حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الثالث

المتسلسلات SERIES

- مقـــدمـــة
- المتتابعات غير المنتهية
- المتتابعات المتقاربة
- **المتسلسلات غير المنتهية**
- **المتسلسلات ذات الحدود الموجبة**
- **اختبـــاري النسبة والجذر**
- **المتسلسلات المترددة والتقارب المطلق**

●المتسلسلات غير المنتهية
Infinite Series

(٣–٧–١) تعريف

لتكن $\{a_n\}_1^\infty$ متتابعة. يسمى التركيب $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$ (٢)

متسلسلة غير منتهية (أو متسلسلة)، وباستخدام رمز المجموع نكتب (٢) على الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ أو } \sum a_n$$

كل عدد a_k يسمى حدا للمتسلسلة، كما يسمى a_n الحد النوني أو الحد العام للمتسلسلة.

يحدث أحيانا التباس بين مفهوم المتسلسلة ومفهوم المتتابعة. تذكر أن المتسلسلة تركيب يمثل مجموع غير منته لأعداد. بينما المتتابعة تجمع لأعداد تكون في تقابل مع مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. نقدم الآن نوعا خاصا من المتتابعات التي نحصل عليها باستخدام حدود المتسلسلة. من المتتابعة

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

نكون متتابعة جديدة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ وذلك بجمع العناصر المتعاقبة للمتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ التي حصلنا عليها بهذه الطريقة تسمى متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة

(٣-٧-٢) تعريف

(i) نعرف المجموع الجزئي النوني s_n للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنه

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

(ii) نعرف متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنها المتتابعة

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

مثال

أوجد المتسلسلة التي متتابعة المجاميع الجزئية لها هي $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

الحل

بما أن $s_1 = \frac{1}{2}$ فإن $a_1 = \frac{1}{2}$. إذا كان $n > 1$ فإن

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n}$$

كذلك فإن المتسلسلة هي: $\frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

مثال من المتتابعة $\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}_1^{\infty}$ كون متتابعة المجاميع الجزئية ثم اكتب المتسلسلة.

الحل

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{3}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$\vdots$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

وهي متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

مثال

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة

(ا) أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ب) أوجد صيغة جبرية للحد النوني s_n بدلالة n .

الحل

(ا)

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = s_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$$

(ب) بما أن $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ ، فإنه باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

وبالتالي فإن

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2} ،\quad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} ،\quad a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots \quad a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} ،\quad a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ومن هنا نجد أن

$$s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

بعد إزالة الأقواس والاختصار نحصل على

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

الطريقة التي اتبعناها في المثال السابق تطبق فقط للحالات الخاصة. وبصفة عامة فإنه يتعذر إيجاد صيغة جبرية عامة للحد النوني s_n .

(٣-٧-٣) تعريف

يقال أن المتسلسلة غير المنتهية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ للمتسلسلة متقاربة ، أي إذا كانت $\lim_{n\to\infty} s_n$ موجودة وتساوي عددا حقيقيا S .

النهاية S هي مجموع المتسلسلة ونكتب

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ويقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة إذا كانت $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة. المتسلسلة المتباعدة ليس لها مجموع.

مثال

اثبت أن المتسلسلة التالية متقاربة وأن مجموعها 2 .

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

الحل

من مثال (١) نجد أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة هي $\{s_n\}$ ، حيث

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \qquad (٣)$$

لإثبات أن للمتسلسلة مجموع علينا إيجاد $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. نستخدم التعبير الجبري التالي لإيجاد صيغة للمجموع s_n .

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

نستخدم المتساوية بوضع $x=1$ و $y=\frac{1}{2}$ نحصل على

$$1-\frac{1}{2^n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-1/2^n}{1/2}$$

بمقارنة هذه المعادلة مع (٣) نحصل على.

$$s_n=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=2$. أي أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها 2 .

مثال

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ المتسلسلة الواردة في مثال (٢). اثبت أن المتسلسلة متقاربة وأوجد مجموعها.

الحل

في مثال (٢)(ب) أثبتنا أن

$$s_n = \frac{n}{n+1}$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

وبالتالي المتسلسلة متقاربة ومجموعها 1 .

تسمى المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ بالمتسلسلة المتداخلة (Telescopic series).

مثال لتكن لدينا المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

(ا) أوجد الحدود الستة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ب) أوجد s_n.

(جـ) اثبت أن المتسلسلة متباعدة.

