حساب التكامل

111 ريض

الأسبوع العاشر

الأهداف:

تطبيقات التكامل

- حساب مساحات المناطق المحدودة بمنحنيات
- حساب مساحات المناطق المحدودة من اليمين و من اليسار بمنحنيات
- حساب حجوم الأجسام الدورانية باستعمال طريقة الأقراص الاسطوانية
- حساب حجوم الأجسام الدورانية باستعمال طريقة الوردات

باب 7

تطبيقات التكامل

1.7 المساحات

2.7 حجوم أجسام الدوران

أولاً - الأقراص الأسطوانية :

ثانياً - طريقة الوردات

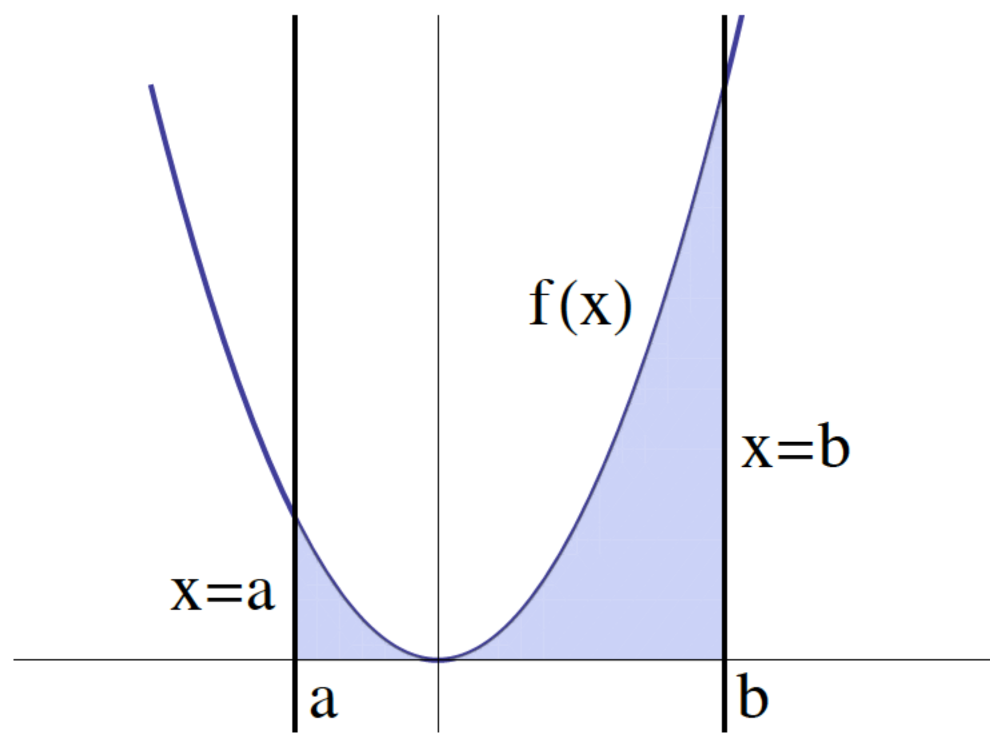
ثالثاً - طريقة الشرائح الأسطوانية :

