111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1441 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (8 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_0^2 (4x-3)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 4x - 3\,,\ [a,b] = [0,2]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 0 + k\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[4\left(\frac{2k}{n}\right) - 3\right]\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n} - 3\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k}{n^2} - \frac{6}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{16k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n} = \frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{16}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{6}{n}\,n = 8\,\frac{n+1}{n} - 6$$

$$\int_0^2 (4x-3)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(8\,\frac{(n+1)}{n} - 6\right) = 8(1) - 6 = 8 - 6 = 2$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4 - x^2$ على الفترة $[0,3]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = 4 - x^2$ و $[a,b] = [0,3]$

$$(3-0)\,(4-c^2) = \int_0^3 (4-x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left(4(3) - \frac{3^3}{3}\right) - \left(4(0) - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$3(4-c^2) = \left(12 - \frac{27}{3}\right) - (0-0) = 12 - 9 = 3$$

$$\Longrightarrow 3(4-c^2)=3 \Longrightarrow 4-c^2=1 \Longrightarrow c^2=3 \Longrightarrow c=\pm\sqrt{3}$$

لاحظ أن $c=-\sqrt{3}\notin(0,3)$ وبالتالي القيمة المطلوبة هي $c=\sqrt{3}\in(0,3)$

(3) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=\displaystyle\int_{\ln\left(\sqrt{x}\right)}^{\sqrt{x}} \frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$

الحل :

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{\ln\left(\sqrt{x}\right)}^{\sqrt{x}} \frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{2}\ln|x|}^{\sqrt{x}} \frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

$$=\frac{\sin\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)^2\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)^2-1}}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}\,\frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)^2\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)^2-1}}$$

السؤال الثاني (5 درجات) : أحسب $\dfrac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=x^2\ \sin^{-1}\left(\sin\left(e^x\right)\right)$

الحل :

$$y=x^2\ \sin^{-1}\left(\sin\left(e^x\right)\right)=x^2\ e^x$$

$$\frac{dy}{dx}=2x\,e^x+x^2\,e^x$$

(2) $y=\ln\left|\dfrac{e^x\ \cot\left(x^2\right)}{\cos(2x)}\right|$

الحل :

$$y=\ln\left|\frac{e^x\ \cot\left(x^2\right)}{\cos(2x)}\right|=\ln\left|e^x\right|+\ln\left|\cot\left(x^2\right)\right|-\ln\left|\cos(2x)\right|$$

عندئذ $y=x+\ln\left|\cot\left(x^2\right)\right|-\ln\left|\cos(2x)\right|$

بإشتقاق الطرفين

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{\left(-\csc^2\left(x^2\right)\right)\ (2x)}{\cot\left(x^2\right)}-\frac{(-\sin(2x))\ (2)}{\cos(2x)}$$
$$=1-\frac{2x\ \csc^2\left(x^2\right)}{\cot\left(x^2\right)}+\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

السؤال الثالث (12 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$$\int\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}}\ dx\ \ (1)$$

الحل :

$$\int\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}}\ dx=\int\frac{x-1}{x^{\frac{1}{4}}}\ dx=\int x^{-\frac{1}{4}}\ (x-1)\ dx$$
$$=\int\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}\right)\ dx=\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}-\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+c=\frac{4}{7}\,x^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{4}}+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-9}}\ dx\ \ (2)$$

الحل :

$$\int\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-9}}\ dx=\int\frac{e^x}{e^x\ \sqrt{\left(e^x\right)^2-(3)^2}}\ dx=\frac{1}{3}\ \sec^{-1}\left(\frac{e^x}{3}\right)+c$$

باستخدام القانون

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)\ \sqrt{\left[f(x)\right]^2-a^2}}\ dx=\frac{1}{a}\ \sec^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ حيث $a>0$.

$$\int x\ \sec^2\left(x^2\right)\ dx\ \ (3)$$

الحل :

$$\int x\ \sec^2\left(x^2\right)\ dx=\frac{1}{2}\int\sec^2\left(x^2\right)\ (2x)\ dx=\frac{1}{2}\tan\left(x^2\right)+c$$

باستخدام القانون

$$\int\sec^2\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx=\tan\left(f(x)\right)+c$$

(4) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+3}\,dx$ تلميح : استخدم التعويض $u = e^x + 3$

الحل :

$$u = e^x + 3 \implies e^x = u - 3$$

$$du = e^x\,dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+3}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x+3}\,e^x\,dx = \int \frac{u-3}{u}\,du = \int \left(\frac{u}{u} - \frac{3}{u}\right)\,du$$

$$= \int \left(1 - \frac{3}{u}\right)\,du = u - 3\ln|u| + c = e^x + 3 - 3\ln|e^x+3| + c$$