الحل

(ا) من تعريف (٣-٧-٢)

$$s_1=1,\quad s_2=0,\quad s_3=1,\quad s_4=0,\quad s_5=1 \text{ و } s_6=0$$

(ب) نستطيع كتابة s_n كما يلي:

$$s_n=\begin{cases}1 & \text{إذا كان } n \text{ فرديا}\\ 0 & \text{إذا كان } n \text{ زوجيا}\end{cases}$$

(جـــ) بما أن متسلسلة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتذبذب بين 0 و 1. لذلك فإن $\lim_{n\to\infty} s_n$ غير موجودة. وبالتالي فالمتسلسلة متباعدة.

المتسلسلة التوافقية (Harmonic series)

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ \cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

المتسلسلة التوافقية متباعدة.

المتسلسلات الهندسية (Geometric series)

المتسلسلة الهندسية هي المتسلسلة التي تأخذ الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

حيث أن a و r أعداد حقيقية و $a \neq 0$.

(٣-٧-٤) نظرية (نظرية المتسلسلات الهندسية)

ليكن a و r عددين حقيقيين و $a \neq 0$. المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

متقاربة ومجموعها $\dfrac{a}{1-r}$ لكل r ، حيث $|r| < 1$، ومتباعدة لكل r ، حيث $|r| \geq 1$.

مثال

اثبت أن المتسلسلة التالية متقاربة وأوجد مجموعها:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$$

الحل

المتسلسلة هندسية حيث $r=\frac{1}{3}<1$ و $a=2$، من نظرية (٣–٧–٤) نستنتج أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S=\dfrac{2}{1-1/3}=3$.

مثال

اكتب العدد العشري الدوري $0.3333\overline{3}...$ على صيغة كسر.

الحل

$$0.33333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

وهذه متسلسلة هندسية فيها $1 > r = \frac{1}{10}$ و $a = \frac{3}{10}$، من نظرية (٣-٧-٤) نستنتج أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S = \frac{3/10}{1-3/10} = \frac{1}{3}$.

(٣–٧–٨) نظرية (اختبار للتباعد)

(ا) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ب) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ أو غير موجودة ، فإن المتسلسلة متباعدة.

المتسلسلة	النهاية	الاستنتاج
$\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{3n+5} =$	$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+5} = \frac{1}{3} \neq 0$	متباعدة، وفقا لنظرية (٣–٧–٨)(ب).
$\sum_{1}^{\infty} \frac{e^n}{n} =$	$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = \infty$	متباعدة، وفقا لنظرية (٣–٧–٨)(ب).

تحصيل المتسلسلات (Combinations of series)

(٣-٧-٦) نظرية

(أ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_1^{\infty} b_n$ متسلسلتين متقاربتين مجموعهما T و R على الترتيب، فإن المتسلسلة $\sum_1^{\infty}(a_n + b_n)$ متقاربة أيضا، كما أن

$$\sum_1^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_1^{\infty} a_n + \sum_1^{\infty} b_n = T + R$$

(ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة و c عددا حقيقيا ، فإن المتسلسلة $\sum_1^{\infty} ca_n$ متقاربة، كما أن

$$\sum_1^{\infty} ca_n = c\sum_1^{\infty} a_n = cT$$

(جـ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_1^{\infty} b_n$ كما في (أ) ، فإن $\sum_1^{\infty}(a_n - b_n)$ متقاربة وأن

$$\sum_1^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_1^{\infty} a_n - \sum_1^{\infty} b_n = T - R$$

(د) إذا كانت $\sum_1^{\infty} a_n$ متسلسلة متباعدة و c عددا حقيقيا ، فإن المتسلسلة $\sum_1^{\infty} ca_n$ متباعدة.

مثال

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)}\right)$ متقاربة، ثم احسب مجموعها.

الحل

من نظرية المتسلسلات الهندسية فإن

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{4}{2^n}=\frac{4(1/2)}{1-1/2}=4$$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=3$$

من نظرية (٣-٧-٦)(جـ) نحصل على

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)}\right)=4-3=1$$

مثال

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ متباعدة أو متقاربة.

الحل

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4n}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4}(\frac{1}{n})=\frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

بما أن المتسلسلة التوافقية $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة، فمن نظرية (٣-٧-٦)(جـ) نجد أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

(٣-٧-٧) نظرية

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين تختلفان في الحدود الأولى التي عددها m حدا فقط (أي أن $a_k = b_k$ لكل $k > m$) فإما أن المتسلسلتين متقاربتان أو أنهما متباعدتان.

مثال حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n+4}$ متقاربة أو متباعدة.

