حساب التكامل

111 ريض

<u>الأسبوع الثاني عشر</u>

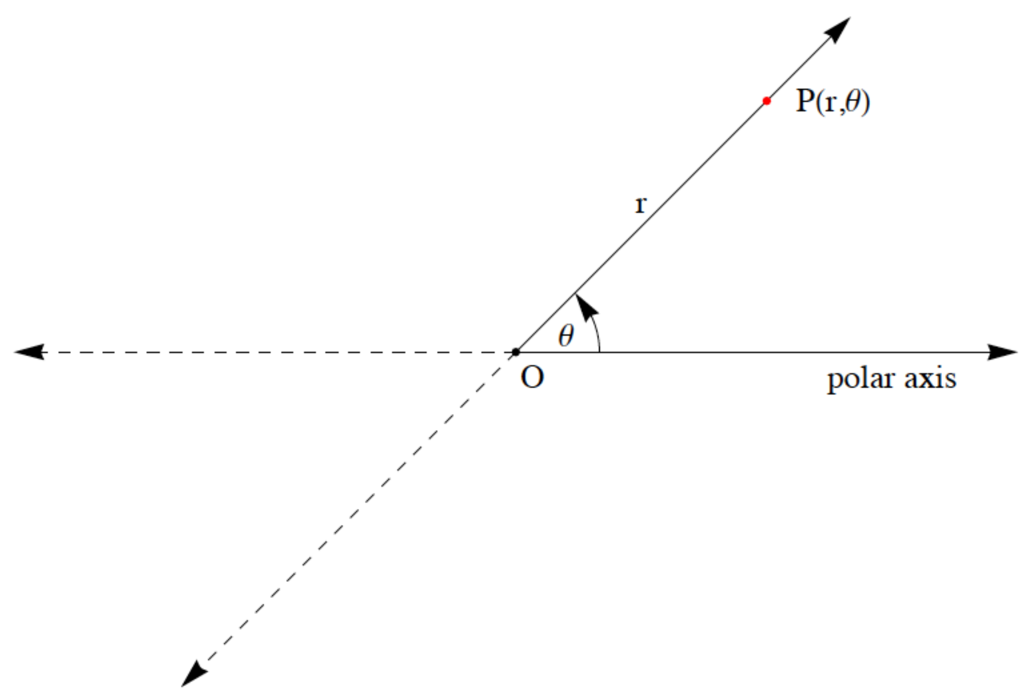
الأهداف:

- يتعرف الطالب عن الإحداثيات القطبية و العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية
- يتعلم الطالب كيفية رسم المنحنيات القطبية
- يتعلم الطالب كيفية حساب مساحة منطقة مستوية قطبية محدودة

باب 8
الإحداثيات القطبية

1.8 الإحداثيات القطبية

تمثل أي نقطة في المستوى الديكارتي بواسطة الزوج المرتب (a, b) حيث يرمز a للإحداثي x بينما يرمز b للإحداثي y .
يمكن تمثيل أي نقطة بطريقة أخرى تسمى الإحداثيات القطبية .
يتكون المستوى القطبي من القطب والمحور القطبي . القطب هو نقطة الأصل في المستوى الديكارتي ، والمحور القطبي هو محور x في المستوى الديكارتي .
إذا كانت P أي نقطة في المستوى نحرك المحور القطبي في الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) حتى نصل إلى النقطة P نرمز للمسافة بين P والقطب بالرمز r ، ونرمز للزاوية التي يصنعها المحور بعد تحريكه حتى نصل إلى P بالرمز θ ، نسمي الزوج المرتب (r, θ) بالتمثيل القطبي للنقطة P .



ملاحظات :

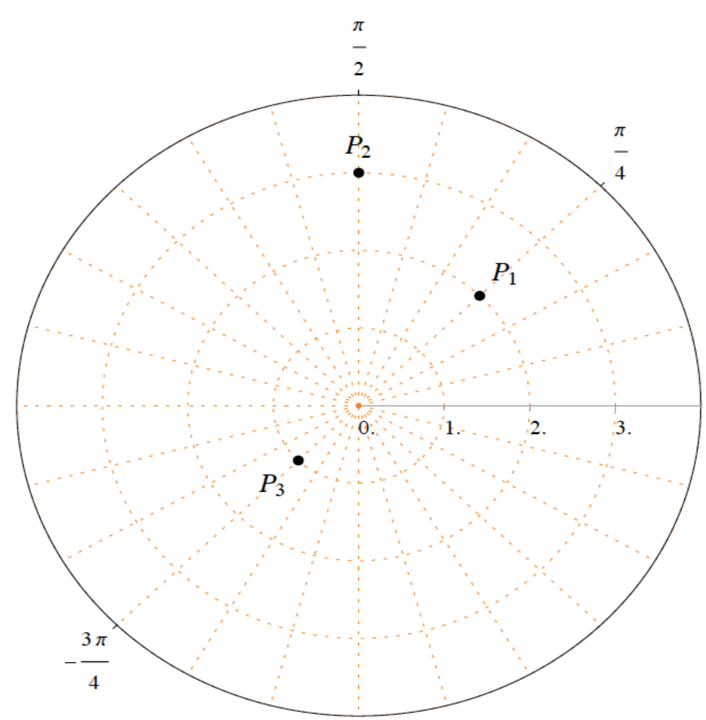
- في التمثيل القطبي لنقاط المستوى نستخدم القياس الدائري للزوايا .
- التمثيل القطبي لنقطة الأصل أو القطب هو $(0, \theta)$ لأي زاوية θ .
- التمثيل القطبي لأي نقطة ليس وحيداً .

الإحداثيات القطبية $\left(-2, -\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-2, \dfrac{5\pi}{4}\right)$, $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ تمثل نفس النقطة في المستوى .

مثال : أرسم النقاط التالية

$$P_1\left(2, \frac{\pi}{4}\right) \ , \ P_2\left(3, \frac{\pi}{2}\right) \ , \ P_3\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$$

الحل :



2.8 العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية

- إذا كان (x, y) هو التمثيل الديكارتي للنقطة P فيمكن حساب الإحداثيات القطبية للنقطة P من العلاقتين :

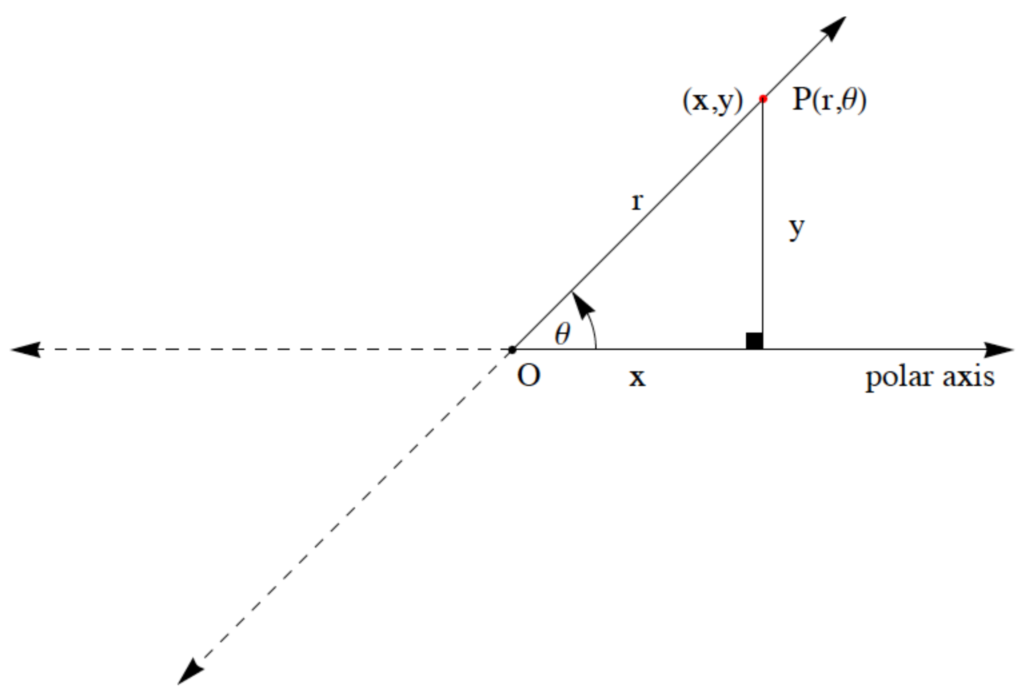
$$r^2 = x^2 + y^2 \implies r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \implies \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

- إذا كان (r, θ) هو التمثيل القطبي للنقطة P فيمكن حساب الإحداثيات الديكارتية للنقطة P من العلاقتين :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \implies x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \implies y = r\sin\theta$$



مثال : أوجد الإحداثيات القطبية للنقطة التي إحداثياتها الديكارتية هي $(1, \sqrt{3})$

الحل :

$$x = 1 \; , \; y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \implies \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

الإحداثيات القطبية هي $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

مثال : أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة التي إحداثياتها القطبية هي $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$

الحل :

$$r = 2 \; , \; \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$y = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الإحداثيات الديكارتية هي $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

مثال : حول المعادلة القطبية $r = 3\sec\theta$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 3\sec\theta \implies r = \frac{3}{\cos\theta} \implies r\cos\theta = 3 \implies x = 3$$

المعادلة الديكارتية $x = 3$ تمثل خط عمودي .

مثال : حول المعادلة القطبية $r = 2$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 2 \implies r^2 = 4 \implies x^2 + y^2 = 4$$

المعادلة الديكارتية $x^2 + y^2 = 4$ تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 .

مثال : حول المعادلة القطبية $r = 2\sin\theta$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 2\sin\theta \implies r^2 = 2\,(r\ \sin\theta) \implies x^2 + y^2 = 2y$$

$$\implies x^2 + y^2 - 2y = 0 \implies x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 1 \implies x^2 + (y-1)^2 = 1$$

المعادلة الديكارتية $x^2 + (y-1)^2 = 1$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(0,1)$ ونصف قطرها 1 .

3.8 المنحنيات القطبية

أولاً - الخطوط المستقيمة :

ثانياً - الدوائر

ثالثاً - المنحنيات القلبية :

اختبار التناظر :

(1) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول المحور القطبي إذاكان $r(\theta) = r(-\theta)$.

(2) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول المستقيم $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ إذاكان $r(\theta) = -r(-\theta)$.

(3) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول القطب إذاكان $r(\theta) = -r(\theta)$.

(2) الخط المستقيم العمودي على المحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم العمودي على المحور القطبي هي $r = a\ \sec\theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$r = a\ \sec\theta = \frac{a}{\cos\theta} \implies r\cos\theta = a \implies x = a$$

$r = a\sec\theta$ تمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي في النقطة $(r,\theta) = (a,0)$.

(3) الخط المستقيم الموازي للمحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم الموازي للمحور القطبي هي $r = a\ \csc\theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in (0,\pi)$.

$$r = a\ \csc\theta = \frac{a}{\sin\theta} \implies r\sin\theta = a \implies y = a$$

$r = a\csc\theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r,\theta) = \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

أولاً - الخطوط المستقيمة :

(1) الخط المستقيم المار بالقطب (نقطة الأصل) :

المعادلة القطبية للخط المستقيم المار بالقطب هي $\theta = \theta_0$.

$$\theta = \theta_0 \implies \tan(\theta) = \tan(\theta_0) \implies \frac{y}{x} = \tan(\theta_0) \implies y = \tan(\theta_0)\, x$$

$\theta = \theta_0$ تمثل خط مستقيم يمر بالقطب وميله $\tan(\theta_0)$.

(2) الخط المستقيم العمودي على المحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم العمودي على المحور القطبي هي $r = a\ \sec\theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$r = a\ \sec\theta = \frac{a}{\cos\theta} \implies r\cos\theta = a \implies x = a$$

$r = a\sec\theta$ تمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي في النقطة $(r,\theta) = (a,0)$.

