حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الثالث

المتسلسلات SERIES

- مقـــدمـــة
- المتتابعات غير المنتهية
- المتتابعات المتقاربة
- المتسلسلات غير المنتهية
- المتسلسلات ذات الحدود الموجبة
- اختبـــاري النسبة والجذر
- المتسلسلات المترددة والتقارب المطلق

المتتابعات غير المنتهية

Infinite Sequences

(٣-٢-١) تعريف

نعرف المتتابعة غير المنتهية بأنها دالة نطاقها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (أو مجموعة جزئية منها) ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، أي $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

من الآن فصاعدا بقولنا متتابعة نعني متتابعة غير منتهية. فمثلا الدالتان

$$n \geq 4 \quad \text{و} \quad f(n) = (\frac{1}{2})^n$$

$$n \geq 4 \quad \text{و} \quad (h)\ n = n^2$$

كل منهما متتابعة.

بشكل عام إذا كانت

$$f(n) = a_n \text{ و } n \geq 1$$

فإن مجموعة الأعداد المرتبة $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ تعرف المتتابعة تعريفا تاما.

فعند كتابتنـــا $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نقصد المتتابعة f بحيث أن $f(n) = a_n$ لكـــل $n \geq 1$.

بالمثل ، إذا كانت $f(n) = a_n$ لكـــل $n \geq m$ فإننا نكتب $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ للدلالة على المتتابعة.

مثال

أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$.

الحل

$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{8},\ a_4 = \frac{1}{16},\ a_5 = \frac{1}{32}$.

مثال

أكتب الأربعة حدود الأولى للمتتابعة $\left\{ n^2 \right\}_{n=4}^{\infty}$.

الحل

$a_4 = 16, a_5 = 25, a_6 = 36, a_7 = 49$.

مثال

إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة فيها $a_1 = 1$، وَ $a_n = 3a_{n-1} - 1$ لكل $n \geq 1$. أوجد a_2, a_3, a_4.

الحل

بوضع $n = 2$ في الصيغ الاختزالية $a_n = 3a_{n-1} - 1$ نحصل على $a_2 = 3a_1 - 1$ وبـــالتعويض بقيمة a_1 نحصل $a_2 = 2$ بالمثل $a_3 = 5$ وَ $a_4 = 9$.

المتتابعات المتقاربة

Convergent Sequences

(٣-٣-١) تعريف

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وتتقارب من العدد الحقيقي L، إذا كان لأي فترة مفتوحة مركزها L ونصف قطرها ε، حيث $\varepsilon > 0$، يوجد عدد N بحيث أن $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ لكل $n > N$. أي أن جميع حدود المتتابعة محتواة في الفترة باستثناء عدد منته من حدودها.

(٣-٣-٢) تعريف

يقال أن نهاية المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هو العدد الحقيقي L ، إذا وجد لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ عدد N بحيث أن $|a_n - L| < \varepsilon$ لكل $n > N$ ، ونكتب هذا $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

إذا وجد العدد L فإنه يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة (أو أنها تتقارب من العدد L)، وإذا لم يوجد العدد L فإنه يقال أن المتتابعة متباعدة.

مثال

اثبت أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

الحل

سنثبت أنه لأي $0<\varepsilon$ يوجد عدد N بحيث لكل $n>N$ فإن $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ ، لأي $\varepsilon>0$.

$$\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right|=\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right|<\varepsilon$$

وبالتالي فإن $\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$

أي أن $\frac{1}{2n+1}<2\varepsilon$ وهذا يؤدي إلى أن $n>\frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon}-1)$

لنأخذ N بحيث أن $N\geq\frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon}-1)$ ، ومنه لكل $n>N$ فإن $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

أي أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

مثال

اثبت أن المتتابعة $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة.

الحل

نفرض أن المتتابعة تتقارب من L ، إذا كان $L \geq 0$ فإن $1 \leq |-1-L|$ ، وإذا كان $0 \leq L$ فإن $1 \leq |1-L|$ ، ومنه لأي $1 \leq \varepsilon > 0$ لا يوجد L بحيث $\varepsilon > |a_n - L|$ لكل $n > N$، أي المتتابعة متباعدة.

(٣-٣-٣) نظرية

إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، فإن نهايتها وحيدة.

(٣-٣-٤) نظرية

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة، وليكن L عددا حقيقيا و f دالة معرفة على الفترة $[1,\infty)$،حيث $f(n)=a_n$ لكل $n\geq 1$.