الحل

المتسلسلة المعطاة هي

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n+4}=0+0+0+0+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+4}+\cdots$$

وبمقارنتها بالمتسلسلة التوافقية

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

نلاحظ أن المتسلسلتين تختلفان في الحدود الأربعة الأولى. من نظرية (٣-٧-٦) وبما أن المتسلسلة التوافقية متباعدة، فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

نظرية (٣–٧–٨)

لكل عدد صحيح موجب k فإن المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{و} \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + \cdots$$

تكونان متقاربتين معا أو متباعدتين معا. وأيضا إذا كانت المتسلسلتان متقاربتين فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

نظرية (٣–٧–٩)

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ متباعدة.

مثال

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4^n}\right)$ متقاربة أو متباعدة.

الحل

أثبتنا في مثال (١١) أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ متباعدة كما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ هندسية

فيها $1 > \frac{1}{4} = |r|$ فهي متقاربة. من نظرية (٣-٧-٩) نستنتج أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

●المتسلسلات ذات الحدود الموجبة (اختبار التكامل واختبار المقارنة)
(Integral and Comparison tests) Positive Term Series

(٣–٩–١) نظرية

المتسلسلة الموجبة متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية محدودة من أعلى.

(٣–٩–٢) نظرية (اختبار التكامل)

لتكن $\sum_1^\infty a_n$ متسلسلة موجبة، ولتكن f دالة متصلة ومتناقصة معرفة على الفترة $[1,\infty)$ بحيث

$$f(n)=u_n \quad \text{لكل} \quad n\geq 1 \qquad (١)$$

عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ متقاربا .

مثال اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ متباعدة .

الحل

بما أن المتسلسلة موجبة ، لذلك نستخدم اختبار التكامل. نعرف

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x} \text{ لكل } x \geq 2$$

بما أن x و $\ln x$ متصلتان و $0 > f'(x)=\frac{-(1+\ln x)}{(x\ln x)^2}$ فإن الدالة متصلة ومتناقصة على الفترة $[2,\infty)$ وأيضا $f(n)=\frac{1}{n\ln n}$ لكل $n\geq 2$ ،لذلك نستطيع استخدام اختبار التكامل

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_2^{t} \frac{1}{x\ln x}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\ln (\ln x) - \ln (\ln 2)] = \infty$$

أي أن التكامل المعتل متباعد وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

(٣–٩–٣) تعريف

متسلسلة – p ، هي المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

حيث أن p عدد حقيقي.

(٣–٩–٤) نظرية

متسلسلة – p ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

(ا) متقاربة لكل $p > 1$

(ب) متباعدة لكل $p \leq 1$

مثال اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

الحل

لاحظ أن

$$\frac{1}{2\sqrt{n}-1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متسلسلة - p حيث $p = \frac{1}{2}$، لذلك فهي متباعدة. ومن ثم فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ أيضا متباعدة. نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ متباعدة.

(٣–٩–٥) نظرية (اختبار المقارنة Comparison test)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين موجبتين

(أ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة و $a_n \le b_n$ لكل $n \ge 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة كما أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة و $b_n \le a_n$ لكل $n \ge 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

مثال اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ متقاربة.

الحل

نعلم من نظرية المتسلسلات الهندسية أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ متقاربة. بما أن

$$\frac{1}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

لذلك نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ متقاربة.

مثال اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ متقاربة.

الحل

نعلم من نظرية المتسلسلات الهندسية أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ متقاربة. بما أن

$$\frac{1}{2^n+1} \le \frac{1}{2^n} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

لذلك نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ متقاربة.

مثال

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

الحل

لاحظ أن

$$\frac{1}{2\sqrt{n}-1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{لكل } n \geq 1$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متسلسلة - p حيث $p = \frac{1}{2}$ ، لذلك فهي متباعدة. ومن ثم فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ أيضا متباعدة. نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ متباعدة.

(٣–٩–٦) نظرية (اختبار نهاية المقارنة Limit comparison test)

لتكن $\sum_{1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين موجبتين. عندئذ

(أ) إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ فإما أن المتسلسلتين كلاهما متقاربتان أو كلاهما متباعدتان.

(ب) إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(جـ) إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

مثال اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3-2}{2^n(3n^3-5n+6)}$.

الحل

بحذف جميع الحدود من البسط والمقام باستثناء الحدود ذات الأس الأكبر، نحصل على

$$\frac{5n^3}{2^n(3n^3)} = \frac{5}{32^n}$$

نختار $b_n = \frac{1}{2^n}$. بتطبيق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-2}{2^n(3n^3-5n+6)} \times \frac{2^n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-2}{3n^3-5n+6} = \frac{5}{3} > 0$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ هي متسلسلة هندسية، من نظرية المتسلسلات الهندسية فهي متقاربة (حيث $r = \frac{1}{2} < 1$). ومنه فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

مثال

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}}$.