3.7 طول القوس

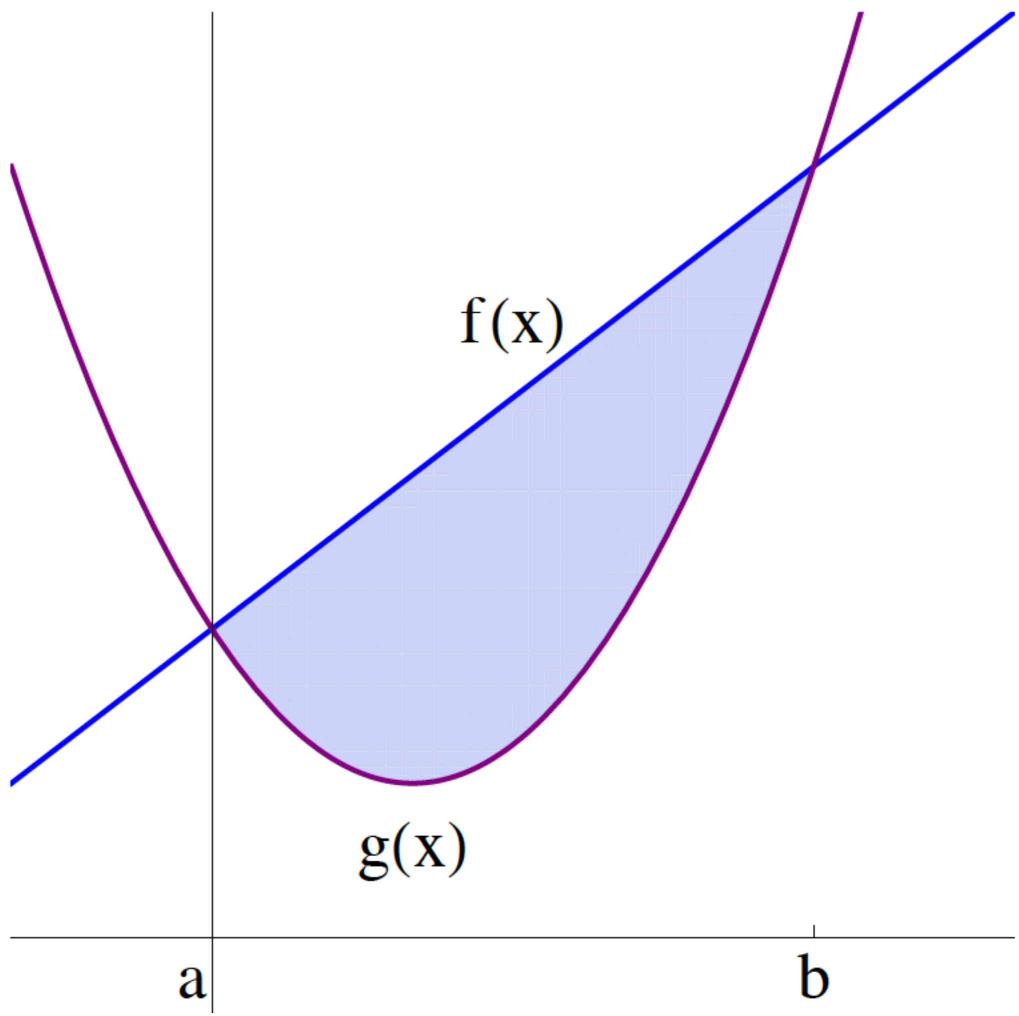
4.7 مساحة سطح الدوران

1.7 المساحات

إذا كانت f دالة موجبة ومتصلة على الفترة $[a,b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور السينات والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$ هي $A = \int_a^b f(x)\,dx$



إذا كانت الدالتان f و g متقاطعتين عند $x = a$ و $x = b$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in (a, b)$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى الدالة $g(x)$ هي $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$



مثال : أحسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $x = -1$ و $x = 2$ و $y = 0$

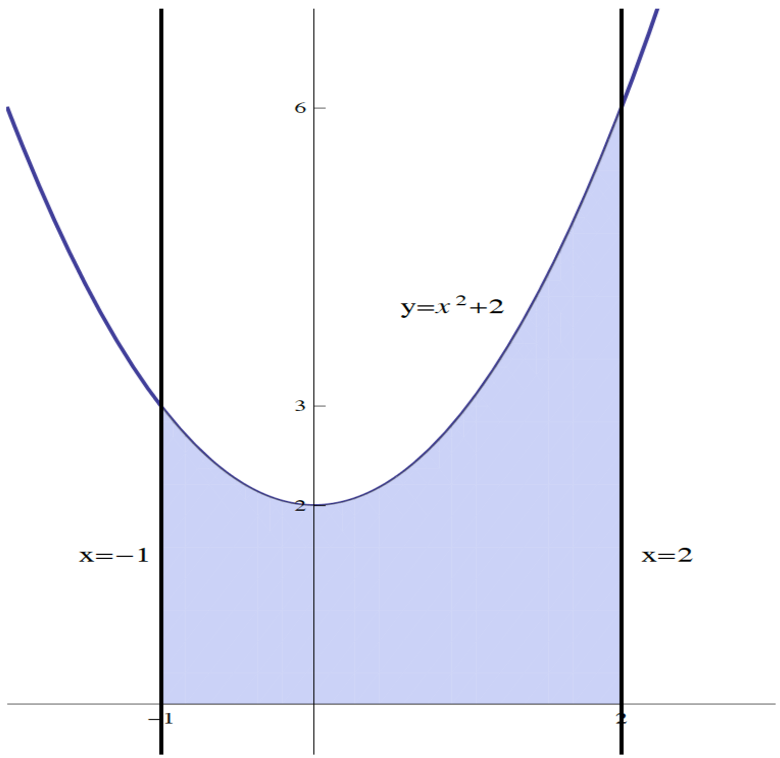
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,2)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $x = -1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(-1,0)$

المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2,0)$

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x



$$A = \int_{-1}^{2} (x^2+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2(2)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)\right)\right]$$