(3) الخط المستقيم الموازي للمحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم الموازي للمحور القطبي هي $r = a\ \csc\theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in (0,\pi)$.

$$r = a\ \csc\theta = \frac{a}{\sin\theta} \implies r\sin\theta = a \implies y = a$$

$r = a\csc\theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r,\theta) = \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

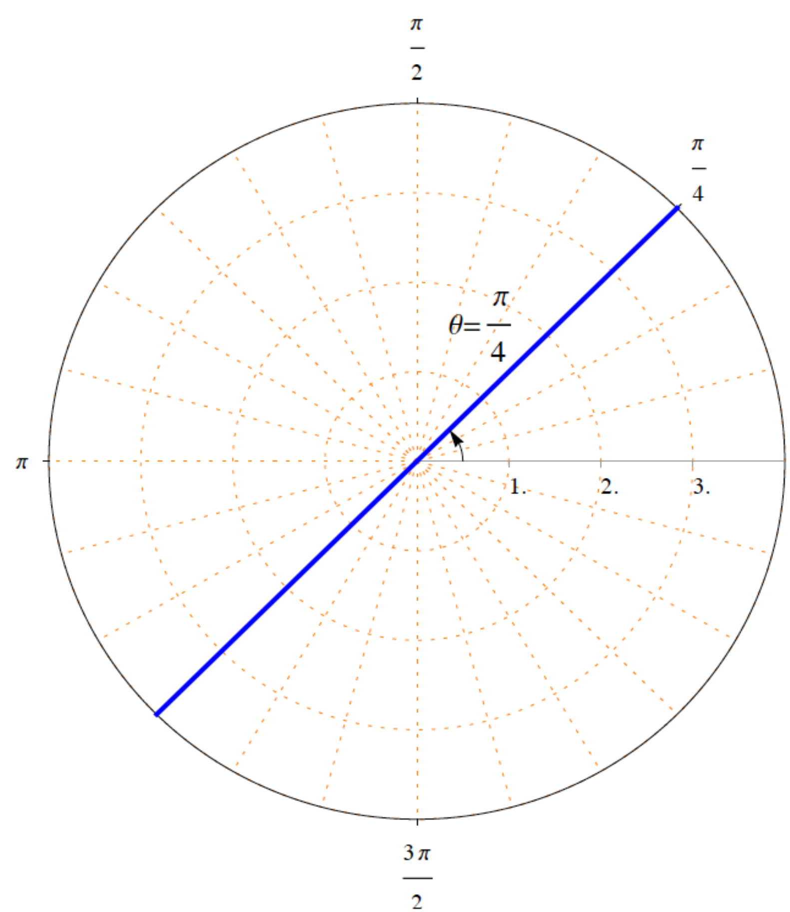
مثال : حول المعادلات القطبية التالية إلى معادلات ديكارتية وارسمها :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

الحل :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \implies \tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \implies \frac{y}{x} = 1 \implies y = x$$

المعادلة $\theta = \frac{\pi}{4}$ تمثل خط مستقيم يمر بالقطب وميله 1 .

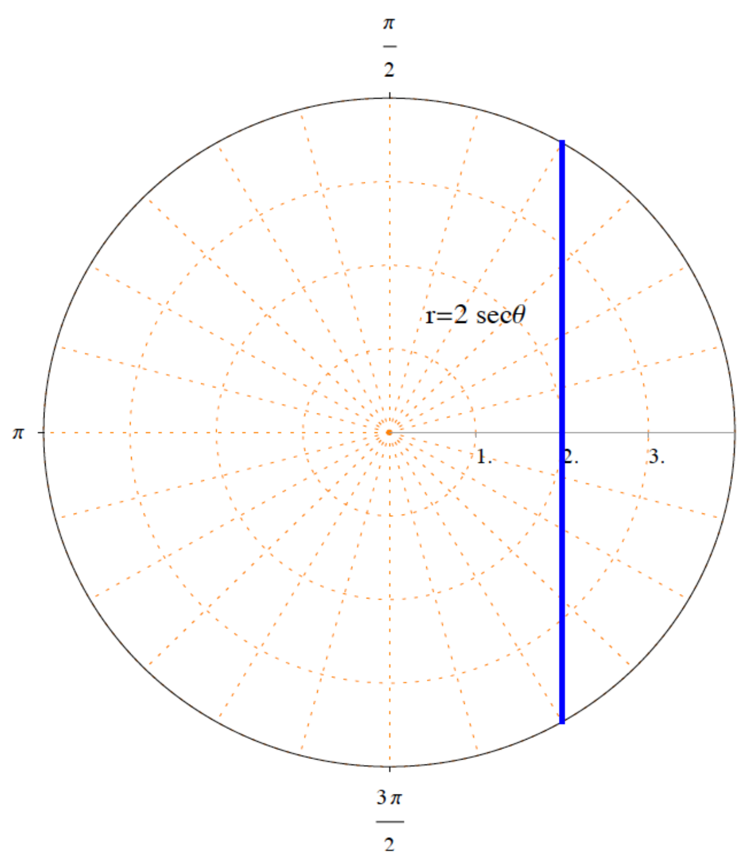


$r = 2\sec\theta \quad (2)$

الحل :

$$r = 2\sec\theta = \frac{2}{\cos\theta} \implies r\cos\theta = 2 \implies x = 2$$

المعادلة $r = 2\sec\theta$ تمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r,\theta) = (2,0)$.

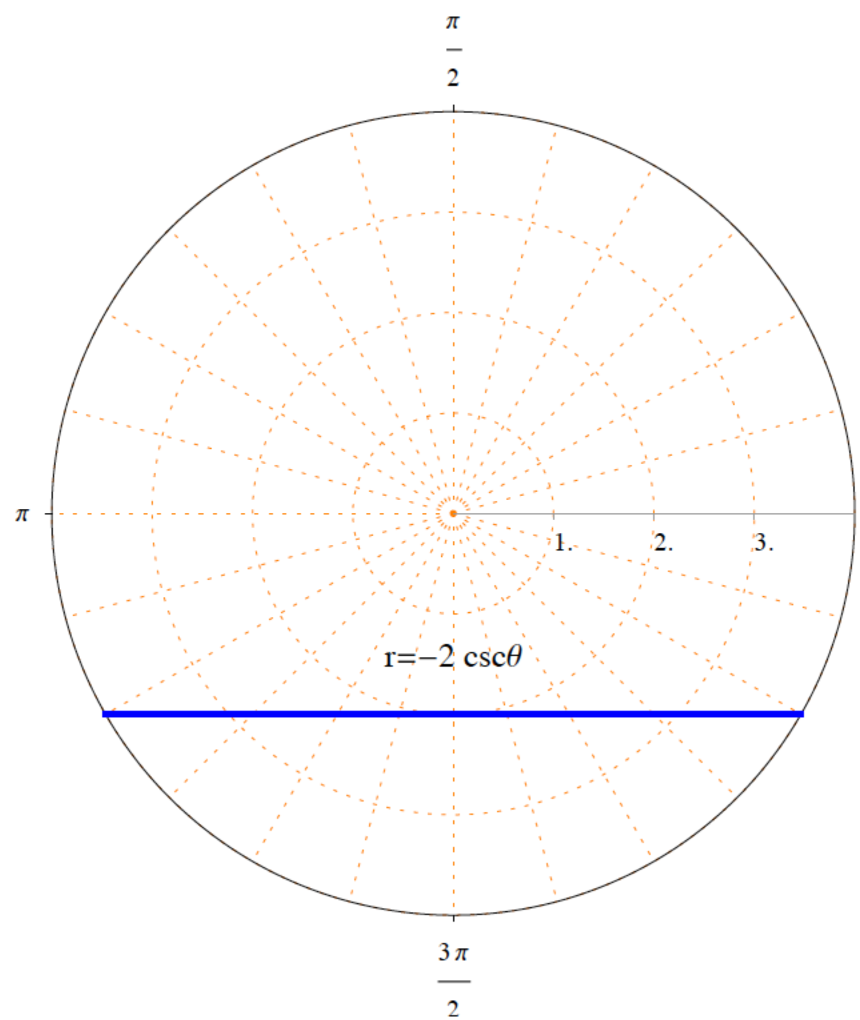


$r = -2\csc\theta$ (3)

الحل :

$$r = -2\csc\theta = \frac{-2}{\sin\theta} \implies r\sin\theta = 2 \implies y = -2$$

المعادلة $r = -2\csc\theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r,\theta) = \left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$.

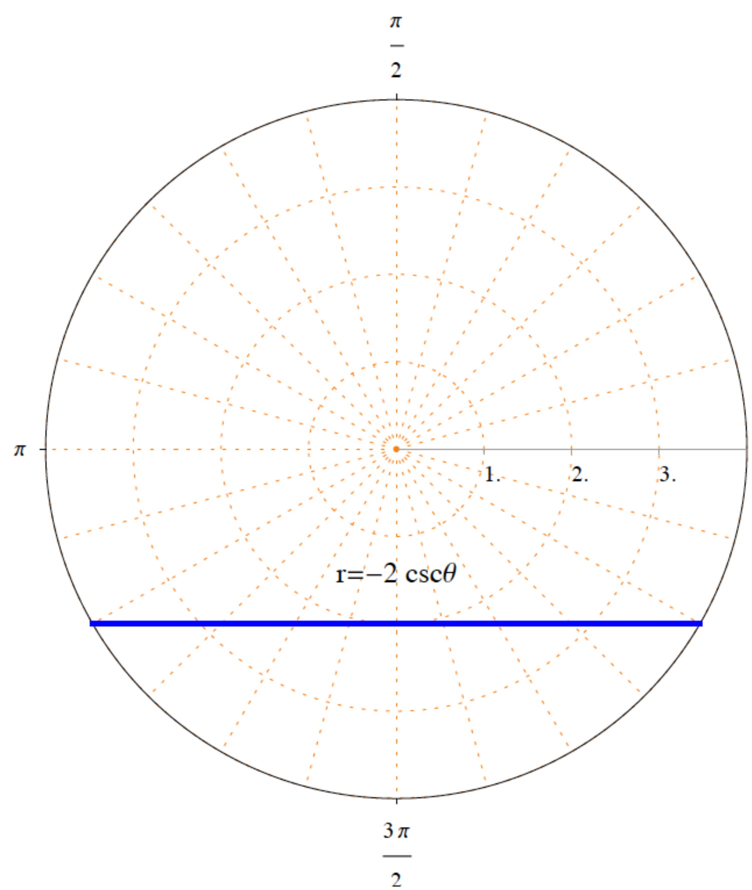


$r = -2\csc\theta \quad (4)$

الحل :

$$r = -2\csc\theta = \frac{-2}{\sin\theta} \implies r\sin\theta = 2 \implies y = -2$$

المعادلة $r = -2\csc\theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r,\theta) = \left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$.



ثانياً - الدوائر

(1) الدوائر التي مركزها القطب (نقطة الأصل) :

المعادلة القطبية $r = a$ حيث $a \neq 0$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها $|a|$.

$$r = a \implies r^2 = a^2 \implies x^2 + y^2 = a^2$$

(2) الدوائر على الصورة $r = a\cos\theta$ ، حيث $a \neq 0$ و $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$r = a\cos\theta \implies r^2 = a(r\cos\theta) \implies x^2 + y^2 = ax$$

$$\implies (x^2 - ax) + y^2 = 0 \implies \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\implies \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

المعادلة $r = a\cos\theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(r,\theta) = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{|a|}{2}$.

لاحظ أن الدائرة $r = a\cos\theta$ تمر بالقطب .

إذا كانت $a > 0$ فإن الدائرة $r = a\cos\theta$ تقع على يمين الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

إذا كانت $a < 0$ فإن الدائرة $r = a\cos\theta$ تقع على يسار الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(3) الدوائر على الصورة $r = a\sin\theta$ ، حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$r = a\sin\theta \implies r^2 = a(r\sin\theta) \implies x^2 + y^2 = ay$$

$$\implies x^2 + y^2 - ay = 0 \implies x^2 + \left(y^2 - ay + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4}$$

$$\implies x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

المعادلة $r = a\sin\theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(r,\theta) = \left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{|a|}{2}$.

لاحظ أن الدائرة $r = a\sin\theta$ تمر بالقطب .

إذا كانت $a > 0$ فإن الدائرة $r = a\sin\theta$ تقع أعلى المحور القطبي .

إذا كانت $a < 0$ فإن الدائرة $r = a\sin\theta$ تقع أسفل المحور القطبي .