(i) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ فإن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty} f(n)=L$.

(ii) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (أو $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$) فإن المتتابعة متباعدة و $\lim_{n\to\infty} f(n)=\infty$ (أو $\lim_{n\to\infty} f(n)=-\infty$).

أي $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(n)$.

مثال

اثبت أن $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

الحل

ضع $f(x) = x^2$ لكل $x \geq 1$ ، بالتالي فإن $f(n) = n^2$ لكل $n \geq 1$. وبما أن $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ ،

فمن نظرية (٣-٣-٤) نجد أن $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

مثال

حدد ما إذا كانت المتتابعة $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة أم متباعدة.

الحل

ضع $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ لكل $x\geq 1$ ، بالتالي فإن $f(n)=n\sin\frac{\pi}{n}$ لكل $n\geq 1$. وبما أن

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to\infty}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}= \pi \quad .$$

أي أن المتتابعة متقاربة.

مثال

اثبت أن $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

الحل

ضع $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ لكل $x \geq 1$، (١)

ومنه فإن $f(n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ لكل $n \geq 1$. بأخذ لوغاريتم الطرفين للعلاقة (١) نحصل على

$$\ln f(x) = x\ln\ (1+\tfrac{1}{x})$$

ومنه فإن

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\ (1+\tfrac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ (1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ (1+\ \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{1+\ \frac{1}{x}}\ \ (-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})}\right)=\lim_{x\to\infty}\ \frac{1}{1+\ \ \frac{1}{x}}=1$$

وبالتالي فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ e$ ، ومنه نجد أن

$$.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ e$$

مثال

احسب $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

الحل

ضع $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ لكل $x\geq 1$،ومنه فإن $f(n)=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ لكل $n\geq 1$. لإيجاد النهاية نضرب بالمرافق كما يلي

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=0$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0.$$

مثال

حدد ما إذا كانت المتتابعة $\left(\frac{5n}{e^{2n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ متقاربة أم متباعدة.

الحل

ضع $\frac{5x}{e^{2x}} = f(x)$ لكل $x \geq 1$ ، ومنه فإن $f(n) = \frac{5n}{e^{2n}}$ لكل $n \geq 1$. بما أن $f(x)$ تأخــذ

الصيغة غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$ نستخدم قاعدة لوبيتال في حساب النهاية لنحصل على

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2e^{2x}} = 0$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{e^{2n}} = 0$$

أي أن المتتابعة متقاربة.

(٣-٣-٥) نظرية

إذا كان r عددا حقيقيا، فإن المتتابعة $\left\{r^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لكل r حيث أن $1 > |r|$ و $r = 1$ أي أن

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 1 & ; \ r = 1 \\ 0 & ; \ |r| < 1 \end{cases}$$

ومتباعدة لكل r حيث أن $1 < |r|$ و $r = -1$ كما أن

$$\lim_{n\to\infty} \left|r^n\right| = \infty$$

مثال

حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة وأيها متباعدة

(i) $\left\{(1.05)^{n+1}\right\}$ (ii) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$

الحل

(i) بما أن $|r|=\frac{1}{2}<1$، فمن نظرية (٣-٣-٥) نستنتج أن المتتابعة متقاربة.

(ii) بما أن $|r|=1.05>1$، فمن نظرية (٣-٣-٥) نستنتج كذلك أن المتتابعة متباعدة.

خواص التقارب للمتتابعات
Convergence Properties Of Sequences

(٣-٥-١) نظرية

(ا) المتتابعة الثابتة $\{c\}_{n=1}^{\infty}$، لها النهاية c .

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(جـ) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(د) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(هـ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ ، شريطة أن $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ و $b_n \neq 0$ لكل n.

مثال

احسب نهاية المتتابعة $\left\{\dfrac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

الحل

لإيجاد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ، حيث $a_n=\dfrac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}$، نقسم بسط ومقام a_n على n^2 ونستخدم نظرية (٣-٥-١) لنحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{5+\frac{4}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}$$

$$=\frac{3-0-0}{5+0}=\frac{3}{5}$$

مثال

اثبت أن المتتابعة $\left\{(1+\frac{1}{n})^n n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

الحل

المتتابعة $\left\{(1+\frac{1}{n})^n n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي حاصل ضرب المتتابعتين $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

أثبتنا أن المتتابعة $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وأن $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$ ،

أثبتنا أن المتتابعة $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وأن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

لذلك، ومن نظرية (٣-٥-١) (د) فإن

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=e.\pi$$

ومنه فإن المتتابعة $\left\{(1+\frac{1}{n})^n n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، ونهايتها $e\pi$.