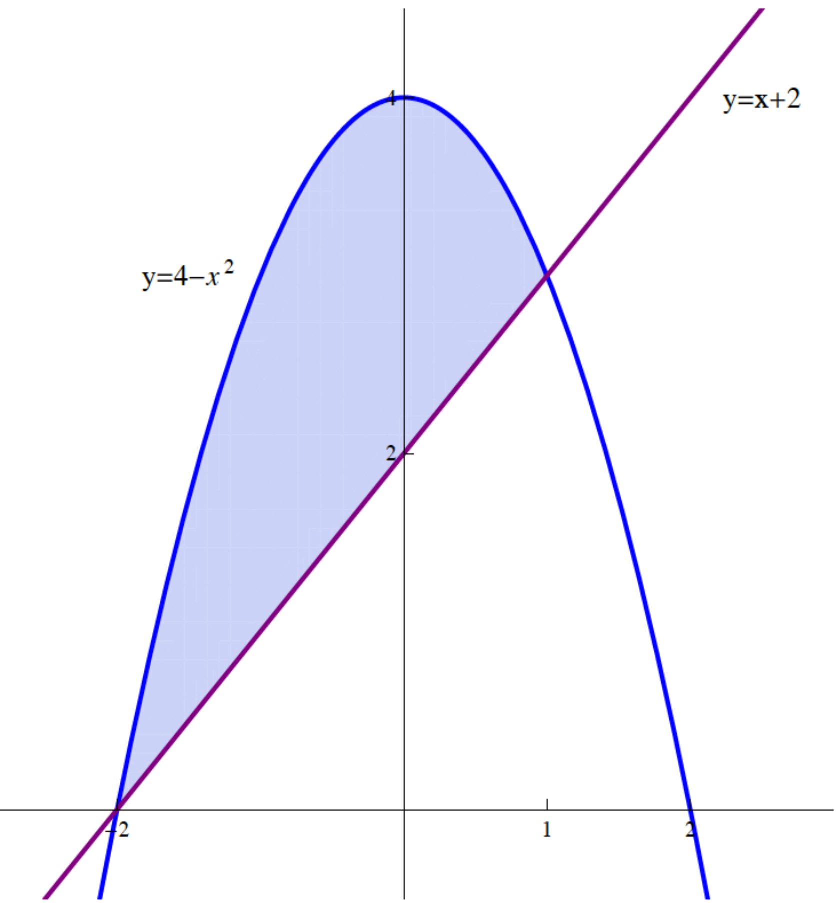
$$= \left[\left(\frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{-1}{3} - 2\right)\right] = \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} + 2 = 9$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,4)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0,2)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

$$\implies x = -2 \,,\; x = 1$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(4 - x^2) - (x+2)\right]\, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right)\right]$$

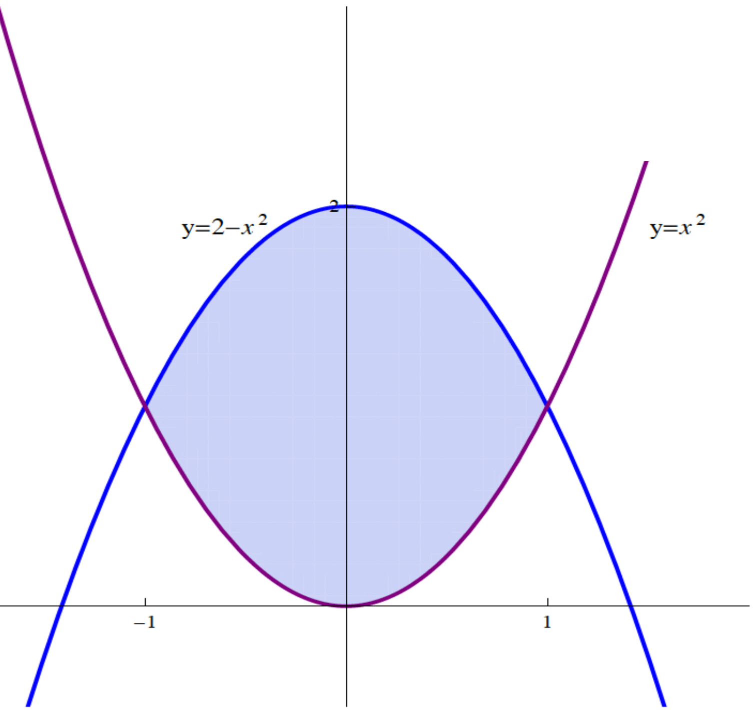
$$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$

الحل :

المنحنى $y = 2 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,2)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x^2 - 1 = 0$$

$$\implies (x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1 \,,\; x = 1$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[(2 - x^2) - x^2\right] \, dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2) \, dx = \left[2x - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