مثال : أرسم المنحنيات القطبية التالية :

$$r = 2 \quad (1)$$

$$r = -2 \quad (2)$$

$$r = 2\cos\theta \, , \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$r = -2\cos\theta \, , \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

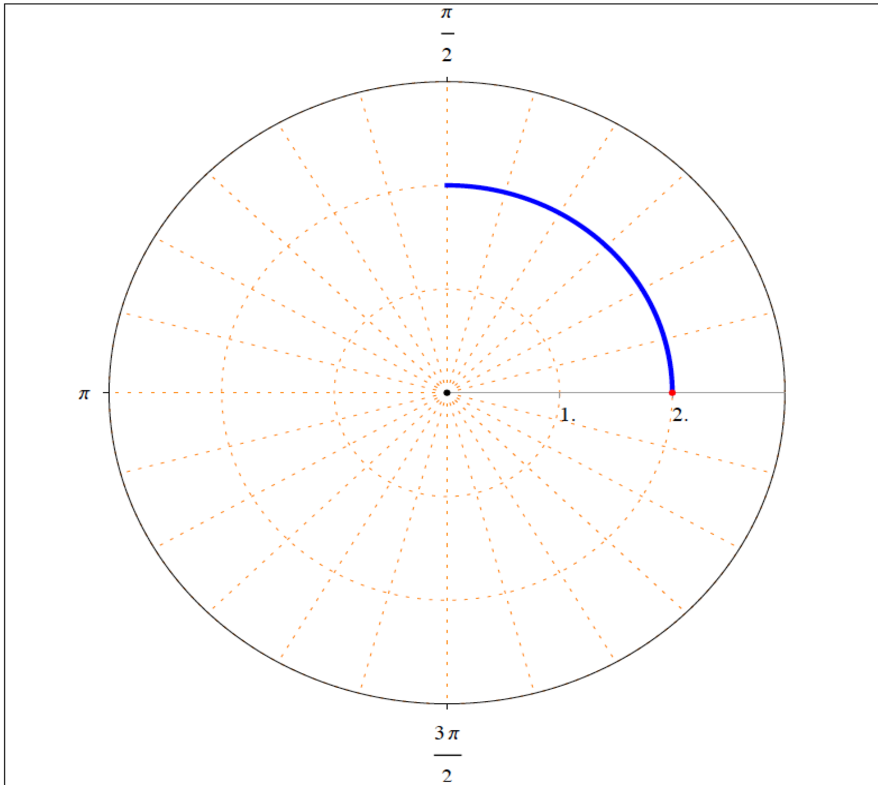
$$r = 2\sin\theta \, , \ 0 \leq \theta \leq \pi \quad (5)$$

$$r = -2\sin\theta \, , \ 0 \leq \theta \leq \pi \quad (6)$$

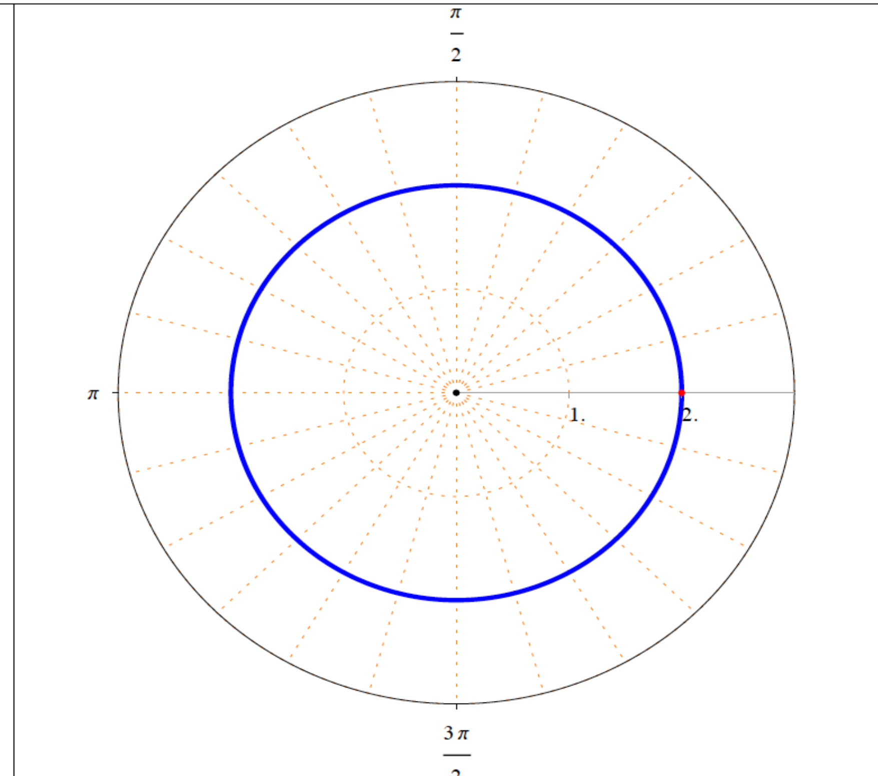
الحل :

المعادلة $r = 2$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

لاحظ أن نقطة البداية هي $(r,\theta) = (2,0)$.



$r = 2 \;\;,\;\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

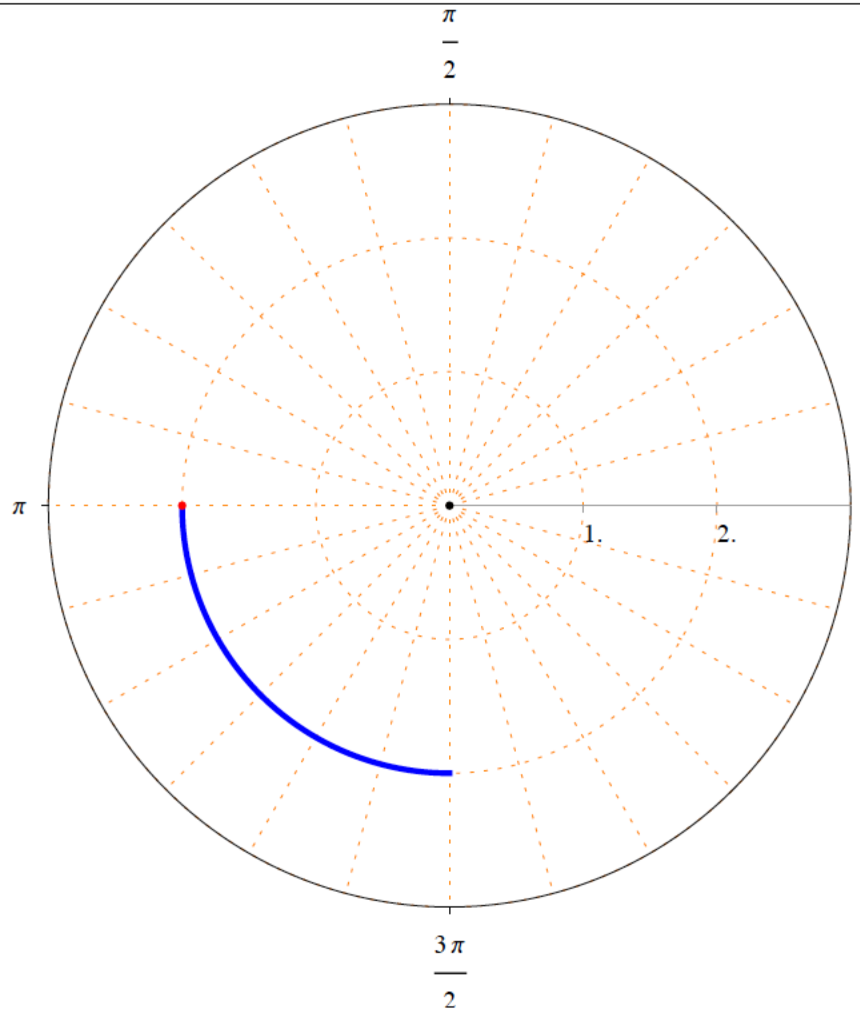


$r = 2 \;\;,\;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

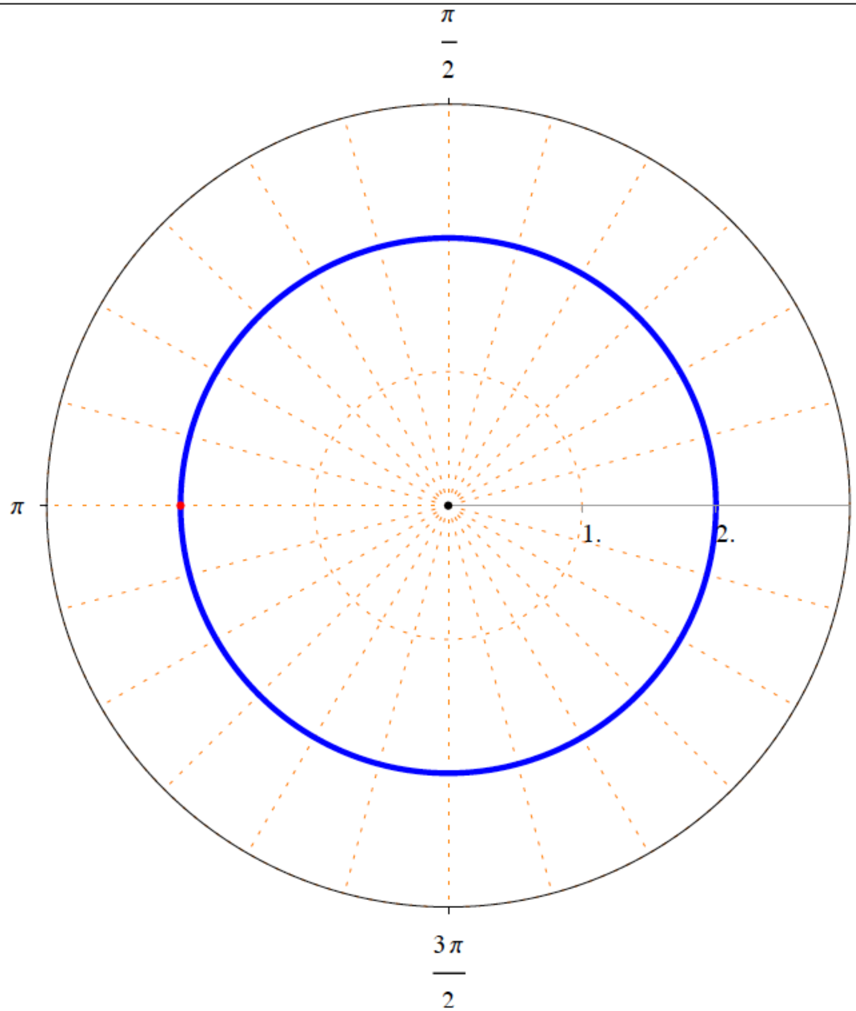
$r = -2 \ \ (2)$

المعادلة $r = -2$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

لاحظ أن نقطة البداية هي $(r, \theta) = (-2, 0)$.



