حساب التكامل

111 ريض

الأسبوع الحادي عشر

الأهداف:

- حساب حجوم الأجسام الدورانية باستعمال طريقة الشرائح الاسطوانية
- نتناول في هذا البند حساب طول القوس
- نتناول في هذا البند حساب مساحة سطح الدوران

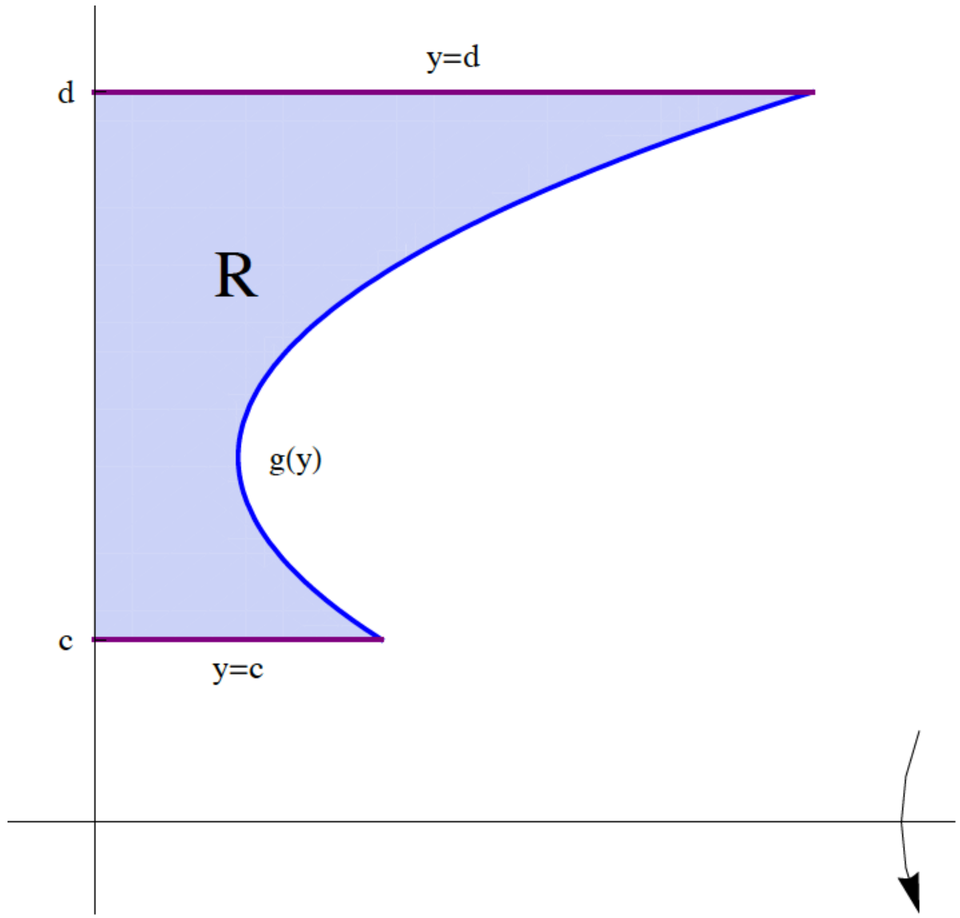
2.7 حجوم أجسام الدوران

- ✓ أولاً - الأقراص الأسطوانية :
- ✓ ثانياً - طريقة الوردات

ثالثاً - طريقة الشرائح الأسطوانية :

ثالثاً - طريقة الشرائح الأسطوانية :

إذا كانت الدالة $g(y)$ دالة موجبة ومتصلة على الفترة $[c,d]$ و كانت R هي المنطقة المحدودة بالمنحنيات $g(y)$ و $y=c$ و $y=d$ و محور y ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x تساوي $V=2\pi\int_c^d y\,g(y)\,dy$



مثال :

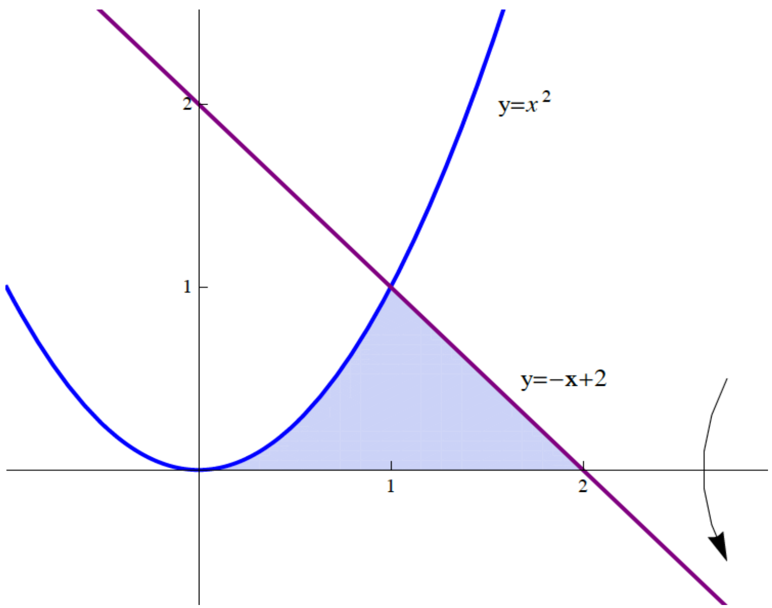
أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = -x + 2$ و $y = 0$ ، حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = -x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0, 2)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y = x^2$ مع $y = -x + 2$:

$$x^2 = -x + 2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

$$\implies x = -2\,,\ x = 1 \implies y = 4\,,\ y = 1$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = -x + 2 \implies x = -y + 2$$

$$V = 2\pi \int_0^1 y\,[(-y+2) - \sqrt{y}]\ dy = 2\pi \int_0^1 y\left(-y - y^{\frac{1}{2}} + 2\right)\ dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(-y^2 - y^{\frac{3}{2}} + 2y\right)\ dy = 2\pi \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + y^2\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + 1\right) - (0 - 0 + 0)\right]$$

$$= 2\pi\left(\frac{-5 - 6 + 15}{15}\right) = 2\pi\left(\frac{4}{15}\right) = \frac{8\pi}{15}$$

مثال : أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=\sqrt{x-1}$ و $y=2$ و $y=0$ و $x=0$ ، حول محور x .

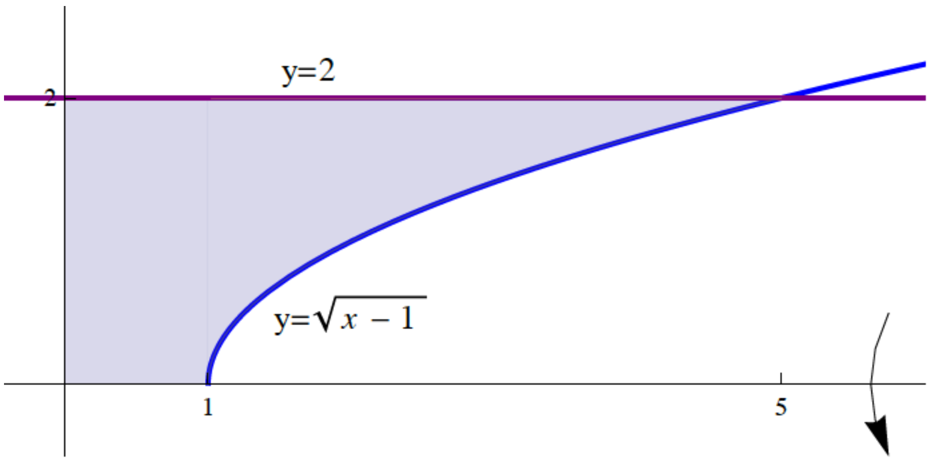
الحل :

المنحنى $y=\sqrt{x-1}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x=y^2+1$ الذي رأسه $(1,0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $y=2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0,2)$.

المنحنى $y=0$ يمثل محور x .

المنحنى $x=0$ يمثل محور y .



باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y=\sqrt{x-1} \implies y^2=x-1 \implies x=y^2+1$$

$$V=2\pi\int_0^2 y\left(y^2+1\right)dy=2\pi\int_0^2\left(y^3+y\right)dy=2\pi\left[\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}\right]_0^2$$

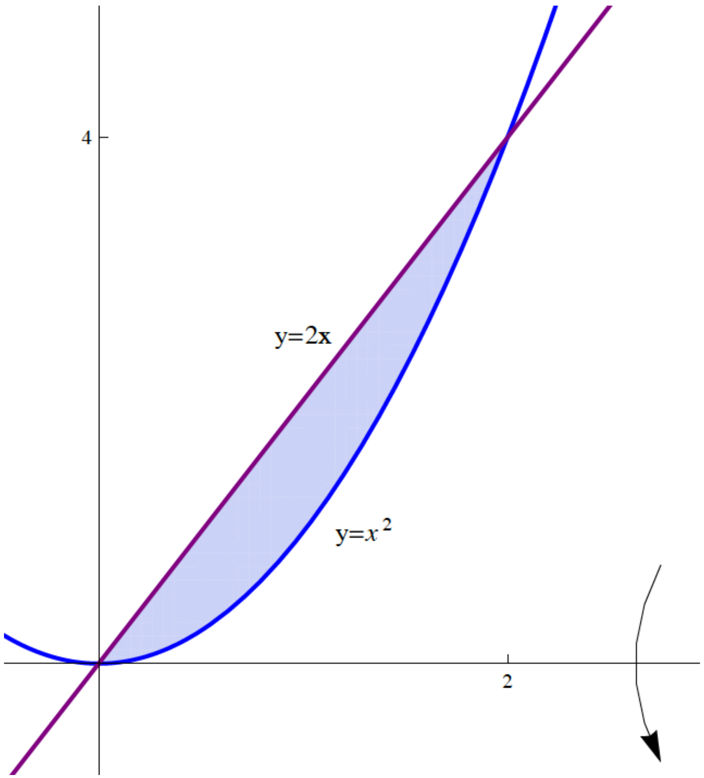
$$=2\pi\left[\left(\frac{16}{4}+\frac{4}{2}\right)-(0+0)\right]=2\pi\,(4+2)=12\pi$$