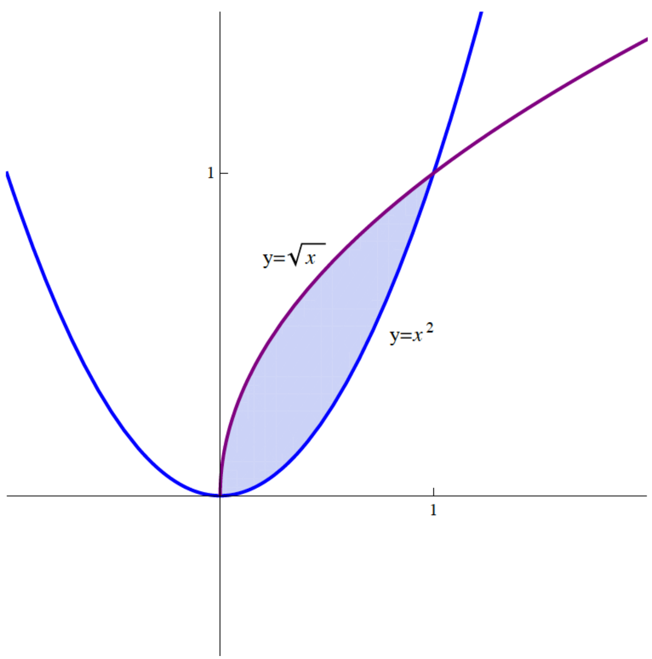
$$= \left[\left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right)\right] = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12 - 4}{3} = \frac{8}{3}$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي من القطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه النقطة $(0,0)$ وفتحته لليمين



نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0$$

$$\implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0\,,\; x = 1$$

$$A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]\,dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{1}{2}} - x^2\right]\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

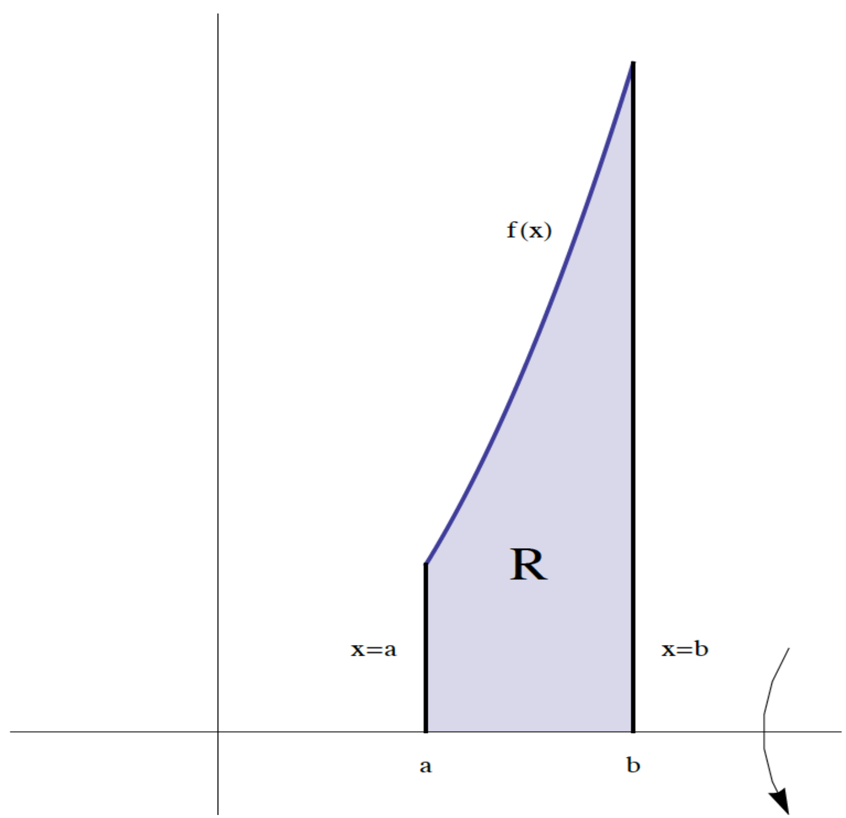
$$= \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0)\right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2.7 حجوم أجسام الدوران

أولاً - الأقراص الأسطوانية :

إذا كانت الدالة f موجبة ومتصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت R المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور x والخطين المستقيمين $x=a$ و $x=b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x يساوي $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$

ملاحظة : نستخدم طريقة الأقراص الأسطوانية عندما تكون منطقة الدوران R تلامس بالكامل محور الدوران .



مثال : أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 1$ و $x = 1$ و $x = 2$ و $y = 0$ حول محور x .