(5) $\int \frac{e^{2\ln x}}{x^3}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{e^{2\ln x}}{x^3}\,dx = \int \frac{e^{\ln x^2}}{x^3}\,dx = \int \frac{x^2}{x^3}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

(6) $\int 2x^2\,4^{x^3}\,dx$

الحل :

$$\int 2x^2\,4^{x^3}\,dx = \frac{2}{3}\int 4^{x^3}\,(3x^2)\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{4^{x^3}}{\ln 4} + c$$

باستخدام القانون

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$ حيث $a > 0$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1441 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \tanh^{-1}(\ln x) + sech\left(\sqrt{x}\right)$ حيث $x > 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-(\ln x)^2}\ \frac{1}{x} + \left(-sech\left(\sqrt{x}\right)\tanh\left(\sqrt{x}\right)\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{x\left(1-\ln^2 x\right)} - \frac{sech\left(\sqrt{x}\right)\tanh\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

(2) $y = \sqrt{4x + \cosh^2(5x)}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 + 2\cosh(5x)\ \sinh(5x)\ (5)}{2\sqrt{4x+\cosh^2(5x)}} = \frac{2 + 5\cosh(5x)\ \sinh(5x)}{\sqrt{4x+\cosh^2(5x)}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\cosh(x)}}{csch(x)}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{e^{\cosh(x)}}{csch(x)}\,dx = \int e^{\cosh(x)}\ \sinh(x)\,dx = e^{\cosh(x)} + c$$

باستخدام القانون

$$\int e^{f(x)}\ f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^8+1}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^8+1}} = \int \frac{1}{x\sqrt{(x^4)^2+(1)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4\sqrt{(x^4)^2+(1)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(-csch^{-1}(x^4)\right) + c = -\frac{1}{4}\,csch^{-1}(x^4) + c$$

باستخدام القانون

$\int \frac{f'(x)}{f(x)\,\sqrt{[f(x)]^2+a^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,csch^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$.

(3) $\int_1^e x^8 \ln x\, dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^8 dx \\ du = \frac{1}{x}\,dx & v = \frac{x^9}{9} \end{array}$$

$$\int_1^e x^8 \ln x\, dx = \left[\frac{x^9}{9}\ \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^9}{9}\ \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^9}{9}\ \ln x\right]_1^e - \frac{1}{9}\int_1^e x^8\,dx$$

$$= \left[\frac{x^9}{9}\ \ln x\right]_1^e - \frac{1}{9}\left[\frac{x^9}{9}\right]_1^e = \left[\frac{e^9}{9}\ln(e) - \frac{1}{9}\ln(1)\right] - \frac{1}{9}\left[\frac{e^9}{9} - \frac{1}{9}\right] = \frac{e^9}{9} - \frac{e^9}{81} + \frac{1}{81}$$

(4) $\int e^x \sin x\, dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = \sin x & dv = e^x\,dx \\ du = \cos x\,dx & v = e^x \end{array}$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{array}{ll} u = \cos x & dv = e^x\,dx \\ du = -\sin x\,dx & v = e^x \end{array}$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right)$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x + c\right)$$

$$\int \sin(7x)\ \cos(3x)\ dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \sin(7x)\ \cos(3x)\ dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(7x-3x)+\sin(7x+3x)\right]\ dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\left[\sin(4x)+\sin(10x)\right]\ dx = \frac{1}{2}\int \sin(4x)\ dx + \frac{1}{2}\int \sin(10x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\int \sin(4x)\ (4)\ dx + \frac{1}{2}\ \frac{1}{10}\int \sin(10x)\ (10)\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\cos(4x)\right) + \frac{1}{20}\left(-\cos(10x)\right) + c = -\frac{\cos(4x)}{8} - \frac{\cos(10x)}{20} + c$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

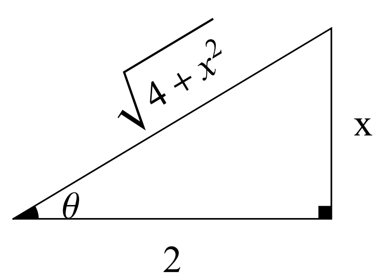
الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

ضع $x = 2\tan\theta \implies \tan\theta = \frac{x}{2}$

$$dx = 2\sec^2\theta\ d\theta$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{2\sec^2\theta}{\left(4+4\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\ d\theta = \int \frac{2\sec^2\theta}{\left(4\left(1+\tan^2\theta\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\ d\theta = \int \frac{2\sec^2\theta}{(4\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\ d\theta$$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(4)^{\frac{3}{2}}\sec^3\theta}\ d\theta = \frac{2}{8}\int \frac{1}{\sec\theta}\ d\theta = \frac{1}{4}\int \cos\theta\ d\theta = \frac{1}{4}\sin\theta + c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\ \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + c$$

(7) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+8}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{x}{x^2-4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)+4}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + \frac{4}{2}\int \frac{1}{(x^2-4x+4)+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + 2\int \frac{1}{(x-2)^2+(2)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + 2\left[\frac{1}{2}\ \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

باستخدام القانونين

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$ حيث $a>0$.