(٣–٥–٢) نظرية

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة. إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

مثال

إذا كان $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ ، فاثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

الحل

بما أن.

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

فمن نظرية (٣–٥–٢)، يقتضي أن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$.

(٣-٥-٣) نظرية (نظرية الحصر)

إذا كانت $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ متتابعات وكانت $b_n \le c_n \le a_n$ لكل n وإذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

مثال

اثبت أن المتتابعة $\left\{\frac{\sin\ n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل

نعلم أن

$$0 \le \ |\sin\ n| \le\ 1$$

وحيث أن مضروب n أكبر من الصفر، فإن بالقسمة على $n!$ نجد أن

$$0 \le \left|\frac{\sin\ n}{n!}\right| \le \frac{1}{n!}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.فإنه من نظرية (٣-٥-٣) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin\ n}{n!}\right| = 0$ ،

نجد أن $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\ n}{n!} = 0$. أي أن المتتابعة متقاربة ونهايتها ٠ .

مثال اثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 2 - \cos^2 n}{5^n} = 0$$

الحل

$$0 \le \left|\frac{(-1)^n 2 - \cos^2 n}{5^n}\right| \le \left|\frac{(-1)^n 2}{5^n}\right| + \left|\frac{\cos^2 n}{5^n}\right| = \left|\frac{2}{5^n}\right| + \left|\frac{\cos^2 n}{5^n}\right|$$

ولكن $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2}{5^n}\right| = 0$. بما أن

$$0 \le \cos^2 n \le 1$$

فبالقسمة على 5^n نحصل على .

$$0 \le \frac{\cos^2 n}{5^n} \le \frac{1}{5^n}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ ، فمن نظرية (٣-٥-٣) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{5^n} = 0$.

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{2}{5^n}\right|+\left|\frac{\cos^2 n}{5^n}\right|\right)=0$$

وعليه فمن نظرية (٣-٥-٣) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^n 2-\cos^2 n}{5^n}\right|=0$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n 2-\cos^2 n}{5^n}=0$

(٣-٥-٤) تعريف

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة (Bounded) ، إذا وجد عدد حقيقي M موجب بحيث أن $|a_n| \le M$ لكل $n \ge 1$، وفيما سوى ذلك، يقال أن المتتابعة غير محدودة (Unbounded).

مثال

اثبت أن المتتابعتين (i) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ii) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودتان.

الحل

(i) بما أن $n < n+1$ لكل $n \ge 1$ ، فإن $\dfrac{n}{n+1} < 1 = \left|\dfrac{n}{n+1}\right|$. وحينئذ $\left|\dfrac{n}{n+1}\right| < M$ لأي عدد حقيقي موجب $M \ge 1$. أي أن المتتابعة محدودة.

(ii) $\left|(-1)^n\right| = 1^n = 1$، ومنه $\left|(-1)^n\right| \le M$ لأي عدد حقيقي موجب $M \ge 1$. أي أن المتتابعة محدودة.

مثال

اثبت أن المتتابعة $\left\{n^2\right\}_{n=4}^{\infty}$ غير محدودة.

الحل

نفرض العكس، أي أن المتتابعة $\left\{n^2\right\}_{n=4}^{\infty}$ محدودة. هذا يقتضي وجود عدد حقيقي موجب M بحيث أن $\left|n^2\right| = n^2 \le M$ لكل $n \ge 4$. بما أن $M+1 > M$ فإننا نستطيع أن نجد عدد صحيح موجب N بحيث أن $N > M$، ومنه $N^2 > M$. وهذا يتناقض مع كون $\left|n^2\right| = n^2 \le M$ لكل $n \ge 4$. وعليه المتتابعة غير محدودة.

(٣–٥–٥) نظرية

(ا) إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متقاربة، فإنها محدودة.

(ب) إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة غير محدودة، فإنها متباعدة.

(٣–٥–٦) تعريف

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

(i) متزايدة (Increasing) إذا كان $a_n \le a_{n+1}$ لكل $n \ge 1$.

(ii) متناقصة (Decreasing) إذا كان $a_n \ge a_{n+1}$ لكل $n \ge 1$.

ويقال أن المتتابعة مضطردة، إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

مثال

اثبت أن المتتابعة $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=3}^{\infty}$ متزايدة.