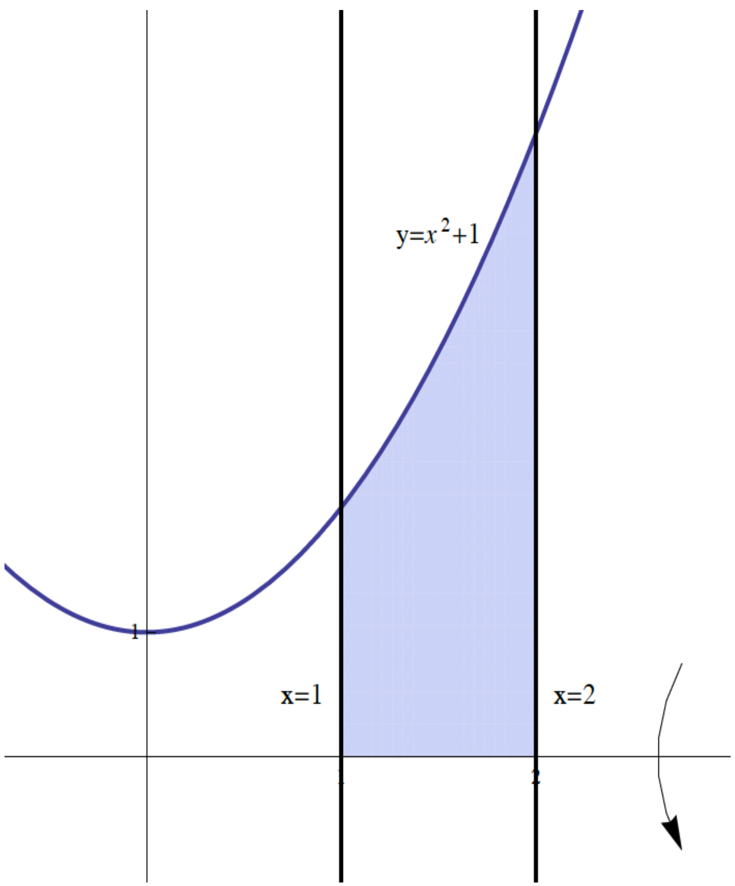
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $x = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1, 0)$.

المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V = \pi \int_1^2 \left(x^2+1\right)^2 \, dx = \pi \int_1^2 \left(x^4+2x^2+1\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x\right]_1^2 = \pi \left[\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} + 1\right] = \pi \left(\frac{31}{5} + \frac{14}{3} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{93+70+15}{15}\right) \pi = \frac{178}{15} \pi$$

مثال :

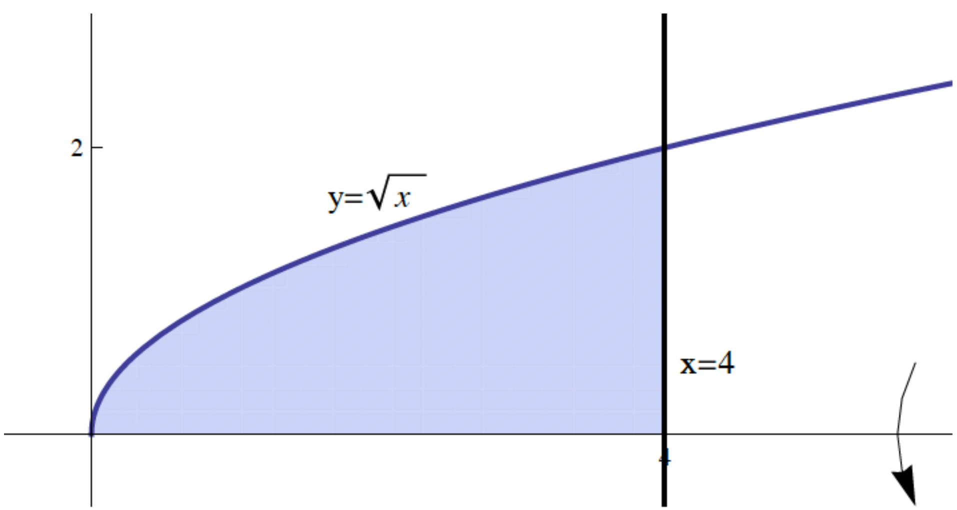
أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x}$ و $x = 4$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه $(0,0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $x = 4$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(4,0)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{0}{2}\right) = 8\pi$$

مثال :

أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 0$ حول محور x .

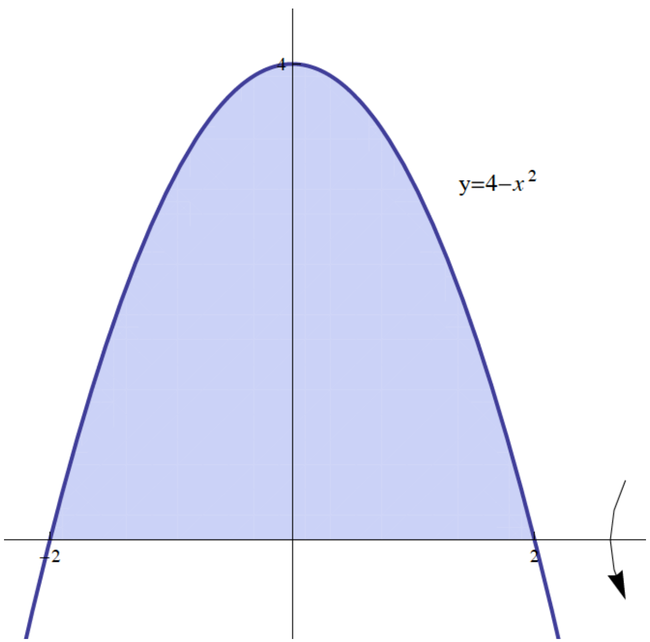
الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .

نقاط تقاطع المنحنى $y = 4 - x^2$ مع $y = 0$:

$$4 - x^2 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = -2\ ,\ x = 2$$



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2\, dx = \pi \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \pi \left[\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) - \left(-32 + \frac{64}{3} - \frac{32}{3}\right)\right]$$

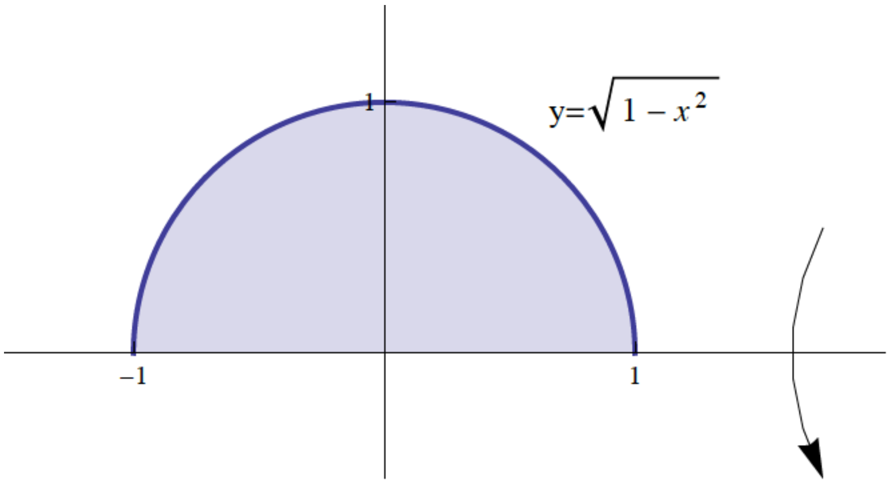
$$= \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} + 32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \pi \left(64 - \frac{128}{3} + \frac{64}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi$$

مثال : أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y=\sqrt{1-x^2}$ و $y=0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y=\sqrt{1-x^2}$ يمثل النصف العلوي للدائرة $x^2+y^2=1$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 .

المنحنى $y=0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y=\sqrt{1-x^2}$ مع $y=0$:

$$\sqrt{1-x^2}=0 \implies 1-x^2=0 \implies x^2=1$$

$$\implies x=-1\,,\ x=1$$

باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

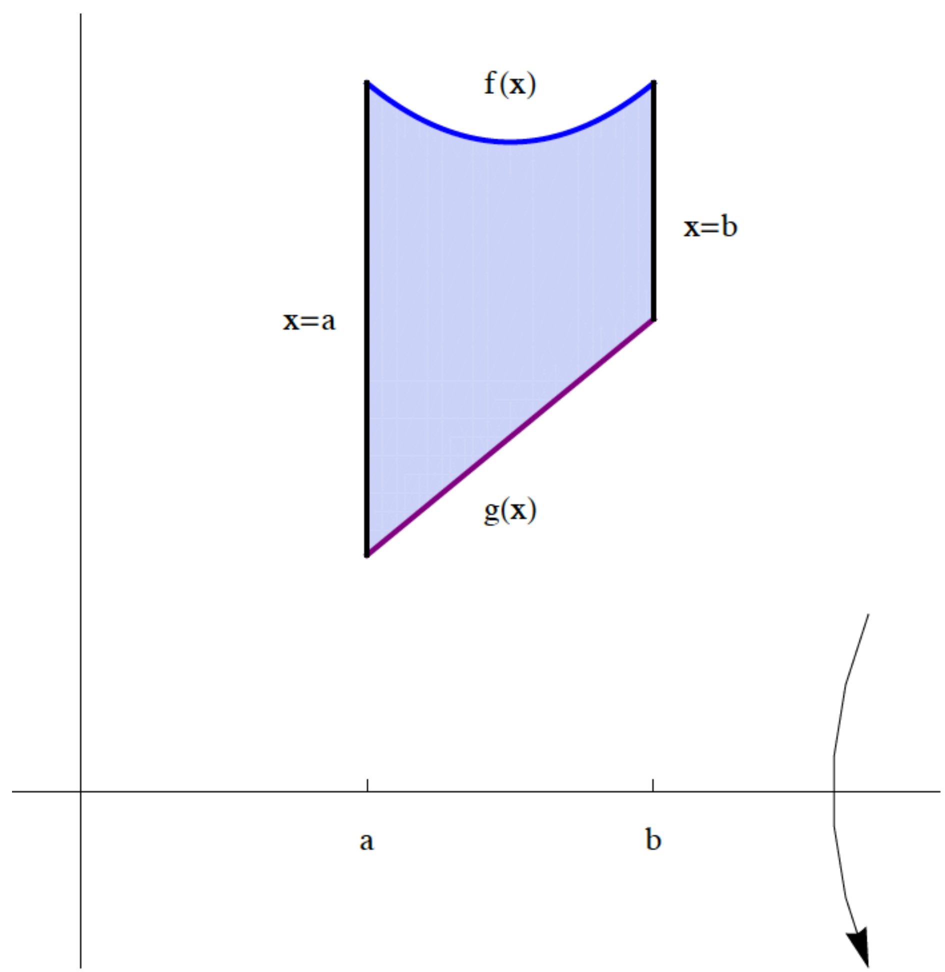
$$=\pi\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\pi\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\pi\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