$r = -2 \ , \ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

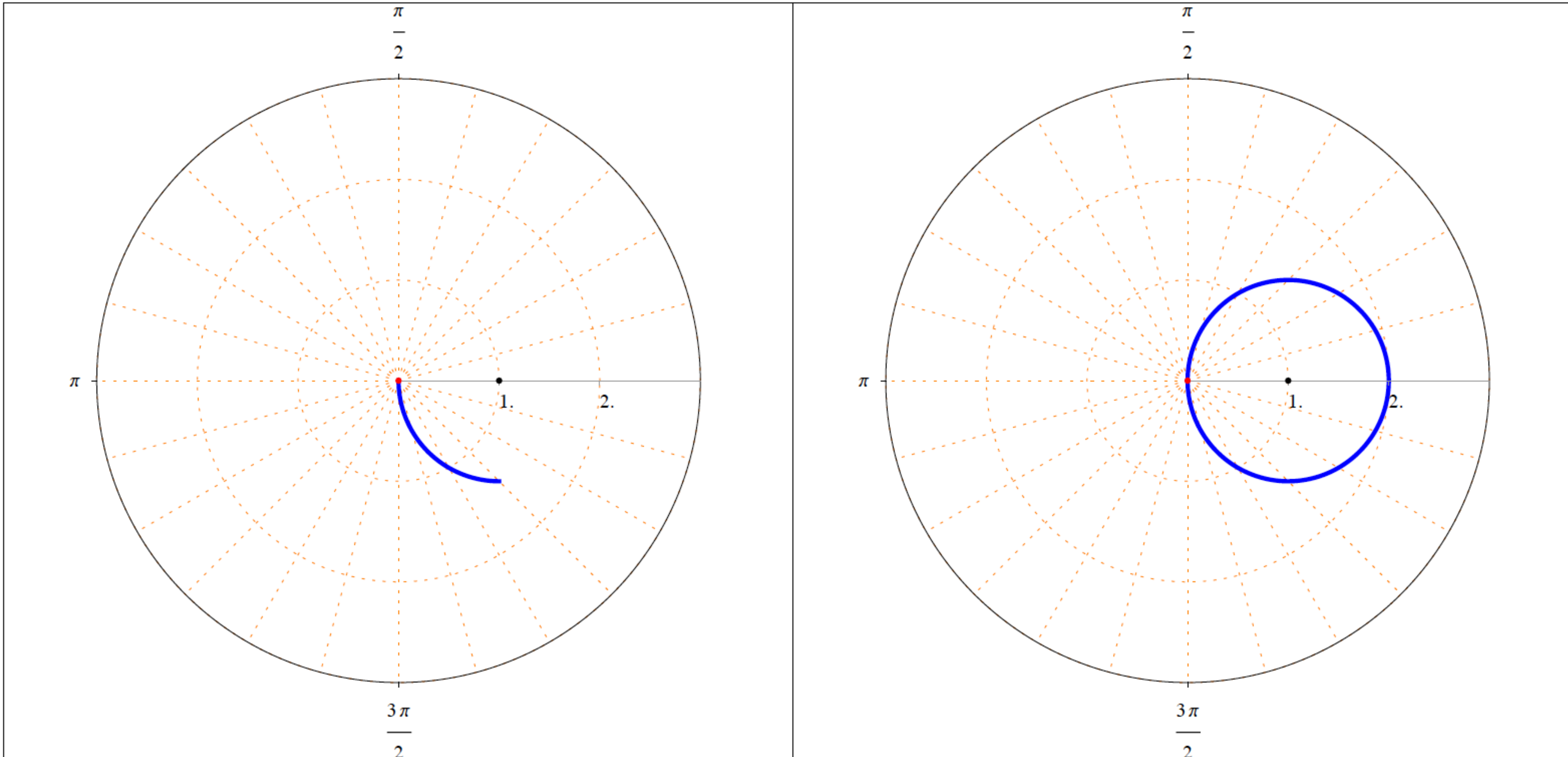


$r = -2 \ , \ \ 0 \le \theta \le 2\pi$

$$r = 2\cos\theta\ ,\quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

الحل :

المعادلة $r = 2\cos\theta$ تمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = (1,0)$ ونصف قطرها 1 .

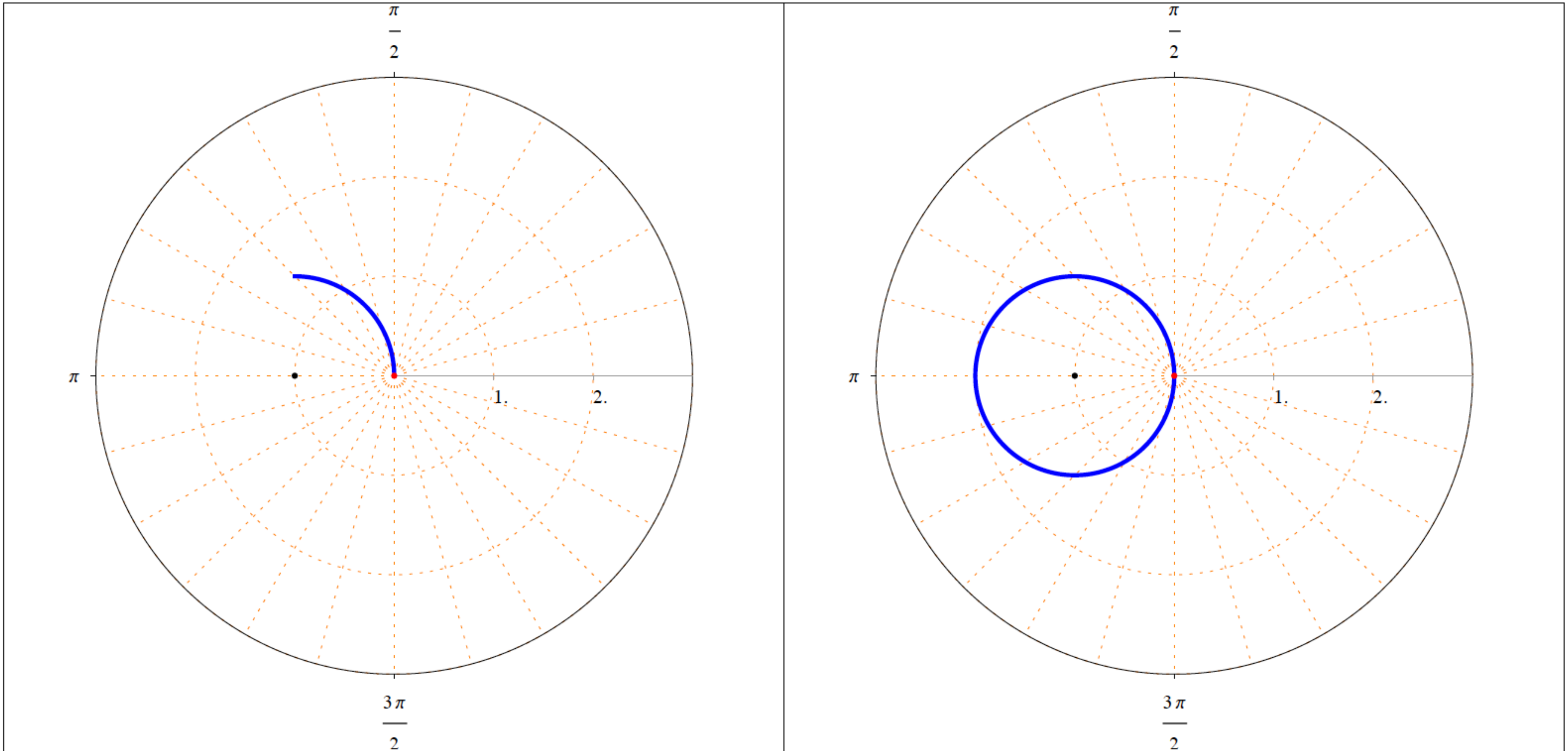


$$r = 2\cos\theta\ ,\quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le -\frac{\pi}{4}$$

$$r = 2\cos\theta\ ,\quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$r = -2\cos\theta\,, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

المعادلة $r = -2\cos\theta$ تمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = (-1,0)$ ونصف قطرها 1 .

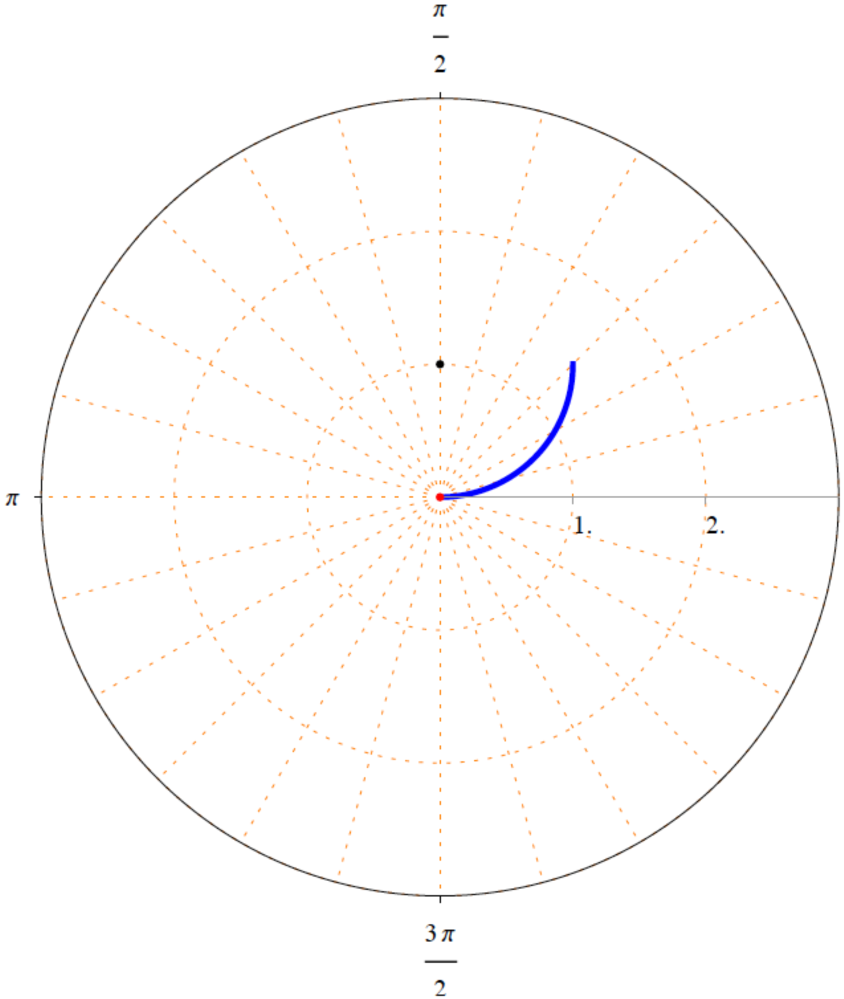


$r = -2\cos\theta\ , \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le -\frac{\pi}{4}$

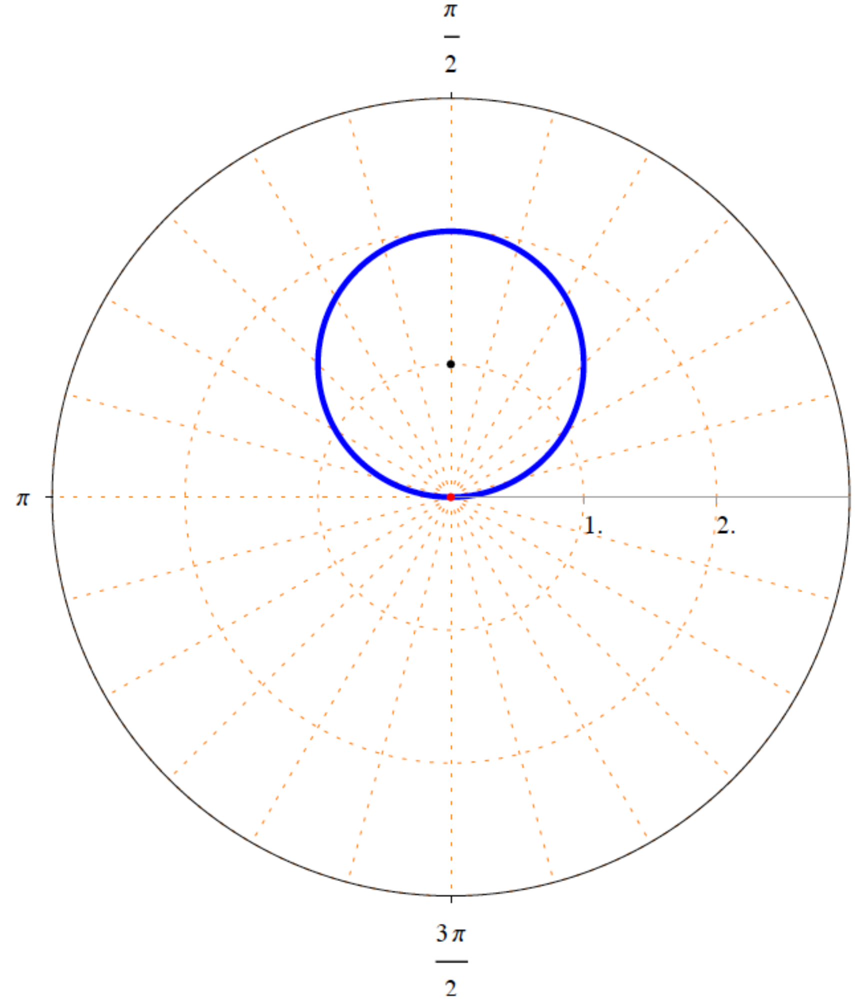
$r = -2\cos\theta\ , \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$r = 2\sin\theta\ ,\ 0 \le \theta \le \pi$ (5)

المعادلة $r = 2\sin\theta$ تمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 1 .