الحل

نعرف $f(x)=1-\frac{1}{x}$ لكل $x\geq 3$، ومنه فإن $f(n)=1-\frac{1}{n}$ لكل $n\geq 3$. نجد المشتقة الأولى $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ ، وبما أن $x^2>0$ و $x\geq 3$ ، فإن $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$. أي أن f دالة متزايدة. وهذا يقتضي أن المتتابعة متزايدة.

مثال

اثبت أن المتتابعة $\left\{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة.

الحل

هنا لا نستطيع تعريف دالة كما فعلنا في المثال السابق.ولذلك لإثبات أن المتتابعة متناقصة نحسب إما النسبة بين a_{n+1} ، a_n أو الفرق بينهما. وفي هذا المثال فإن حساب الفرق أفضل كما يلي:

$$a_{n+1}-a_n=\left\{1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1!}\right\}-\left\{1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}=\frac{1}{n+1!}>0$$

أي أن $a_{n+1}>a_n$. ومنه فإن المتتابعة متزايدة.

مثال

اثبت أن المتتابعة $\left\{\frac{1}{n+1!}\right\}_{n=5}^{\infty}$ متناقصة.

الحل

لإثبات أن المتتابعة متناقصة نحسب النسبة بين a_n / a_{n+1}

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{(n+1)!}{(n+2)(n+1)!} = \frac{1}{n+2} < 1$$

أي أن $a_n > a_{n+1}$. ومن ثم فإن المتتابعة متناقصة.

(٣-٥-٧) تعريف

لتكن A مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

(ا) يقال أن المجموعة A محدودة من أعلى (Bounded above) إذا وجد عدد حقيقي M بحيث أن $M \geq x$ لكل x في A. يسمى أي عدد M حد علوي (Upper bound) للمجموعة A .

(ب) يقال أن المجموعة A محدودة من أسفل (Bounded below) إذا وجد عدد حقيقي m بحيث أن $m \leq x$ لكل x في A يسمى أي عدد m حد سفلي(Lower bound) للمجموعة A .

(جـ) يقال أن المجموعة A محدودة (Bounded) إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل.

(٣–٥–٨) تعريف

(ا) يقال أن العدد M هو أصغر حد علوي (Least upper bound) للمجموعة A إذا كان

(١) M حدا علويا

(٢) لأي حد علوي K للمجموعة A فإن $M \leq K$. أي لا يوجد حد علوي للمجموعة A أصغر من M .

(ب) العدد m هو أكبر حد سفلي (Greatest lower bound) للمجموعة A إذا كان

(١) m حدا سفليا

(٢) لأي حد سفلي k للمجموعة A فإن $m \geq k$. أي لا يوجد حد سفلي للمجموعة A أكبر من m .

مسلمة أصغر حد علوي (Least Upper Bound Axiom)

كل مجموعة من الأعداد الحقيقية محدودة من أعلى لها أصغر حد علوي.

(٣–٥–٩) نظرية

إذا كانت المتتابعة محدودة ومضطردة فإنها متقاربة.

(٣–٥–١٠) نظرية

إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ومتزايدة، وكان M حدا علويا للمتتابعة. فإن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، كما أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le M$$

(٣-٥-١١) نظرية

إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ومتناقصة، وكان K حدا سفليا للمتتابعة. فإن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، كما أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq K$$

مثال

إذا كان $a_1 = \frac{3}{4}$ و $a_n = \frac{4n^2-1}{4n^2} a_{n-1}$ لكل $n \geq 2$. فاثبت أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ متقاربة.

الحل

سنثبت أن المتتابعة محدودة ومضطردة واستنادا إلى النظرية نستنتج أنها متقاربة. بما أن

$$a_{n+1} = \frac{4(n+1)^2-1}{4(n+1)^2} a_n$$

فإن

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4(n+1)^2-1}{4(n+1)^2}$$

ولكن

$$0<4(n+1)^2-1<4(n+1)^2$$

وبالتالي فإن $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ أي أن $a_{n+1}<a_n$ أي أن المتتابعة متناقصة. نثبت الآن أنها محدودة.

$$|a_n|=\left|\frac{4n^2-1}{4n^2}\right||a_{n-1}|$$

ولكن $\left|\frac{4n^2-1}{4n^2}\right|<1$، لذلك

$$|a_n|<|a_{n-1}|<|a_{n-2}|<\cdots<|a_1|=\frac{3}{4}$$

وبالتالي فإن المتتابعة محدودة.