مثال : أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

$$\implies x = 0\,,\ x = 2 \implies y = 0\,,\ y = 4$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = 2x \implies x = \frac{1}{2}y$$

$$V = 2\pi \int_0^4 y\ \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y\right)\ dy = 2\pi \int_0^4 \left(y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2\right)\ dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\pi\left[\left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{(4)^3}{6}\right) - (0-0)\right]$$

$$= 2\pi\left(\frac{64}{5} - \frac{64}{6}\right) = 128\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{128}{30}\pi = \frac{64}{15}\pi$$

3.7 طول القوس

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ فإن طول منحنى الدالة f من $x=a$ إلى $x=b$ يساوي $L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

مثال : أحسب طول القوس للدالة $y=1+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ من $x=0$ إلى $x=3$.

الحل :

$$f(x)=1+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \implies f'(x)=x^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_0^3 \sqrt{1+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx=\int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\left[\frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{2}{3}(8)-\frac{2}{3}(1)=\frac{16-2}{3}=\frac{14}{3}$$

مثال :

أحسب طول القوس للدالة $y = \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 2$.

الحل :

$$f(x) = \cosh x \implies f'(x) = \sinh x$$

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x}\, dx = \int_0^{\ln 2} \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^{\ln 2}$$

$$= \sinh(\ln 2) - \sinh(0) = \sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \implies \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

مثال :

أحسب طول القوس $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ من $x=1$ إلى $x=2$.

الحل :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x \implies f'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{1}{x}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$$

$$\mathrm{L}=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}\right)}\,dx$$

$$=\int_1^2\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left|\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right|\,dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)\,dx=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^2=\left[\left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 1\right)\right]$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}$$

مثال : أحسب طول القوس للدالة $y = \sqrt{4-x^2}$ من $x = -2$ إلى $x = 2$.

الحل :

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}}\, dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx = 2\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$$

$$= 2\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2} = 2\left[\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)\right] = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi$$

4.7 مساحة سطح الدوران

إذا كانت الدالة f موجبة و قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران الدالة f من $x = a$ إلى $x = b$ حول محور x تساوي $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

مثال :

أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \frac{1}{3}x^3$ ، $0 \leq x \leq 1$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \implies f'(x) = x^2$$

$$S = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}x^3\sqrt{1 + (x^2)^2}\, dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^3\sqrt{1 + x^4}\, dx$$

$$= \frac{2\pi}{3}\frac{1}{4}\int_0^1 \left(1 + x^4\right)^{\frac{1}{2}} (4x^3)\, dx = \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}(1 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1 + 0)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{9}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

مثال :

أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y=\sqrt{x}$ ، $1\le x\le 4$ حول محور x .

الحل :

$$f(x)=\sqrt{x} \implies f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$S=2\pi\int_1^4 \sqrt{x}\,\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=2\pi\int_1^4 \sqrt{x}\,\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$$

$$=2\pi\int_1^4 \sqrt{x}\,\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx=2\pi\int_1^4 \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$=2\pi\,\frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4x+1}\,dx=\pi\int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\pi\,\frac{1}{4}\int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}}(4)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(17)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{\pi}{6}\left[(17)^{\frac{3}{2}}-(5)^{\frac{3}{2}}\right]$$

مثال :

أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{9-x^2}$ ، $-3 \le x \le 3$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} \implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \sqrt{1 + \frac{x^2}{9-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \sqrt{\frac{(9-x^2)+x^2}{9-x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \sqrt{\frac{9}{9-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = 6\pi \int_{-3}^{3} 1\, dx$$

$$= 6\pi\, [x]_{-3}^{3} = 6\pi[3-(-3)] = 6\pi\,(6) = 36\pi$$