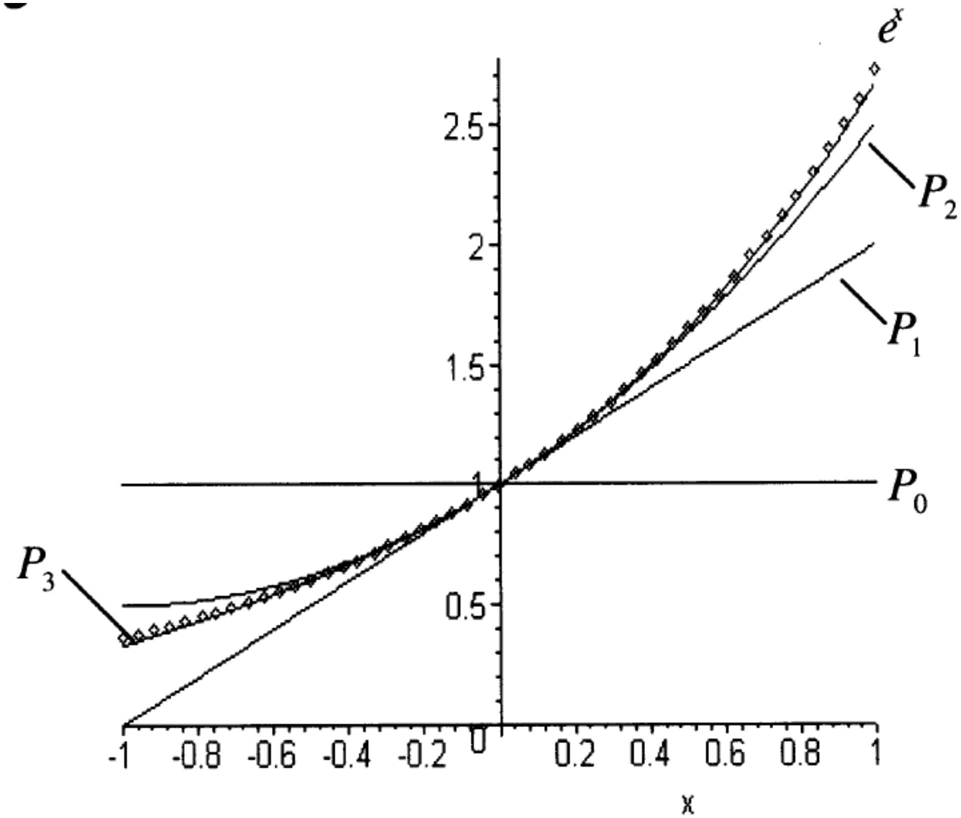
شكل (٢)


f (x) = e^x
P_2(x) = 1 + x + ½x²
2.5
2
1.5
1
0.5
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
x

شكل (٣)


f (x) = e^x
2.5
2
1.5
1
0.5
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
x

شكل (٤)



شكل (٥)

مثال

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة ـــ n للدالة $f(x)=\ln(1+x)$. ثم احسب $P_6(1)$.

الحل

نقوم أولا بحساب مشتقات الدالة $f(x)$ على النحو التالي:

$$f(x)=\ln(1+x) \qquad f(0)=0$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f^{(2)}(0)=-1$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{(-1)^2 2!}{(1+x)^3} \qquad f^{(3)}(0)=2!$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{(-1)^3 3!}{(1+x)^4} \qquad f^{(4)}(0)=-(3!)$$

وبشكل عام ، لكل ك ≥ ١ فإن

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)! \qquad\qquad f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

وبالتالي نجد من (٦) أن

$$P_n(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\;+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

ونستنتج من ذلك أن

$$P_6(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60}\approx 0.616667$$

نتوقع أن تكـــون $P_n(x)$ تقريبـــا للدالـــة $f(x)$. بمـــا أن $f(1)=\ln(2)$ تـــساوي 0.693147 (صحيحة لـــ ستة منازل عـــشرية) وبمـــا أن $P_6(1)\approx 0.616667$ ، فـــإن $P_6(1)$ تقريب للعدد $ln\,2$ بخطأ مقداره 0.07648 .