(8) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$x-1 = A_1(x+2) + A_2(x+1)$$

بوضع $x=-1$ نحصل على : $-1-1 = A_1(-1+2) \implies A_1 = -2$

بوضع $x=-2$ نحصل على : $-2-1 = A_2(-2+1) \implies -A_2 = -3 \implies A_2 = 3$

$$\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{3}{x+2}\right)\,dx$$

$$= -2\int \frac{1}{x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x+2}\,dx = -2\ln|x+1| + 3\ln|x+2| + c$$

(9) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}}$

الحل : باستخدام التعويض $x = u^4$ ، أي أن $u = x^{\frac{1}{4}}$

$$dx = 4u^3\, du$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{4u^3}{(u^4)^{\frac{1}{2}} + (u^4)^{\frac{1}{4}}}\, du = \int \frac{4u^3}{u^2 + u}\, du$$

$$= \int \frac{4u^3}{u(u+1)}\, du = 4 \int \frac{u^2}{u+1}\, du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$4 \int \frac{u^2}{u+1}\, du = 4 \int \left(u - 1 + \frac{1}{u+1} \right)\, du$$

$$= 4 \left(\frac{u^2}{2} - u + \ln|u+1| \right) + c = 2u^2 - 4u + 4\ln|u-1| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}} = 2\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} + 1\right| + c = 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} + 1\right| + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1441 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات) :

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=(x-2)^2$ على الفترة $[-1,5]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c)=\int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x)=(x-2)^2$ و $[a,b]=[-1,5]$

$$(5-(-1))\,(c-2)^2=\int_{-1}^{5}(x-2)^2\,dx$$

$$6\,(c-2)^2=\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{-1}^{5}=\frac{(5-2)^3}{3}-\frac{(-1-2)^3}{3}=\frac{3^3}{3}-\frac{(-3)^3}{3}=9-(-9)=18$$

$$\Longrightarrow\ (c-2)^2=3\ \Longrightarrow\ c-2=\pm\sqrt{3}\ \Longrightarrow\ c=2\pm\sqrt{3}$$

لاحظ أن $c=2\pm\sqrt{3}$ كلاهما يقع في الفترة $[-1,5]$

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|}\sin(t)\,dt$ حيث $x>0$.

الحل : $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|}\sin(t)\,dt$

$$=\sin(\ln|x|)\ \frac{1}{x}-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ \left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\sin(\ln|x|)}{x}+\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=\left(1-\cosh^{-1}x\right)^x\ \sin(\tan x)$.

الحل : $\ln|f(x)|=\ln\left|\left(1-\cosh^{-1}x\right)^x\ \sin(\tan x)\right|$

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\left(1-\cosh^{-1}x\right)^x\right|+\ln|\sin(\tan x)|=x\ \ln\left|1-\cosh^{-1}x\right|+\ln|\sin(\tan x)|$$

بإشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x :

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(1)\ \ln\left|1-\cosh^{-1}x\right|+x\ \frac{\left(0-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{1-\cosh^{-1}x}+\frac{\cos(\tan x)\ \sec^2 x}{\sin(\tan x)}$$

$$f'(x) = f(x)\ \left[\ln\left|1-\cosh^{-1}x\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}\ \left(1-\cosh^{-1}x\right)} + \cot(\tan x)\ \sec^2\right]$$

الجزء الثاني (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

$$\int 7^{2x}\ 9^{7^{2x}}\ dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int 7^{2x}\ 9^{7^{2x}}\ dx = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\ln 7}\int 9^{7^{2x}}\ \left(7^{2x}(2)\ln 7\right)\ dx = \frac{1}{2\ln 7}\ \frac{9^{7^{2x}}}{\ln 9} + c$$

باستخدام القانون $\int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$ حيث $a > 0$

$$\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\ sech^2\left(\sqrt{x}\right)\ dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\ sech^2\left(\sqrt{x}\right)\ dx = 2\int_1^4 sech^2\left(\sqrt{x}\right)\ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ dx = 2\left[\tanh\left(\sqrt{x}\right)\right]_1^4$$

$$= 2\left[\tanh(\sqrt{4}) - \tanh(\sqrt{1})\right] = 2\left[\tanh(2) - \tanh(1)\right] = 2\left[\frac{e^2-e^{-2}}{e^2+e^{-2}} - \frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}}\right]$$