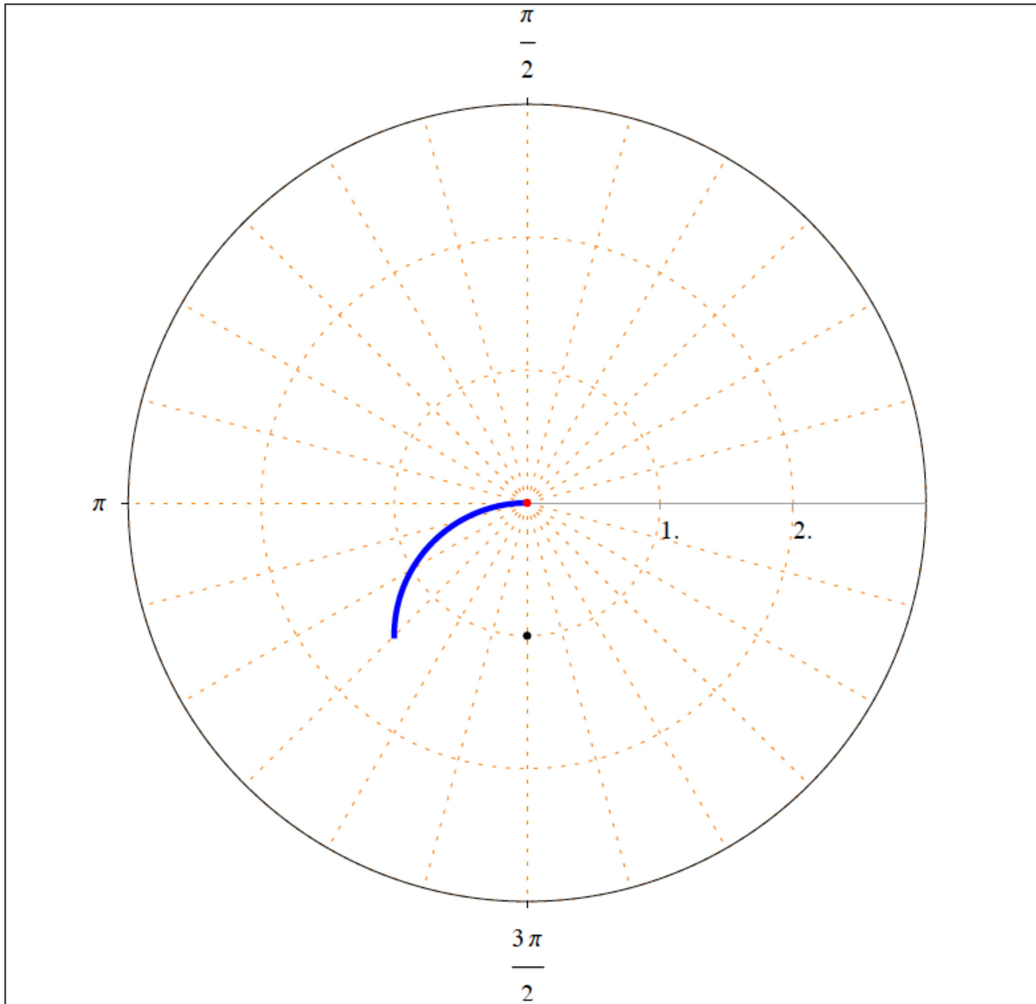
$r = 2\sin\theta\ ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$



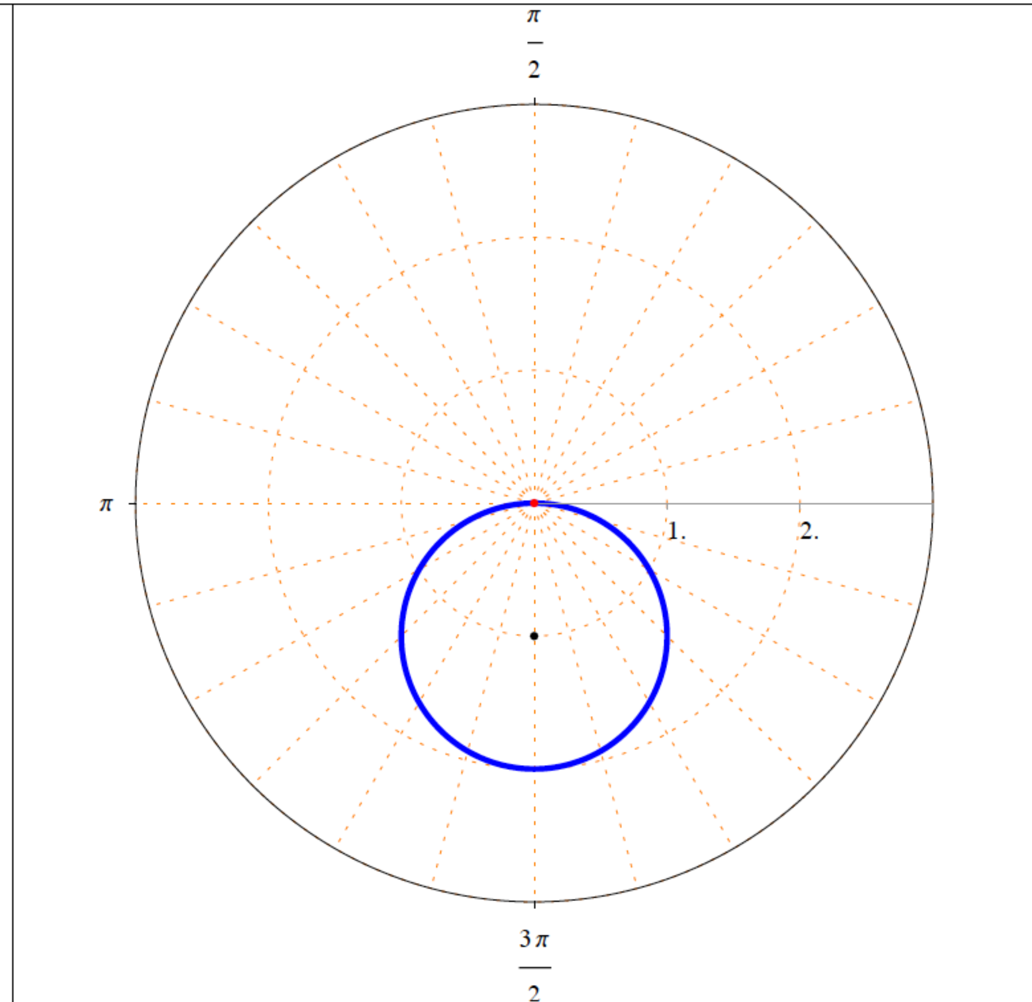
$r = 2\sin\theta\ ,\ 0 \le \theta \le \pi$

(6) $r = -2\sin\theta \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi$

المعادلة $r = -2\sin\theta$ تمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(-1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 1 .



$r = -2\sin\theta \ , \ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$



$r = -2\sin\theta \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi$

ثالثاً - المنحنيات القلبية :

(1) المعادلة القطبية $r = a(1 \pm \cos\theta)$ حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ تمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

(2) المعادلة القطبية $r = a(1 \pm \sin\theta)$ حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ تمثل منحنى قلبي متناظر حول الخط المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

مثال : أرسم المنحنيات القطبية التالية

(1) $r = 2 + 2\cos\theta$

(2) $r = 2 - 2\cos\theta$

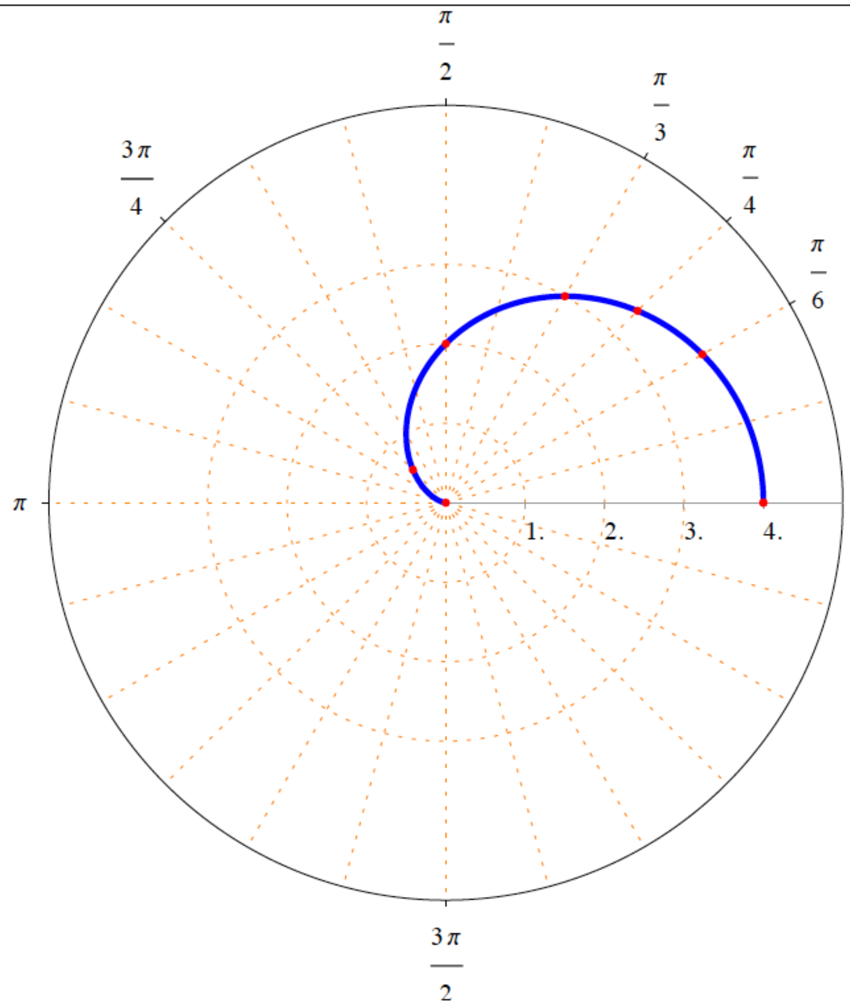
(3) $r = 2 + 2\sin\theta$

(4) $r = 2 - 2\sin\theta$

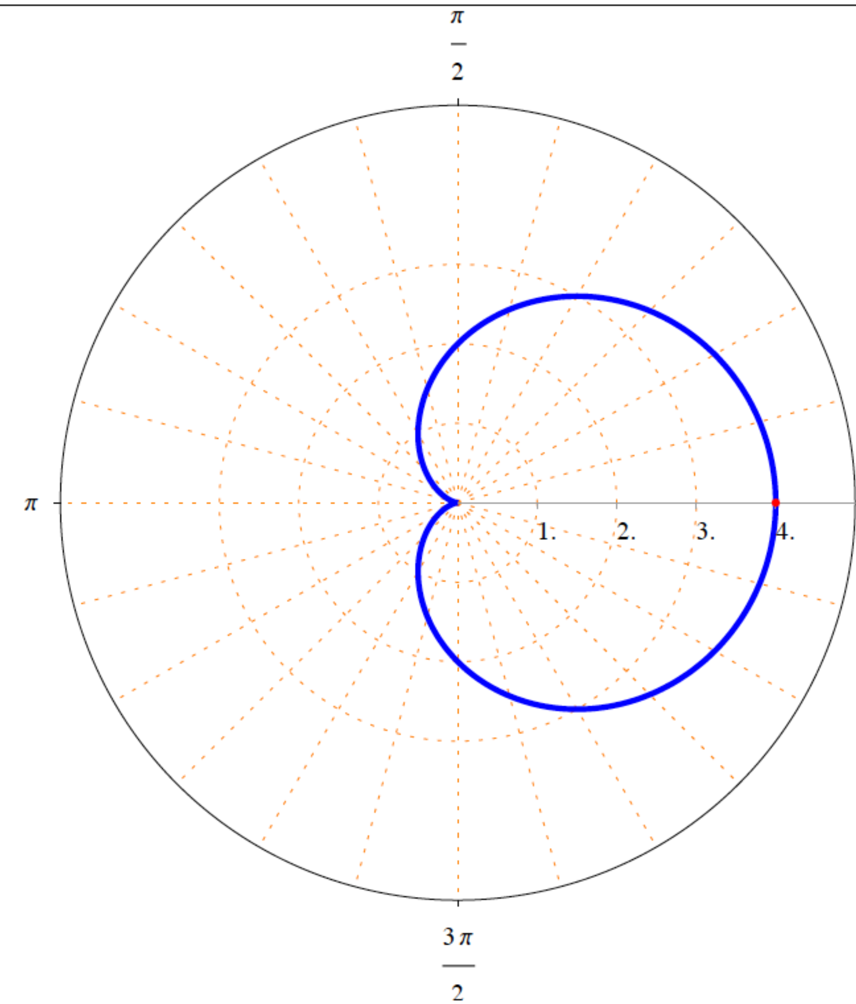
الحل : $(1)\;\; r = 2 + 2\cos\theta$

لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المحور القطبي .