الحل

نكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ كما فعلنا في المثال السابق فنحصل على

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8n^2}}=\frac{1}{2n^{2/3}}$$

نختار $b_n=\frac{1}{n^{2/3}}$، بتطبيق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}}\times\frac{n^{2/3}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{\sqrt[3]{8n^2-5n}}=\frac{1}{2}>0$$

لكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ هي متسلسلة p – حيث $p=\frac{2}{3}<1$ وبالتالي فهي متباعدة، ومنه فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

● اختباري النسبة والجذر

(٣-١١-١) نظرية (اختبار النسبة)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة ، ولنفرض أن $a_n \neq 0$ لكل n وأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(ا) إذا كان $0 \leq L < 1$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) إذا كان $L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

(جـ) إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة ام متباعدة. وفي هذه الحالة لا بد من استخدام اختبار آخر.

مثال

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

الحل

بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{5^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$$

بالتالي المتسلسلة متقاربة.

مثال

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

الحل

نطبق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

وبما أن $\frac{1}{e} < 1$، فإن المتسلسلة متقاربة.

(٣-١١-٢) نظرية (اختبار الجذر)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة ، نفرض أن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

(ا) إذا كان $0 \le L < 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) إذا كان $L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

(جـ) إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة. وفي هذهِ الحالة لا بد من استخدام اختبار آخر.

مثال

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$.

الحل

يتضمن a_n في تعريفه 2^{n^2}، وبالرغم من ذلك فإن اختبار النسبة أفضل هنا من اختبار الجذر.

بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}} \times \frac{2^{n^2}}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0$$

بالتالي المتسلسلة متقاربة.

مثال

اختبر تباعد أو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n$.

الحل

نستخدم في هذا المثال اختبار الجذر، لأن a_n مرفوع للأس n ، فنحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1000}=\infty$$

وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

● المتسلسلات المترددة والتقارب المطلق

المتسلسلات المترددة (Alternating series)

المتسلسلة المترددة هي المتسلسلة التي تتعاقب حدودها بين الموجب والسالب. أي المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

أو

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n} a_n + \cdots$$

حيث $a_n > 0$ لكل $n \geq 1$.

(٣-١٣-١) نظرية(اختبار المتسلسلات المترددة Alternating series test)

المتسلسلة المترددة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

متقاربة إذا تحقق الشرطان التاليان:

(ا) المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تناقصية ، أي $a_{n+1} \leq a_n$ لكل n

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

مثال

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$.

الحل

المتسلسلة مترددة ، نطبق اختبار المتسلسلة المترددة.

(ا) نضع $a_n = f(n) = \frac{(\ln n)^2}{n}$ ، وباستخدام المشتقة نحصل على

$$f'(x) = -\frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x[2 - \ln x]}{x^2}$$

لكن $\frac{\ln x}{x^2} > 0$ لكل $x \geq 2$ ، كذلك $2 - \ln x < 0$ لكل $x \geq 9$ ، ومنه فإن المتتابعة $\left\{(\ln n)^2 / n\right\}_{n=9}^{\infty}$ متناقصة

(ب) باستخدام قاعدة لوبيتال مرتين نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

وبالتالي فالمتسلسلة متقاربة.

(٣-١٣-٢) نظرية

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ متسلسلة مترددة تحقق الشرطين (ا) و (ب) الواردين في اختبار المتسلسلة المترددة. إذا كان S مجموع المتسلسلة وكان s_n المجموع الجزئي النوني، فإن

$$|S-s_n|\le a_{n+1}$$

أي أن قيمة الخطأ في تقريب S بالمجموع s_n أصغر من أو تساوي a_{n+1} .

مثال

اثبت أن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}+\cdots$$

متقاربة وأوجد قيمة تقريبية لمجموعها بخطأ مقداره أصغر من 0.000005 .

الحل

نطبق اختبار المتسلسلة المترددة ، $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)!}=0$ ، كذلك فإن $a_n > a_{n+1}$ لكل n ، ومنه فإن المتسلسلة متقاربة. من نظرية (٣-١٣-٢) إذا استخدمنا s_n لتقريب مجموع المتسلسلة S ، فان قيمة الخطأ في التقريب أصغر من أو تساوي $a_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)!}$ ، بحساب عدة قيم للحد a_{n+1} نجد

$$a_4 \approx 0.0001984, a_3 \approx 0.0083333, a_2 \approx 0.1666666, a_1 \approx 1$$
$$a_6 \approx 0.00000003, a_5 \approx 0.0000028$$

وبالتالي عندما $n = 4$ فإن

$$a_5 = \frac{1}{9!} \approx 0.0000028 < 0.000005$$

أي أن المجموع الجزئي s_4 يعطي قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة S بخطأ مقداره أصغر من 0.000005 . بما أن

$$s_4 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} \approx 0.841468$$

فإن $S = 0.841468$.