باستخدام القانون $\int sech^2\left(f(x)\right)\ f'(x)\, dx = \tanh\left(f(x)\right) + c$

$$\int \sin^5 x\ \cos^3 x\, dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \sin^5 x\ \cos^3 x\, dx = \int \sin^5 x\ \cos^2 x\ \cos x\, dx = \int \sin^5 x\ (1-\sin^2 x)\ \cos x\, dx$$

بوضع $u = \sin x$

$$du = \cos x\, dx$$

$$\int \sin^5 x\ (1-\sin^2 x)\ \cos x\, dx = \int u^5\ (1-u^2)\, du = \int (u^5 - u^7)\, du$$

$$= \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + c = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{1}{x\sqrt{1+(x^2)^2}}\,dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{1+(x^2)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2\sqrt{1+(x^2)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(-csch^{-1}\left(x^2\right)\right) + c = -\frac{1}{2}\,csch^{-1}\left(x^2\right) + c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,csch^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} \quad (5)$$

الحل :

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-(x^2-4x+4)}}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2)^2-(x-2)^2}} = \left[\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_1^2$$

$$= \sin^{-1}(0) - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

$$\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)}\,dx \quad (6)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$2x^2-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(4x-1)$$

$$2x^2-1 = Ax^2 + A + 4Bx^2 + 4Cx - Bx - C$$

$$2x^2-1 = (A+4B)x^2 + (-B+4C)x + (A-C)$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcl} A + 4B = 2 & \longrightarrow & (1) \\ -B + 4C = 0 & \longrightarrow & (2) \\ A - C = -1 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (2) نجد أن : $B = 4C$

بطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) نجد أن : $4B + C = 3$

$$4(4C) + c = 3 \implies 16C + C = 3 \implies 17C = 3 \implies C = \frac{3}{17}$$

من المعادلة (2) نجد أن : $B = 4C = 4\left(\frac{3}{17}\right) = \frac{12}{17}$

من المعادلة (3) نجد أن : $A = -1 + C = -1 + \frac{3}{17} = \frac{-17+3}{17} = -\frac{14}{17}$

$$\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{14}{17}}{4x-1} + \frac{\frac{12}{17}x + \frac{3}{17}}{x^2+1}\right)\,dx$$

$$= -\frac{14}{17}\int \frac{1}{4x-1}\,dx + \frac{12}{17}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{3}{17}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{14}{17}\,\frac{1}{4}\int \frac{4}{4x-1}\,dx + \frac{12}{17}\,\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{3}{17}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{7}{34}\ln|4x-1| + \frac{6}{17}\ln(x^2+1) + \frac{3}{17}\tan^{-1}x + c$$

الجزء الثالث (17 درجة) :

(1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2}$

الحل :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0-(-\sin 3x\;(3))}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\;\cos 3x}{2} = \frac{3\;(1)}{2} = \frac{3}{2}$$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = \lim_{t\to5^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = \lim_{t\to5^-}\int_0^t (5-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to5^-}\left((-1)\int_0^t (5-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)\,dx\right) = \lim_{t\to5^-}\left((-1)\left[\frac{(5-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^t\right)$$

$$= \lim_{t\to5^-}\left((-1)\left[2\sqrt{5-x}\right]_0^t\right) = \lim_{t\to5^-}\left((-1)\left[2\sqrt{5-t}-2\sqrt{5-0}\right]\right)$$

$$= \lim_{t\to5^-}\left(2\sqrt{5}-2\sqrt{5-t}\right) = 2\sqrt{5}-0 = 2\sqrt{5}$$

التكامل المعتل متقارب وقيمته $2\sqrt{5}$.

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=2x$ وأحسب مساحتها .