مثال

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة ـــ n للدالة $f(x)=\frac{1}{1-x}$. ثم احسب $P_n(2)$.

الحل

مشتقات الدالة f هي

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f(0)=1$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{2!}{(1-x)^3} \qquad f^{(2)}(0)=2!$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{3!}{(1-x)^4} \qquad f^{(3)}(0)=3!$$

وبشكل عام ، لكل $k \geq 1$ فإن

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad\qquad f^{(k)}(0) = k!$$

وبالتالي نجد من (٦) أن

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

وعلى وجه الخصوص فإن

$$P_n(2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

زودتنا كثيرة حدود تايلور في المثالين (١) و(٢) بتقريب مناسب للدالة المعطاة. حقا ، لقد وجدنا أنه إذا كانت $f(x)=e^x$ ، فإن

$$\left|f(1)-P_5(1)\right|=\left|e-P_5(1)\right|\approx 0.00161$$

وإذا كانت $f(x)=ln(1+x)$ ، فإن

$$\left|f(1)-P_6(1)\right|=\left|\ln 2-P_6(1)\right|\approx 0.07648$$

بالمثل ، إذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ (كما في مثال (٣)، فإن لكل

$$\begin{aligned}\left|f(2)-P_n(2)\right|&=\left|\tfrac{1}{1-2}-\left(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n\right)\right|\\&=\left|-1-\left(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n\right)\right|\geq 2^n\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $P_n(2)$ ليست قريبة بشكل مقبول من $f(2)$ لأي قيمة للعدد n. في الحقيقة كلما كبرت قيمة n ، فإن $P_n(2)$ تبتعد عن كونها تقريبا للعدد $f(2)$.

لتحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود $P_n(x)$ تقريبا لدالة f مشتقاتها من رتب عليا موجودة عند c ، نعرف ما يسمى باقي تايلور R_n للدالة f بالصيغة

(٤–٢–١) تعريف

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$
$$= f(x) - \left[f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right]$$

إن قيمة $R_n(x)$ تساعدنا على تحديد مدى صحة اعتبار $P_n(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$ ، فكلما صغر $R_n(x)$ كلما أصبحت $P_n(x)$ قريبة من $f(x)$.

(٤-٢-٢) نظرية

إذا كانت f دالة بحيث أن f وجميع مشتقاتها من الرتبة n متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، وإذا كانت $f^{(n+1)}(x)$ موجودة لجميع x في الفترة المفتوحة (a,b)، فإنه يوجد عدد z_x في الفترة المفتوحة (a,b) بحيث إن

$$f(x)=f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (٧)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (٨)$$

تعرف المعادلة (٧) بصيغة تايلور والمعادلة (٨) بصيغة لاجرانج للباقي (Lagrange Remainder Formula) .

بوضع $c=0$ في (٢) نحصل على حالة خاصة لصيغة تايلور :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{n+1!}x^{n+1} \end{aligned}}$$

حيث z_x يقع بين 0 و x ، وتسمى صيغة ماكلورين .

يتضح مما تقدم أنه يمكننا تقريب أي دالة بكثيرة حدود تايلور عند عدد c أو بكثيرة حدود ماكلورين بالدقة المطلوبة كما توضح ذلك الأمثلة التالية:

مثال

أوجد كثيرة حدود تايلور لدالة $\cos$ من الدرجة الثالثة عند $\frac{\pi}{4}$ وكذلك صيغة لاجرانج للباقي .