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r(\theta)$	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	$2-\sqrt{2}$	0



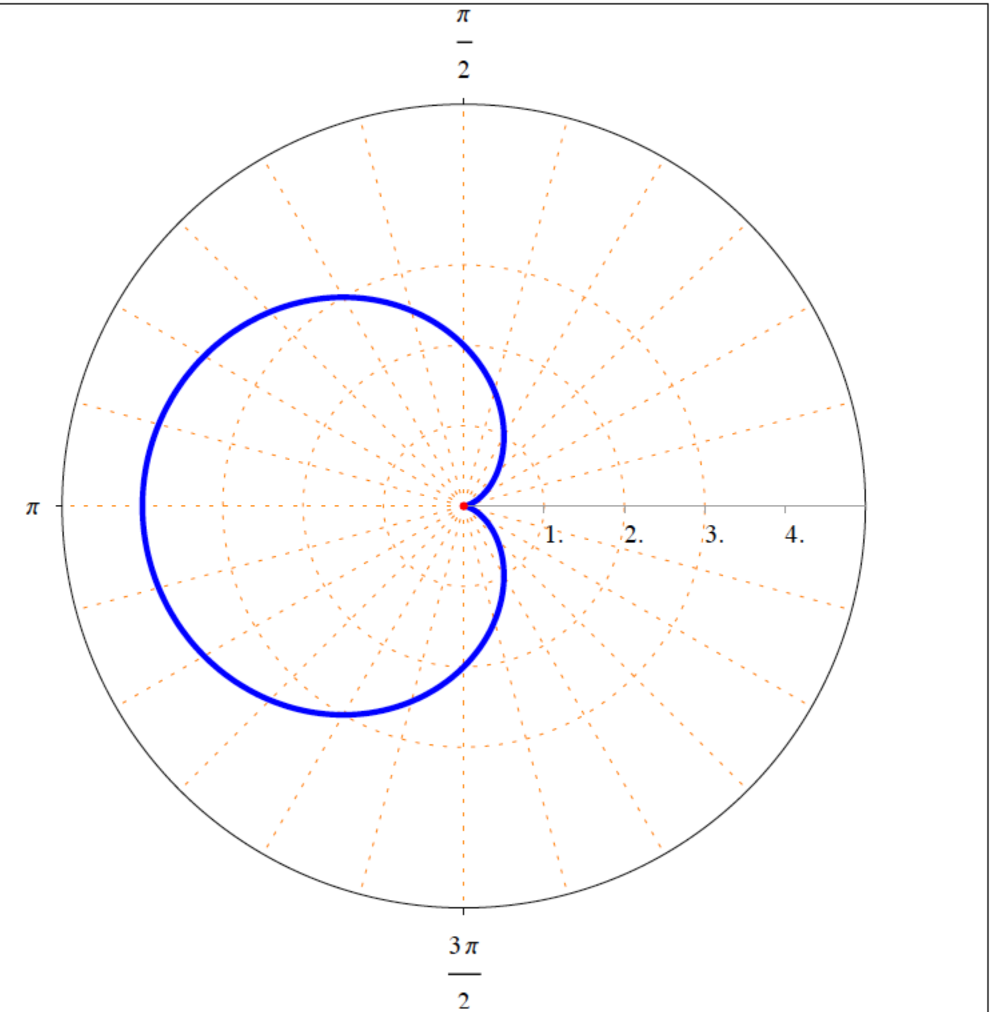
$r = 2 + 2\cos\theta \;,\;\; 0 \le \theta \le \pi$



$r = 2 + 2\cos\theta \;,\;\; 0 \le \theta \le 2\pi$

$$r = 2 - 2\cos\theta \quad (2)$$

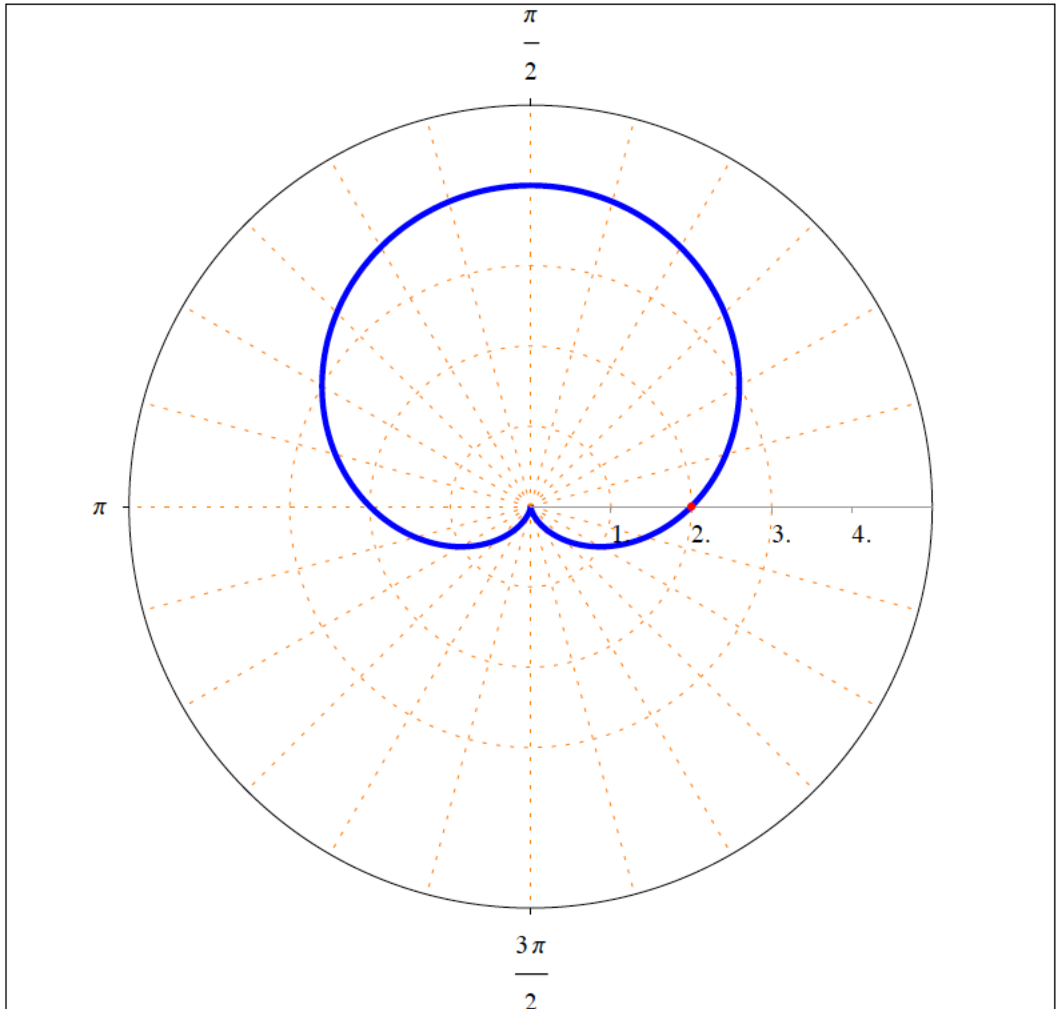
لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المحور القطبي .



$$r = 2 - 2\cos\theta \;,\;\; 0 \le \theta \le 2\pi$$

$r = 2 + 2\sin\theta \;\; (3)$

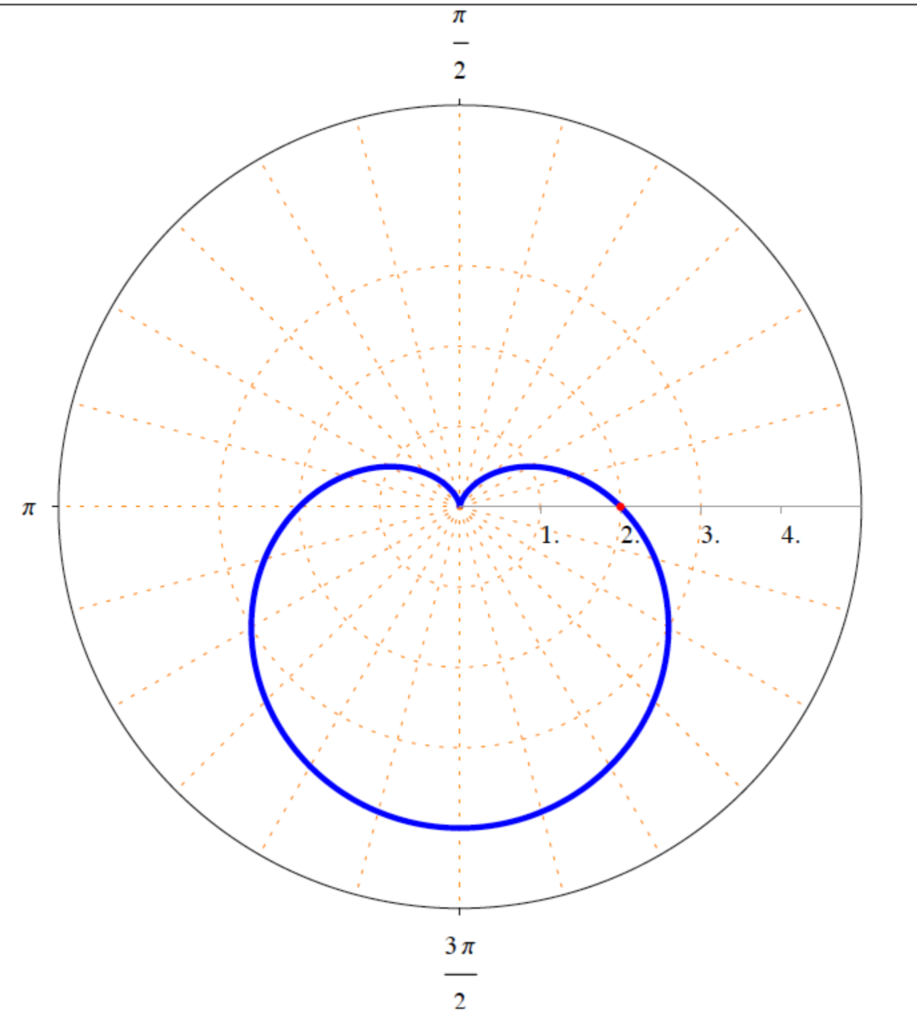
لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المستقيم $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.



