حساب التكامل

111 ريض

الأسبوع الاول

الأهداف:

- يتعلم الطالب كيفية استخدام مجموع ريمان لحساب مساحة منطقة محدودة محصورة تحت بيان دالة.

- يتعلم الطالب كيفية استخدام مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد.

- يتعلم الطالب خواص التكامل المحدد.

- يتعلم الطالب كيفية استخدام مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل.

باب 1

التكامل المحدد

1.1 المجموع وخواصه

نرمز لمجموع الأعداد الحقيقية $a_1, a_2, \cdots, a_n$ بالرمز $\sum_{k=1}^{n} a_k$

أي أن $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

خواص المجموع :

إذا كانت $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ لكل $n \geq k \geq 1$ وكانت $m \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m\, a_k = m \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (3)$$

مجاميع هامة :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad (3)$$

مثال : أحسب $\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$

الحل : $\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}k^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\frac{n(n+1)}{2}+n$$

.2.1 التكامل المحدد

2.1 التكامل المحدد

التجزئ المنتظم للفترة :

لتجزئ الفترة المغلقة $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية بحيث يكون طول كل فترة جزئية مساوياً $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$ نضع $x_0 = a$
و $x_1 = a + \Delta_x$ و $x_k = a + k\Delta_x$ وأخيراً $x_n = a + n\,\Delta_x = b$
نسمي المجموعة $\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n = b\}$ بالتجزئ المنتظم للفترة $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية

مثال : جزئ الفترة $[1,3]$ إلى 5 فترات جزئية منتظمة

الحل : $\Delta_x = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$

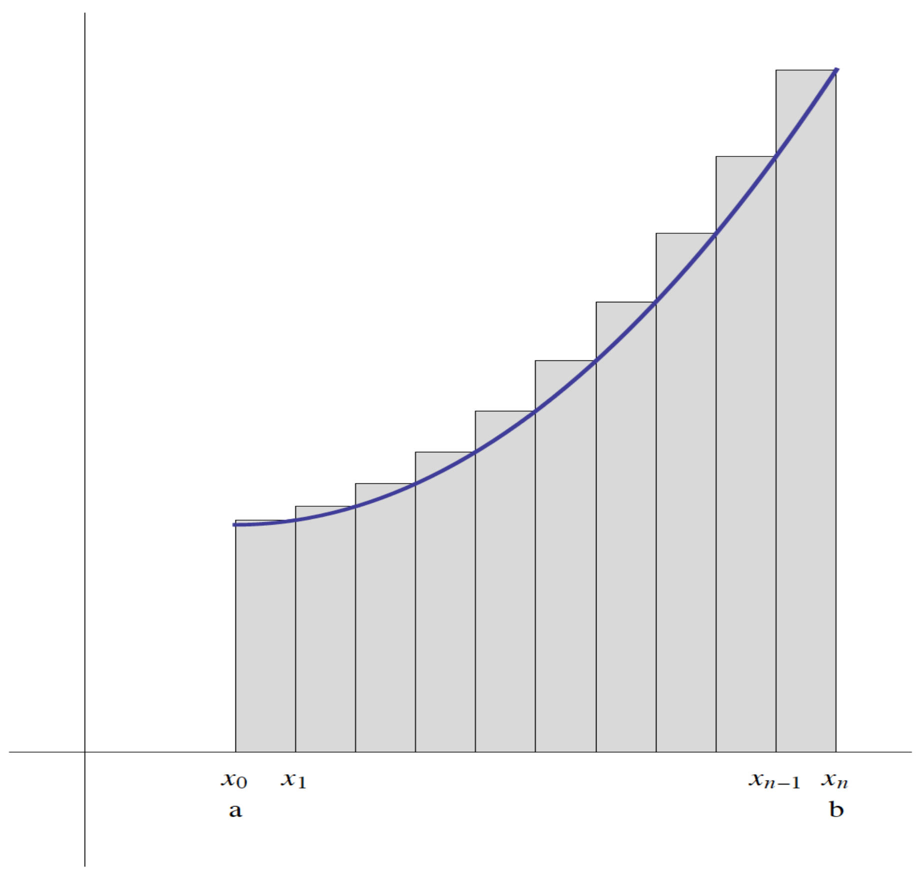
$$x_0 = 1\ ,\ x_1 = 1 + 0.4 = 1.4\ ,\ x_2 = 1 + 2(0.4) = 1.8$$