ثانياً - طريقة الوردات

إذا كانت f و g دالتين موجبتين ومتصلتين على الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in [a,b]$ ، وكانت R هي المنطقة المحصورة بالمنحنيات $f(x)$ و $g(x)$ و المستقيمين $x = a$ و $x = b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x يساوي $V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)\, dx$

ملاحظة : نستخدم طريقة الوردات حينما لا تكون منطقة الدوران ملامسة بالكامل لمحور الدوران .

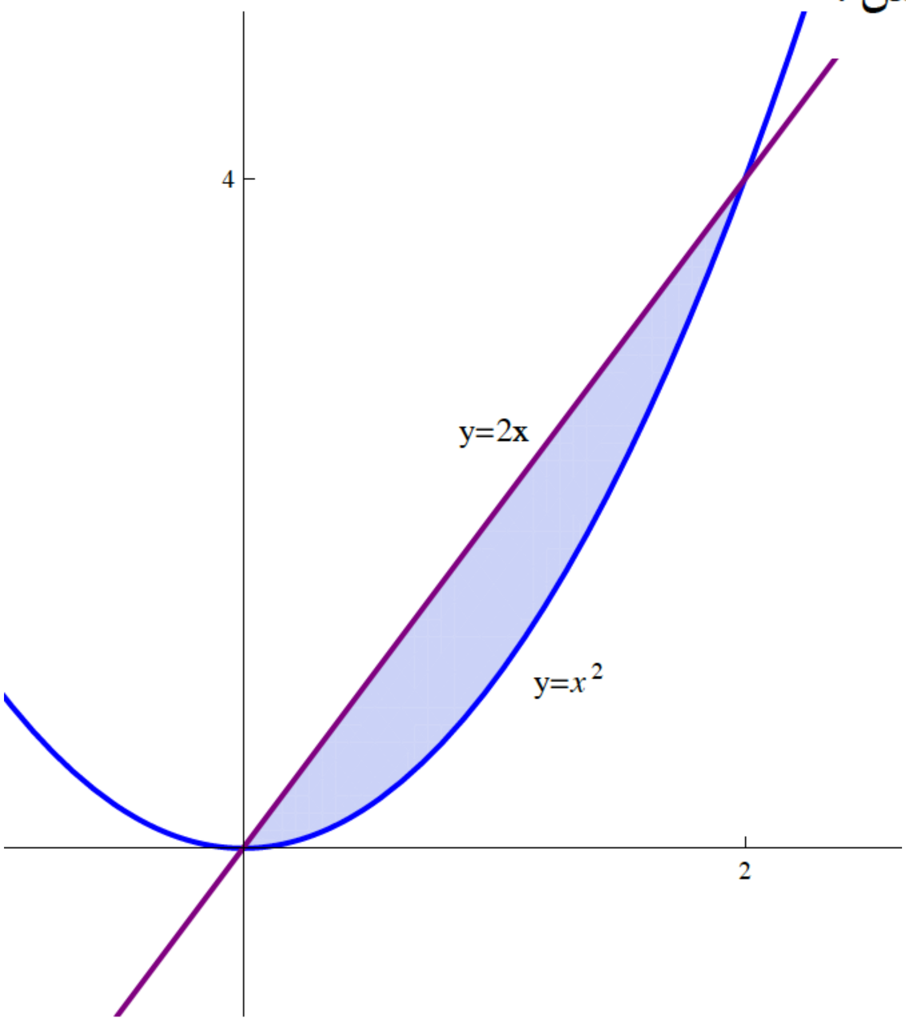


مثال : أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

$$\implies x = 0 \, , \; x = 2$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right] \, dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5}\right)\right]$$