$$r = 2 + 2\sin\theta \;\; , \;\; 0 \le \theta \le 2\pi$$

$r = 2 - 2\sin\theta \quad (4)$

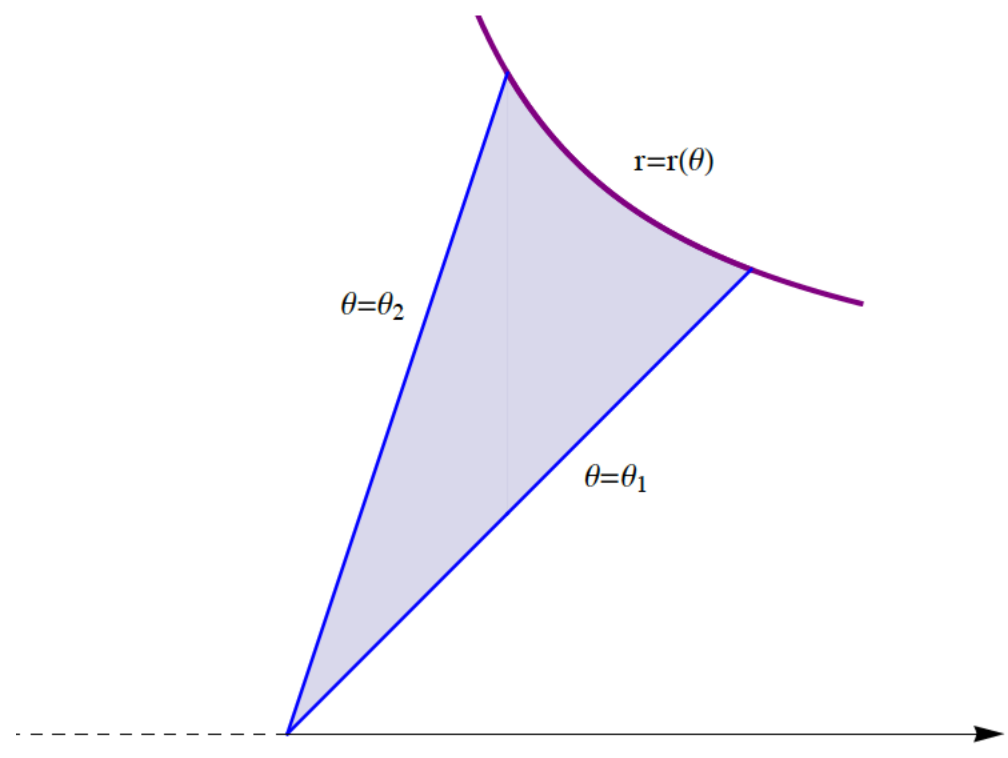
لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.



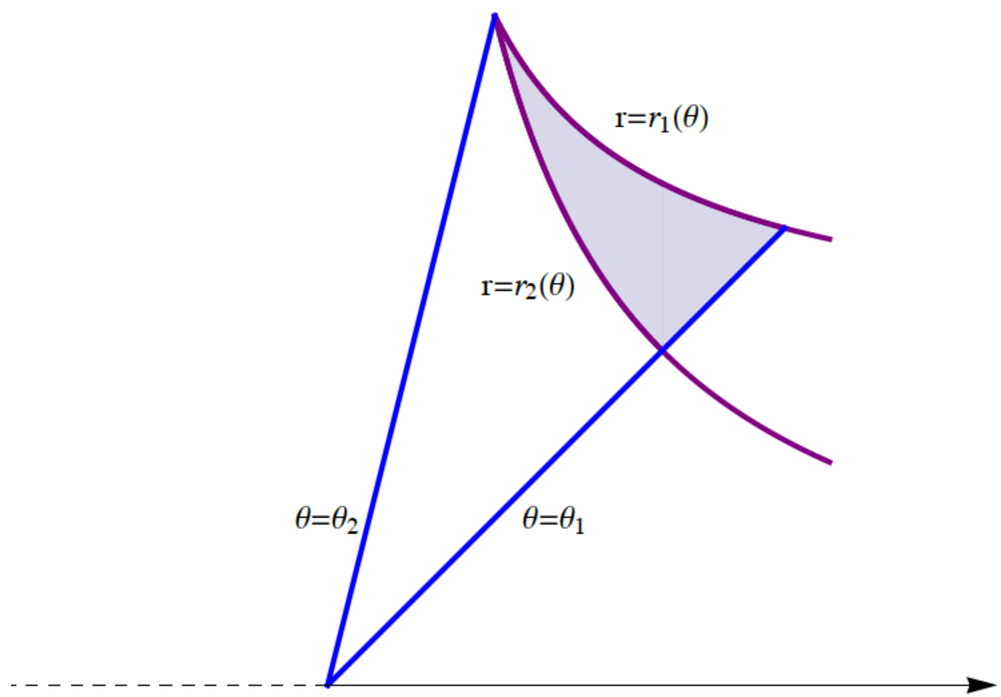
$r = 2 - 2\sin\theta \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi$

4.8 المساحات في الإحداثيات القطبية

إذا كانت الدالة $r = r(\theta)$ دالة متصلة و موجبة فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $r(\theta)$ والمستقيمين $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ تساوي $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [r(\theta)]^2 \ d\theta$



مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات القطبية $r_1(\theta)$ و $r_2(\theta)$ و $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ تساوي $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left([r_1(\theta)]^2 - [r_2(\theta)]^2\right)\, d\theta$

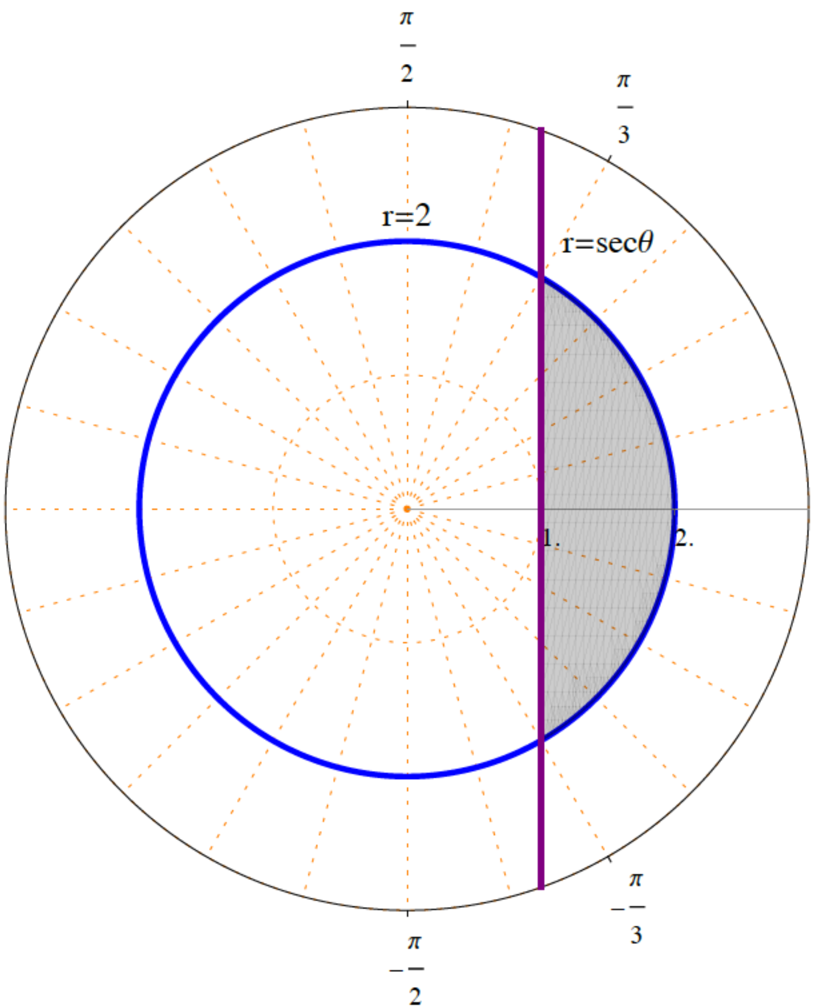


مثال : أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2$ وإلى اليمين من المستقيم $r = \sec\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

المنحنى $r = \sec\theta$ يمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي في النقطة $(r, \theta) = (1, 0)$.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2$ مع المنحنى $r = \sec\theta$:

$$\sec\theta = 2 \implies \frac{1}{\cos\theta} = 2 \implies \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = -\frac{\pi}{3} \ , \ \theta = \frac{\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي .

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[(2)^2 - (\sec\theta)^2\right] \, d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4 - \sec^2\theta\right) \, d\theta$$

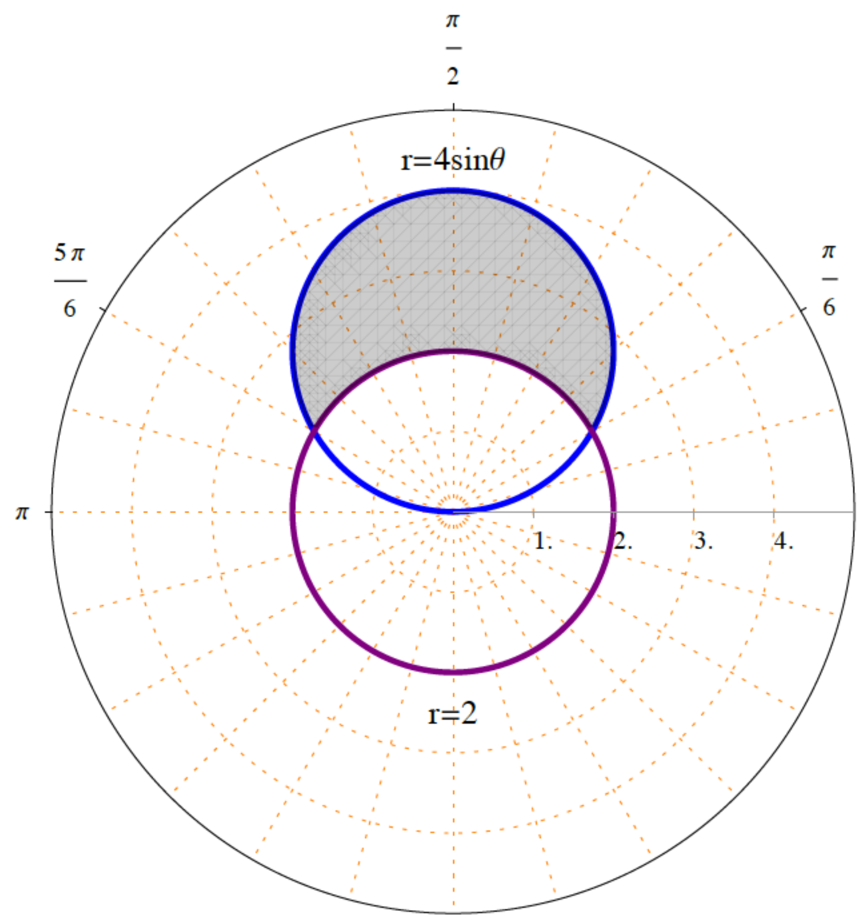
$$= \left[4\theta - \tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(4\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - (4(0) - \tan(0)) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 4\sin\theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

المنحنى $r = 4\sin\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 4\sin\theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$4\sin\theta = 2 \implies \sin\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6} \;,\; \theta = \frac{5\pi}{6}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(4\sin\theta)^2 - (2)^2\right]\, d\theta\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(16\sin^2\theta - 4\right)\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[16\,\frac{1}{2}\,(1-\cos 2\theta) - 4\right]\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8 - 8\cos\theta - 4)\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 8\cos\theta)\, d\theta = \left[4\theta - 4\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[4\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\sin\left(4\,\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[4\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\sin\left(2\,\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= (2\pi - 4\sin(2\pi)) - \left(\frac{2\pi}{3} - 4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