$$x_3 = 1 + 3(0.4) = 2.2\ ,\ x_4 = 1 + 4(0.4) = 2.6\ ,\ x_5 = 1 + 5(0.4) = 3$$

مجموع ريمان :

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ وكان $P=\{x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b\}$ تجزيئاً منتظماً للفترة $[a,b]$ ، نعرف مجموع ريمان للدالة f على الفترة $[a,b]$ وفقاً للتجزئ المنتظم P كالتالي : $R_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x$

حيث $\Delta_x=\dfrac{b-a}{n}$ و $x_k=a+k\Delta_x=a+k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$



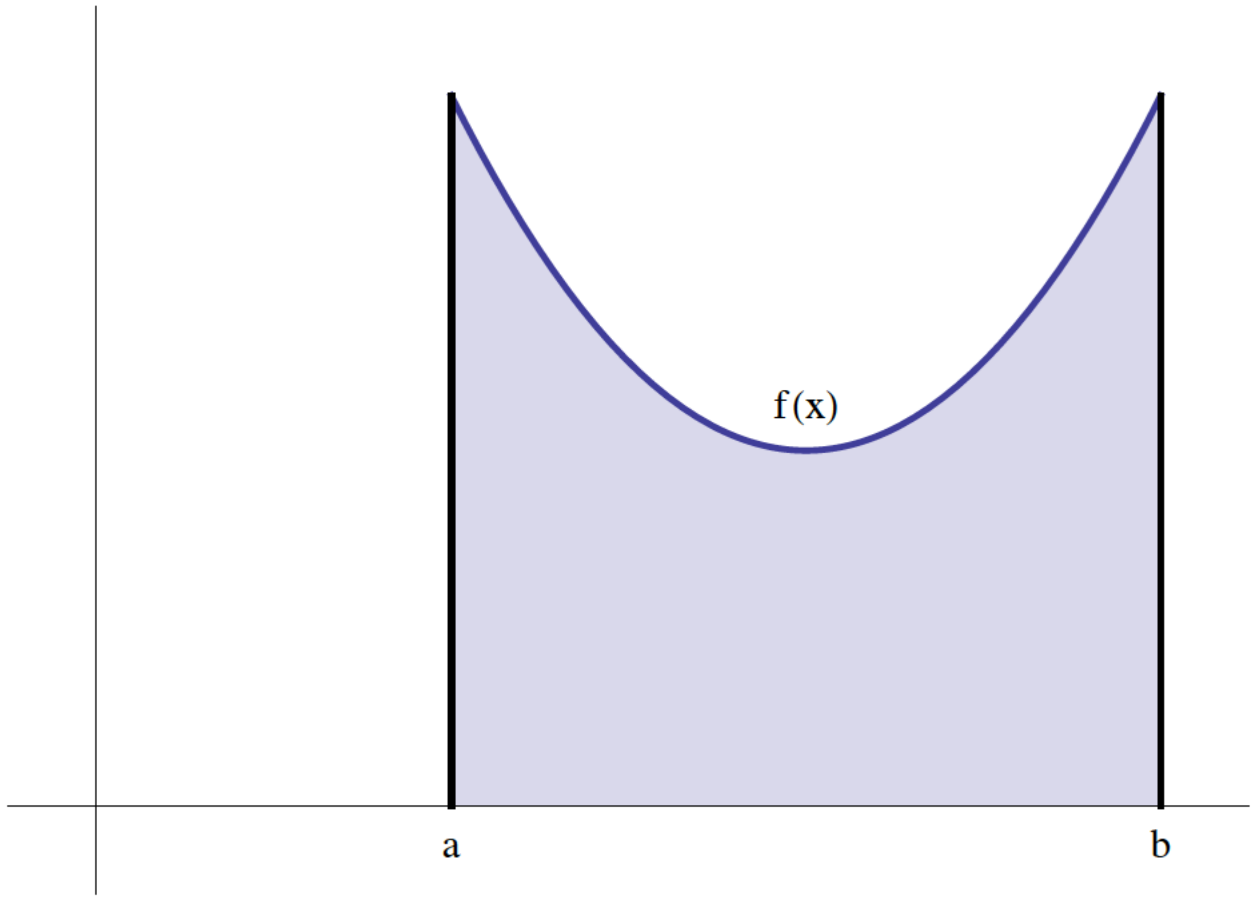
التكامل المحدد :