الحل

لتكن $f(x)=\cos x$. نحسب أولا قيمة الدالة ومشتقاها عند $\frac{\pi}{4}$.

$$f(x)=\cos x \qquad f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(1)}(x)=-\sin x \qquad f^{(1)}(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(2)}(x)=-\cos x \qquad f^{(2)}(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(3)}(x)=\sin x \qquad f^{(3)}(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

من (٤) نحصل على

$$P_3(x) = f(\pi/4) + f^{(1)}(\pi/4)(x-\pi/4) + \frac{f^{(2)}(\pi/4)}{2!}(x-\pi/4)^2$$

وبالتالي فإن

$$P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\pi/4) + \frac{\sqrt{2}}{2(2!)}(x-\pi/4)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2(3!)}(x-\pi/4)^3$$

وبما أن $f^{(4)}(x) = \cos x$ ، فإنه من (٥) نحصل على

$R_3(x) = \frac{1}{24}\cos z_x (x-\pi/4)^4$ حيث z_x يقع بين $\frac{\pi}{4}$ و x . لما كانت $|\cos x| \le 1$ فإننا نستنتج أن

$$|R_3(x)| \le \frac{1}{24}(x-\pi/4)^4$$

● مقدمة لمتسلسلات القوى
Introduction To Power Series

إن أحد الأسباب الهامة لدراستنا للمتسلسلات في الفصل الثالث هو تمثيل الدوال بمتسلسلات قوى ، أي متسلسلات حدودها تحوي قوى لمتغير x.

(٤-٤-١) تعريف

ليكن x متغيرا. تسمى المتسلسلة من الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

متسلسلة قوى في x .حيث a_n عدد حقيقي لكل n.

سنفترض أن $x^0=1$ بما في ذلك الحالة التي تكون عندها $x=0$. في دراستنا للمتسلسلات ذات الحدود الثابتة تركز اهتمامنا في تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة. وفي دراستنا الحالية لمتسلسلات القوى فإن جل اهتمامنا يكمن في تحديد قيم المتغير x التي تكون عندها المتسلسلة متقاربة وتلك التي عندها المتسلسلة متباعدة. كل قيمة للمتغير x عندها متسلسلة القوى متقاربة تحدد عددا هو مجموع المتسلسلة. إذن متسلسلة القوى تعرف دالة نطاقها جميع قيم x التي تكون عندها المتسلسلة متقاربة. من الواضح أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة عندما $x=0$. هناك متسلسلات قوى غير متقاربة لأي قيم أخرى للمتغير x ، وهناك أيضا متسلسلات متقاربة لكل قيم المتغير x.

مثال

اثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ متقاربة فقط عندما $x=0$.

الحل

إذا كان $x \neq 0$ ، فان

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

بالتالي ومن اختبار النسبة فان المتسلسلة متباعدة لكل $x \neq 0$.

وعلى النقيض فان متسلسلة القوى قد تتقارب لكل x.

مثال

اثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل عدد حقيقي x.

الحل

إذا كان $x \neq 0$ ، فان

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

وبالتالي ومن اختبار النسبة فإن المتسلسلة متقاربة لكل عدد x.

مثال

حدد قيم x التي تكون عندها متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$ متقاربة.

الحل

إذا كان $x \neq 0$ ، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{2^n x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{3}\frac{n}{(n+1)}x\right| = \frac{2}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}|x|$$

بالتالي من اختبار النسبة فإن المتسلسلة تكون متقاربة مطلقا عندما $\frac{2}{3}|x| < 1$، أو ما يكافئ ذلك عندما تكون $|x| < \frac{3}{2}$. كما تكون المتسلسلة متباعدة عندما تكون $\frac{2}{3}|x| > 1$، أو ما يكافئ ذلك عندما تكون $|x| > \frac{3}{2}$. وعندما تكون $\frac{2}{3}|x| = 1$ (أي عندما تكون $x = \pm\frac{3}{2}$) فان اختبار النسبة يفشل. لذلك لا بد من اختبار المتسلسلة عند هاتين القيمتين بطريقة أخري.