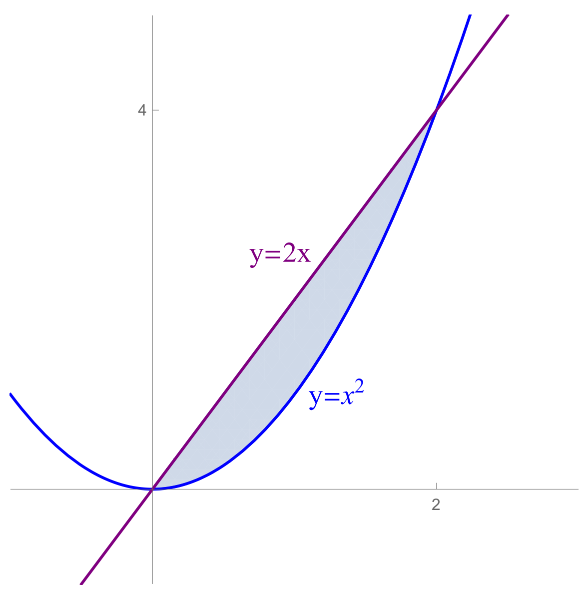
الحل :

المنحنى $y=x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y=2x$ يمثل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله 2

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y=x^2$ و $y=2x$:

$$x^2=2x \implies x^2-2x=0 \implies x(x-2)=0 \implies x=0\,,\; x=2$$



$$A = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)\ dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0-0) = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$$

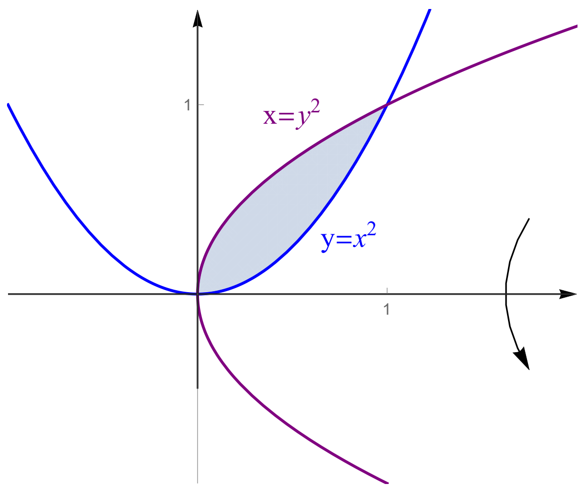
(4) جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y^2 = x$ حول محور x .

الحل :

$y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

$x = y^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته إلى اليمين

لاحظ أن المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للمنحنى $x = y^2$.



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3-1) = 0 \implies x = 0\,,\ x = 1$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2\right]\ dx = \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right)\ dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0-0)\right] = \frac{3\pi}{10}$$

(5) جد طول المنحنى $y = \dfrac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ من $x = 0$ إلى $x = 1$.

الحل :

$$y' = \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\,2x = x\,\sqrt{x^2+2}$$

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+\left(x\sqrt{x^2+2}\right)^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+\left(x^2\left(x^2+2\right)\right)}\,dx$$

$$=\int_0^1 \sqrt{1+x^4+2x^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx=\int_0^1 \sqrt{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$$

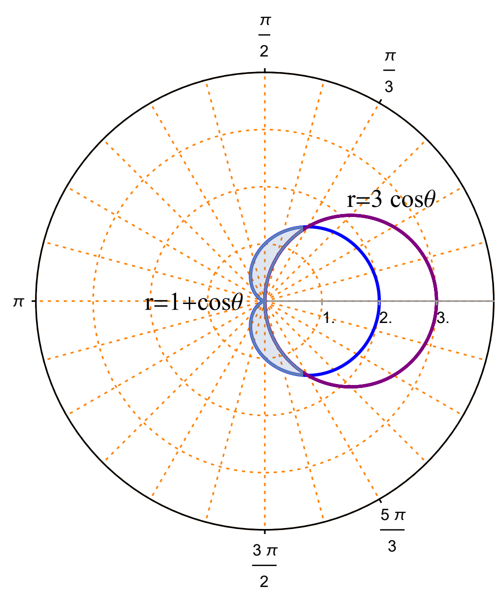
$$=\int_0^1 \left|x^2+1\right|\,dx=\int_0^1 \left(x^2+1\right)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}+1\right)-(0+0)=\frac{4}{3}$$

(6) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r=1+\cos\theta$ وخارج المنحنى $r=3\cos\theta$.

الحل :

المنحنى $r=1+\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r=3\cos\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta)=\left(\frac{3}{2},0\right)$ ونصف قطرها $\frac{3}{2}$



نقاط تقاطع المنحنى $r=1+\cos\theta$ مع المنحنى $r=3\cos\theta$:

$$3\cos\theta=1+\cos\theta \implies 2\cos\theta=1 \implies \cos\theta=\frac{1}{2} \implies \theta=\frac{\pi}{3}\ ,\ \theta=\frac{5\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A=2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(1+\cos\theta\right)^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos\theta\right)^2\,d\theta\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right)\right]\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right)\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos 2\theta\right)\, d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} - \left[\frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{3\pi}{2} + 0 + 0\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right] - \left[\left(\frac{9\pi}{4} + 0\right) - \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \pi - \frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$