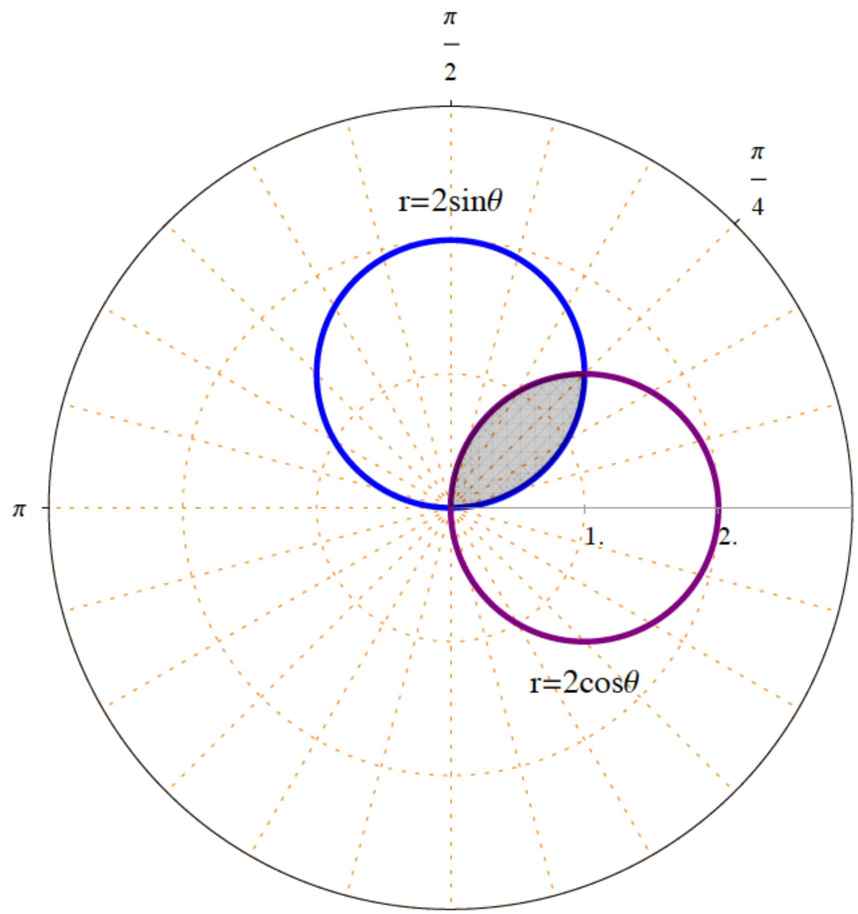
$$= 2\pi - 0 - \frac{2\pi}{3} + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

مثال : أوجد مساحة المنطقة المشتركة بين المنحنيين $r = 2\cos\theta$ و $r = 2\sin\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2\sin\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 1 .

المنحنى $r = 2\cos\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = (1,0)$ ونصف قطرها 1 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2\sin\theta$ مع المنحنى $r = 2\cos\theta$:

$$2\sin\theta = 2\cos\theta \implies \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1 \implies \tan\theta = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\sin^2\theta)\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[4\,\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right]\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[4\,\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2-2\cos 2\theta)\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2+2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\theta - \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left[2\theta + \sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - (0-0)\right] + \frac{1}{2}\left[(\pi+0) - \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\right]$$

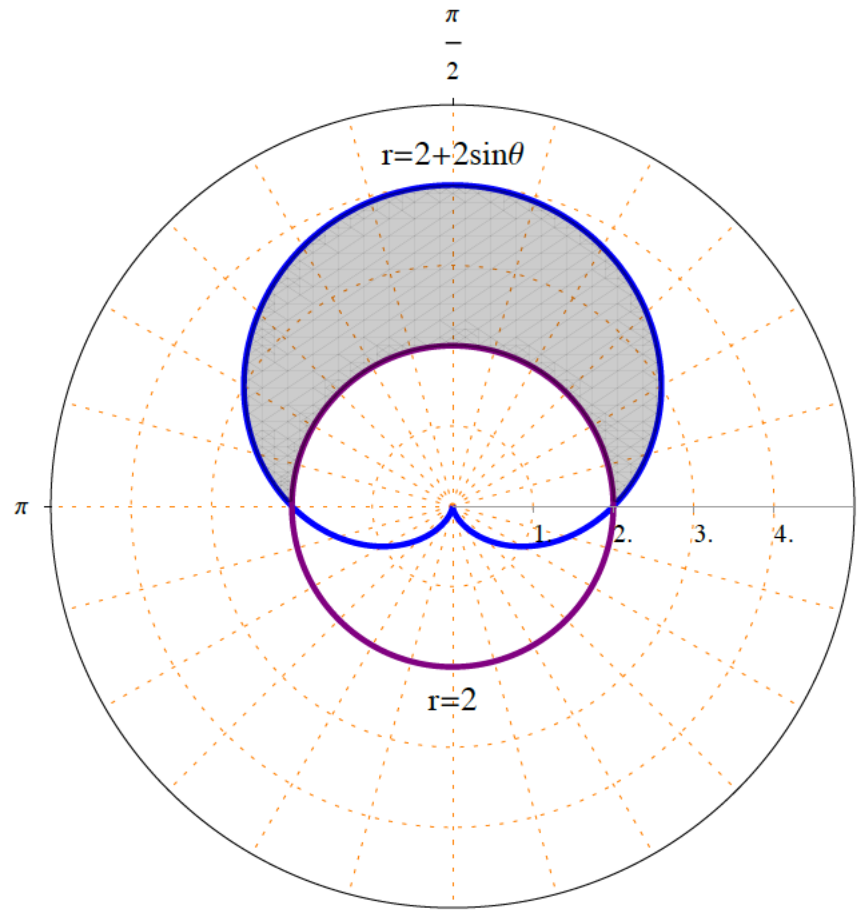
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2\sin\theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2\sin\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2\sin\theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$2 + 2\sin\theta = 2 \implies \sin\theta = 0 \implies \theta = 0 \ , \ \theta = \pi$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2 + 2\sin\theta)^2 - (2)^2\right] \, d\theta\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(4 + 8\sin\theta + 4\sin^2\theta) - 4\right] \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\sin\theta + 4\sin^2\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8\sin\theta + 4\,\frac{1}{2}\,(1 - \cos 2\theta)\right] \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 8\sin\theta - 2\cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \left[2\theta - 8\cos\theta - \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\,\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[2\,(0) - 8\cos\,(0) - \sin\,(2\,(0))\right]$$

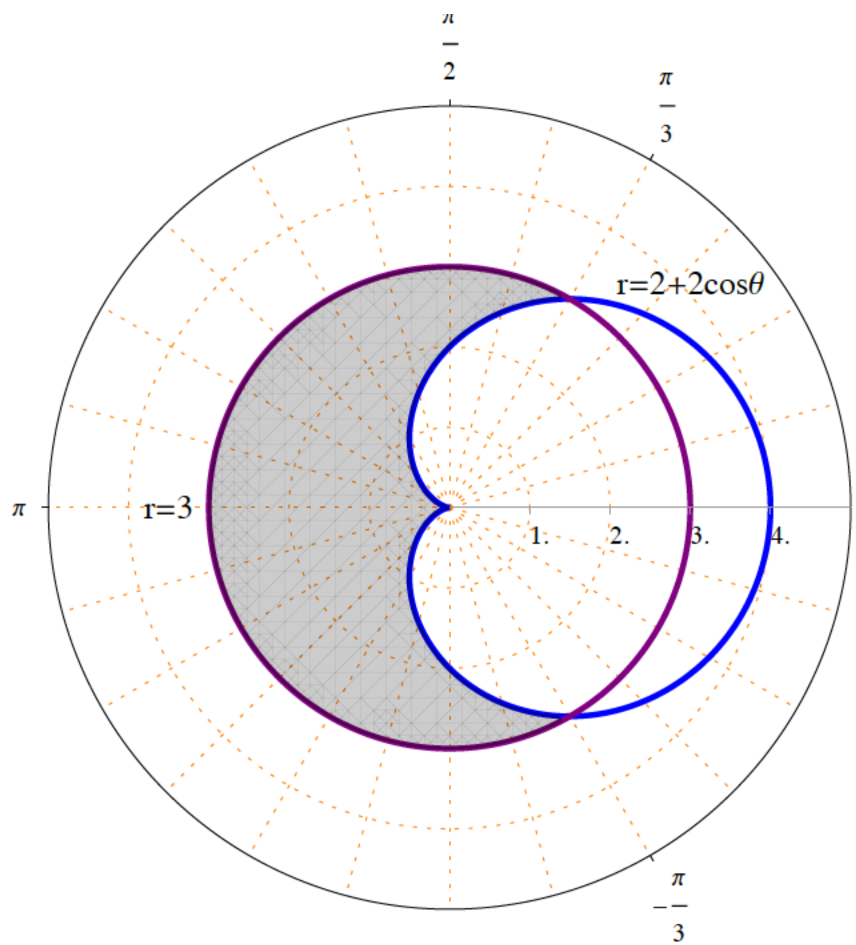
$$= (\pi - 0 - 0) - (0 - 8 - 0) = 8 + \pi$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3$ وخارج المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$2 + 2\cos\theta = 3 \implies \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = -\frac{\pi}{3} \ , \ \theta = \frac{\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي .

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[(3)^2 - (2 + 2\cos\theta)^2\right] \, d\theta\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[9 - (4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta)\right] \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[5 - 8\cos\theta - 4\,\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3 - 8\cos\theta - 2\cos 2\theta)\, d\theta = \left[3\theta - 8\sin\theta - \sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$= \left[3\,(\pi) - 8\sin\,(\pi) - \sin\,(2\pi)\right] - \left[3\left(\frac{\pi}{3}\right) - 8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \left[3\pi - 8(0) - (0)\right] - \left[\pi - 8\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2}\right]$$

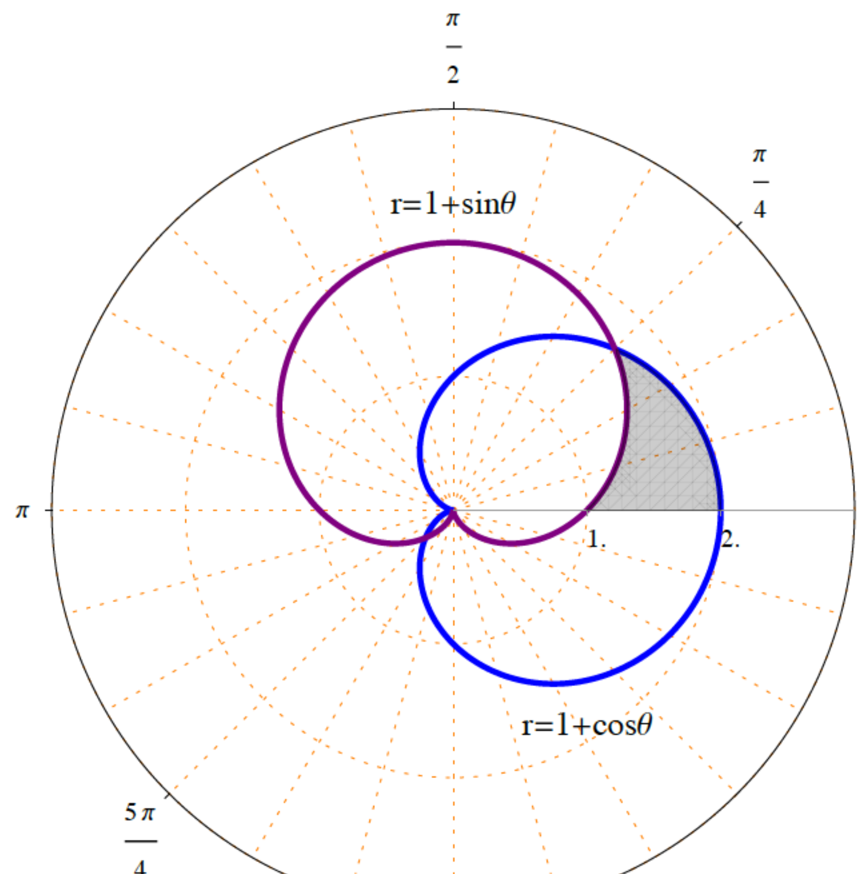
$$= 3\pi - \pi + 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول و داخل المنحنى $r = 1 + \cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 1 + \sin\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 1 + \cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 1 + \sin\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1 + \cos\theta$ مع المنحنى $r = 1 + \sin\theta$:

$$1 + \cos\theta = 1 + \sin\theta \implies \cos\theta = \sin\theta \implies \theta = \frac{\pi}{4} \ , \ \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1+\cos\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2\right] \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) - (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\right] \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[2\cos\theta - 2\sin\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta)\right] \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[2\cos\theta - 2\sin\theta + \cos 2\theta)\right] \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sin\theta + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(2(0) + 2(1) + \frac{1}{2}(0)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - 0 - 2 - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{3}{4}$$