عندما $x = \frac{3}{2}$ نحصل على المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n3^n}\frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

نجد أن المتسلسلة متقاربة.

عندما $x=-\frac{3}{2}$ نحصل على المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n3^n}\left(-\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$$

وهذه المتسلسلة متباعدة لأنها المتسلسلة التوافقية.

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متقاربة لكل $-\frac{3}{2}<x\leq\frac{3}{2}$ ، ومتباعدة لكل $x>\frac{3}{2}$ أو $x\leq-\frac{3}{2}$.

نظرية (٤-٤-٢)

(ا) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة لعدد حقيقي $d \neq 0$ فإنها متقاربة مطلقا لكل $|x| < |d|$.

(ب) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متباعدة لعدد حقيقي $d \neq 0$ فإنها متباعدة لكل $|x| > |d|$.

نظرية (٤-٤-٣)

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى . عندئذ فإن واحدا فقط من الشروط التالية يتحقق:

ا. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة فقط عند $x = 0$.

ب. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة لكل x.

جـ. يوجد عدد $r > 0$ بحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة لكل x، حيث $|x| < r$ ومتباعدة لكل x، حيث $|x| > r$.

مثال

حدد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{1/2}}$

الحل

بوضع $x=-1$ نجد أن المتسلسلة هي $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^{1/2}}$ ، وهي متقاربة من اختبار المتسلسلة المترددة. عندما $x = 1$ تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ وهي متباعدة لأنها متسلسلة - p حيث $p=\frac{1}{2}$. بما أن المتسلسلة متقاربة عندما $x=-1$ ومتباعدة عندما $x=1$ ، فإن النظرية (٤-٤-٣) تضمن أن نصف قطر التقارب $r=1$ وبالتالي فترة التقارب $[-1,1)$.

إن إيجاد فترة تقارب المتسلسلة في معظم الحالات ليس بالأمر السهل كما هي الحال في مثال (٤). والطريقة المعتادة هي استخدام اختبار النسبة المعمم أو اختبار الجذر المعمم لإيجاد نصف قطر التقارب ومن ثم اختبار التقارب عند النهايتين $x=r$ و $x=-r$ كل على انفراد. المثال التالي يوضح ذلك.

مثال

أوجد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

الحل

عندما $x \neq 0$ نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}x\right| = |x|$$

من اختبار النسبة المعمم ، نعلم أن المتسلسلة متقاربة لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $|x| > 1$. من نظرية (٤-٤-٣) (جـ) ، فان نصف قطر تقارب المتسلسلة هو $r = 1$. لا نستطيع استنتاج أي شيء من اختبار النسبة المعمم عندما تكون $|x| = 1$ ، وعلينا اختبار القيمتين 1 و -1 كل على انفراد. وعند هاتين القيمتين ، نحصل على المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ ، وكل منهما متباعدة . وعليه فان فترة تقارب المتسلسلة هي $(-1,1)$.

(٤-٤-٤) تعريف

ليكن c عددا حقيقيا و x متغيرا . نعرف متسلسلة القوى في $x-c$ ، بأنها المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

حيث أن المعاملات a_n ، $n=0,1,2,\ldots$ أعداد حقيقية .

مثال

أوجد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}(x-5)^n$.

الحل

عندما $x \neq 5$ نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{(x-5)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}(x-5)\right| = |x-5|$$

من اختبار النسبة المعمم ، المتسلسلة متقاربة عندما تكون $|x-5|<1$ ومتباعدة لكل x، حيث $|x-5|>1$. أي أنها متقاربة لكل x في الفترة $(4,6)$ ومتباعدة لكل x ، حيث $x<4$ أو $x>6$. نختبر النهايتين كل على انفراد. عندما $x=4$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة، وعندما $x=6$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ وهي متقاربة. اذن فترة التقارب هي $(4,6]$ كما أن نصف قطر التقارب $r=1$.