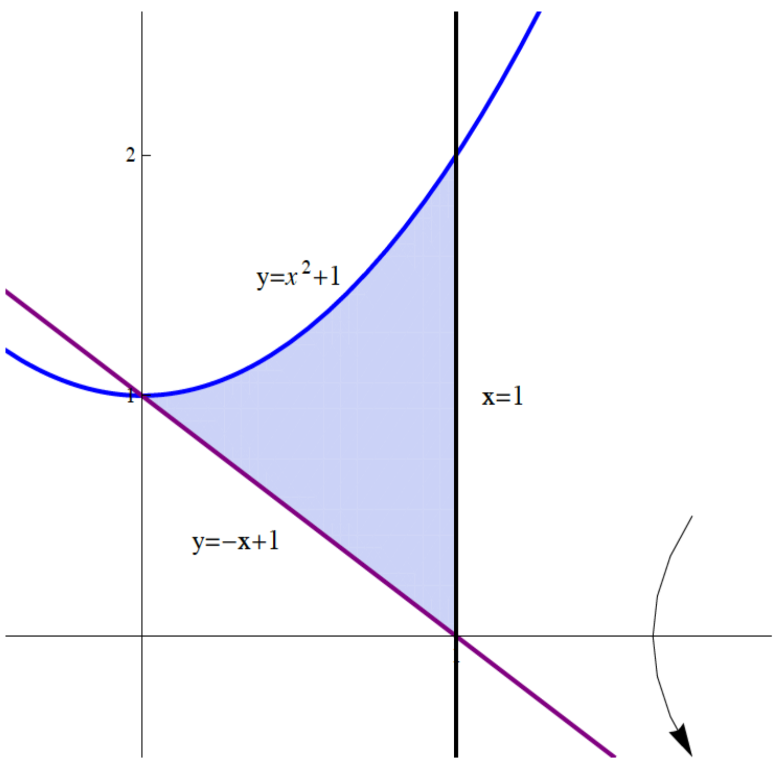
$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{64}{15}\pi$$

مثال : أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=x^2+1$ و $y=-x+1$ و $x=1$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y=x^2+1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y=-x+1$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0,1)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنى $y=x^2+1$ مع المنحنى $y=-x+1$:

$$x^2+1=-x+1 \implies x^2+x=0 \implies x(x+2)=0$$

$$\implies x=-2\ ,\ x=0$$

نقطة تقاطع المستقيمين $y=-x+1$ و $x=1$ هي النقطة $(1,0)$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V=\pi\int_0^1\left[(x^2+1)^2-(-x+1)^2\right]\,dx$$

$$=\pi\int_0^1\left[(x^4+2x^2+1)-(x^2-2x+1)\right]\,dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(x^4+x^2+2x\right)\,dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+1\right)-(0+0+0)\right]=\frac{23}{15}\pi$$

مثال : أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $y = 1$ و $x = 1$ و $x = 0$ حول محور x .

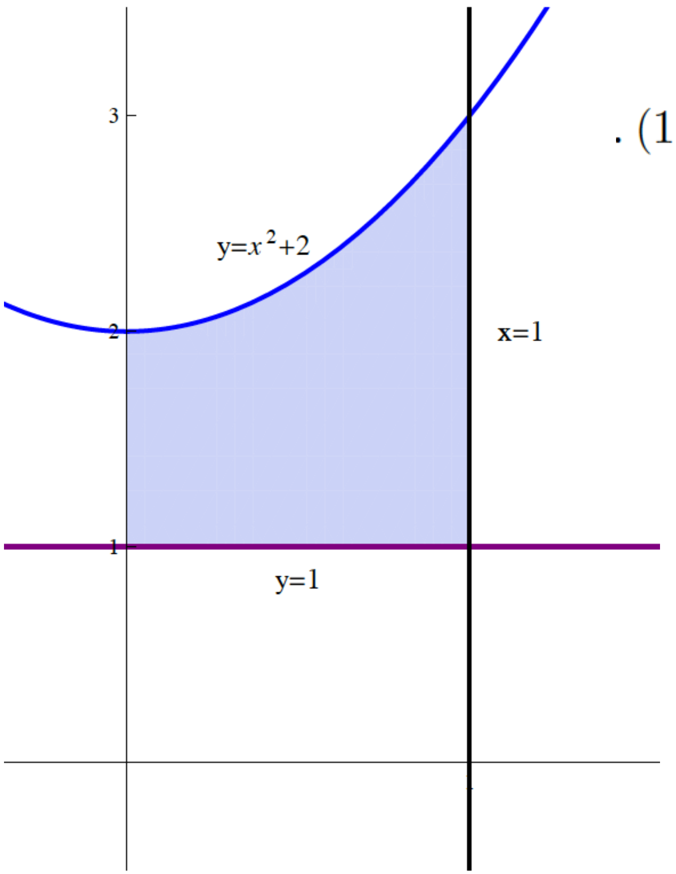
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنة

المنحنى $x = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1, 0)$.

المنحنى $x = 0$ يمثل محور y .



باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x^2+2)^2 - (1)^2\right] \, dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 4 - 1) \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 3) \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^3 + 3x\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 3\right) - (0+0+0)\right] = \frac{68}{15}\pi$$