نرمز للتكامل المحدد للدالة المتصلة f على الفترة $[a, b]$ بالرمز $\int_a^b f(x)\, dx$ ويعرف كالتالي :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) \Delta_x$$

أي أن $\int_a^b f(x)\, dx$ يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور x

والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$


f(x)
a
b

مثال (1) : استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x-3)\,dx$

الحل : $f(x)=4x-3$ و $[a,b]=[0,2]$

أولاً- نجزئ الفترة $[0,2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة :

$$\Delta_x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_0=0\,,\ \cdots\ ,\ x_k=0+k\Delta_x=\frac{2k}{n}\,,\ \cdots\ ,\ x_n=2$$

ثانياً - مجموع ريمان :

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left[4\left(\frac{2k}{n}\right)-3\right]\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n}-3\right)\frac{2}{n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k}{n^2}-\frac{6}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{16k}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}=\frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=\frac{16}{n^2}\ \frac{n(n+1)}{2}-\frac{6}{n}\,n=8\ \frac{n(n+1)}{n^2}-6$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x-3)\,dx$

$$\int_0^2 (4x-3)\,dx=\lim_{n\to\infty} R_n=\lim_{n\to\infty}\left(8\ \frac{n(n+1)}{n^2}-6\right)=8(1)-6=8-6=2$$

مثال (2) : استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2\,dx$

الحل : $f(x)=x^2$ و $[a,b]=[0,2]$

أولاً - نجزئ الفترة $[0,2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة :

$$\Delta_x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_0=0\,,\ \cdots\ ,\ x_k=0+k\Delta_x=\frac{2k}{n}\,,\ \cdots\ ,\ x_n=2$$

ثانياً - مجموع ريمان :

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{8k^2}{n^3}$$

$$=\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{8}{n^3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{8}{6}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{4}{3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2\,dx$

$$\int_0^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right)=\frac{4}{3}(2)=\frac{8}{3}$$

3.1 خواص التكامل المحدد

إذا كانت f و g دالتان متصلتان على الفترة $[a,b]$ وكانت $k \in \mathbb{R}$ فإن

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\ \int_a^b f(x)\,dx \quad (2)$$

(3) إذا كانت $a < c < b$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(4) إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(5) إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c \in (a,b)$ بحيث

$$(b-a)\, f(c) = \int_a^b f(x)\, dx$$

مثال : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 2]$

الحل :

أولاً - حساب التكامل المحدد $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$

تم حساب هذا التكامل كمثال على مجموع ريمان ومقداره يساوي $\dfrac{8}{3}$

ثانياً - إيجاد قيمة العدد c من العلاقة $\displaystyle (b-a)\,f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

$$(2-0)\,f(c) = \int_0^2 x^2\,dx \implies 2c^2 = \frac{8}{3}$$

$$\implies c^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \implies c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \in (0, 2)$ بينما $c = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \notin (0, 2)$

أي أن قيمة العدد c المطلوبة هي $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$