لإيجاد قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة S بخطأ مقداره أصغر من العدد c ، نجد أصغر عدد صحيح موجب n يحقق المتراجحة $a_{n+1} < c$.

التقارب المطلق والتقارب الشرطي

(٣-١٣-٣) نظرية

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة .

مثال

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$.

الحل

نعلم أن $-1 \le \sin n \le 1$ وبما أن $n^3 > 0$ لكل n وبحساب عدد قليل من حدود المتسلسلة نلاحظ أنها ليست موجبة ولا مترددة. لذلك لا يمكن تطبيق أيا من الاختبارات السابقة مباشرة.

ولاختبار هذه المتسلسلة نختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin n/n^3\right|$ بما أن $\left|\sin n/n^3\right| \le \frac{1}{n^3}$ ، كذلك بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ متقاربة لأنها متسلسلة- p حيث $p = 3$ ، فمن اختبار المقارنة، نجد أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin n/n^3\right|$ متقاربة، ومن نظرية (٣-١٣-٣) فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

(٣-١٣-٤) تعريف (التقارب المطلق والتقارب الشرطي)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة

(ا) يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقاربا مطلقا (أو متقاربة مطلقا Converges absolutely)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة.

(ب) يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقاربا شرطيا (أو متقاربة شرطيا Converges conditionally)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة.

طبقا لهذه التسميات فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ متقاربة مطلقا والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ متقاربة شرطيا. بالطبع فإن المتسلسلات الموجبة المتقاربة متقاربة مطلقا. يمكن تصنيف أي متسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ على أنها واحدة فقط من المتسلسلات الثلاثة التالية:

(ا) متقاربة مطلقا (ب) متقاربة شرطيا (جـ) متباعدة.

(٣-١٣-٥) نظرية (تعميم اختبارات التقارب)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة

(ا) **تعميم اختبار المقارنة** . إذا كانت $|b_n| \le |a_n|$ لكل $n \ge 1$ وإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا .

(ب) **تعميم اختبار النهاية للمقارنة.** إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = L > 0$ وإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا .

(جـ) **تعميم اختبار النسبة.** نفرض أن $a_n \neq 0$ لكل $n \ge 1$ وأن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = L$$

(١) إذا كان $0 \le L < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا .

(٢) إذا كان $L > 1$ أو $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة .

(٣) إذا كان $L=1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أو متباعدة.

(د) **تعميم اختبار الجذر.** لنفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = L$

(١) إذا كان $0 \le L < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا .

(٢) إذا كان $L > 1$ أو $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة .

(٣) إذا كان $L=1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أو متباعدة.

مثال

حدد ما إذا كانت المتسلسلة التالية متقاربة مطلقا أو متقاربة شرطيا أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$$

الحل

بتطبيق اختبار الجذر نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{(-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^2(3^{1/n})}{n^2} = 0 < 1$$

من تعميم اختبار الجذر نستنتج أن المتسلسلة المعطاة متقاربة مطلقا.

مثال اثبت أن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

متقاربة مطلقا لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتقاربة شرطيا عندما $x = -1$ ومتباعدة عندما $x = 1$ ولكل x ، حيث $|x| > 1$.

الحل

إذا كان $x = 0$ فإن المتسلسلة متقاربة مطلقا. لنفرض أن $x \neq 0$ ، نطبق اختبار النسبة المعمم نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{x^n}\right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x|$$

لذلك فالمتسلسلة متقاربة مطلقا لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $|x| > 1$. بقي اختبار المتسلسلة عند $x = \pm 1$. نناقش الحالتين كل على انفراد.

١. عند $x = 1$ نحصل على المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ وهي متباعدة.

٢. عند $x = -1$ نحصل على المتسلسلة المترددة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ وهي متقاربة شرطيا.

(٣-١٣-٦) نتيجة

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة، إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = L < 1 \quad \text{أو} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

مثال اثبت أن $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ لكل x .

الحل

إذا كان $x = 0$ فإن النهاية تساوي صفرا ، نفرض $x \neq 0$ ، نضع $a_n = \frac{x^n}{n!}$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1$$

من نتيجة (٣-١٣-٦) نحصل على المطلوب.