جامعة الملك سعود	الاختبار الفصلي الأول	الفصل الأول ١٤٣٥/١٤٣٦هـ
كلية العلوم– قسم الرياضيات	في المقرر ١٥١ ريض	الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأول

أ- اثبت أن $(\neg p \vee \neg r) \to (p \wedge q) \equiv p \wedge (q \vee r)$. (درجتان)

ب- دون استخدام الجداول، أثبت أن العبارة $\left[(q \vee r) \to p\right] \leftrightarrow (p \wedge q)$ مصدوقة. (درجتان)

السؤال الثاني

أ- لتكن k, m, n أعداداً طبيعية بحيث $k + m + n = 10$. استخدم طريقة البرهان بالتناقض لإثبات أن واحداً من الأعداد k, m, n على الأقل أكبر من 3 . (درجتان)

ب- ليكن n عدداً صحيحاً. باستخدام طريقة البرهان بالمكافئ العكسي، أثبت أنه إذا كان $3n^2 + 4n + 3$ عدداً زوجياً، فإن n عدد فردي. (درجتان)

السؤال الثالث

أ- اثبت أن $n^2 > 4 + n$ لكل عدد صحيح $n \geq 3$. (٣ درجات)

ب- لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية أعداد صحيحة معرفة استقرائياً كما يلي:

$a_0 = 9, \ a_1 = 15$ و

$a_n = \frac{a_{n-1}\, a_{n-2}}{3} + 6$ لكل عدد صحيح $n \geq 2$.

أثبت أن $3 | a_n$ لكل عدد صحيح $n \geq 0$. (٤ درجات)

السؤال الرابع

أ- لتكن R العلاقة المعرفة على المجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ كما يلي:

$ab > 0 \Leftrightarrow a R b$.

(i) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)

(ii) أوجد كلاً من مجال ومدى العلاقة R . (درجتان)

(iii) مثل العلاقة R برسم موجّه. (درجة)

ب- لتكن $S = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}$ علاقة معرفة على المجموعة $B = \{1, 2, 3\}$.

(i) أوجد M_S ، مصفوفة العلاقة S . (درجة)

(ii) أوجد S^2 . (درجتان)

(iii) أوجد S^{-1} . (درجة).

(iv) أوجد $\overline{S}$. (درجة).

د. برهانا

إصلاح الاختبار الشهري الأول ١٥١ ريض
للفصل الأول ١٤٣٦/٣٥ هـ

السؤال الأول (٤ درجات)

(أ) $(\neg p \vee \neg r) \rightarrow (p \wedge q) \equiv$

$\neg(\neg p \vee \neg r) \vee (p \wedge q) \equiv$

② $(p \wedge r) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (q \vee r)$

(ب) $(p \wedge q) \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow p] \equiv$

$\neg(p \wedge q) \vee [\neg(p \vee r) \vee p] \equiv$

② $(\neg p \vee \neg q) \vee [(\neg p \wedge \neg r) \vee p] \equiv$

$(p \vee \neg p) \vee (\neg q \vee (\neg p \wedge \neg r)) \equiv T \vee (\neg q \vee (\neg p \wedge \neg r))$

$\equiv T$

السؤال الثاني (٤ درجات)

(أ) نفترض أن جميع الأعداد k, m, n أقل أو ~~يساوي~~ يساوي 3

ومنه $0 \leq k \leq 3$, $0 \leq m \leq 3$, $0 \leq n \leq 3$ فإن $0 \leq k+m+n \leq 9$ ②

وهذا يتناقض مع ~~المعطى~~ أن $k+m+n=10$

(ب) المثانية العكسي للعبارة هو: إذا كان n عدد زوجيا

① فإن $(3n^2+4n+3)$ هو عدد فردي.

الإثبات: نفترض أن n هو عدد زوجيا إذاً

$n=2k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ،

$$3n^2+4n+3 = 3(2k)^2+4(2k)+3$$
$$= 12k^2+8k+2+1$$
① $$= 2(6k^2+4k+1)+1$$
$$= 2m+1$$

فنستنتج أن $(3n^2+4n+3)$ هو عدد فردي.

السؤال الثالث (٧ درجات)

(أ) نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي

نضع $P(n):$ " $n^2>4+n$ "

• خطوة الأساسية: $n=3$ ، $9>4+3=7$
① إذن $P(3)$ صائب
• خطوة الاستقراء: نأخذ $k\geq 3$ ونفترض أن
$P(k)$ صائب (يعني لدينا $k^2>4+k$) فلنثبت صحة
$P(k+1)$: $((k+1)^2 \overset{?}{>} 4+(k+1))$

$$(k+1)^2 = k^2+2k+1.$$
② $$(k+1)^2 > 4+k+2k+1.$$
$$(k+1)^2 > 4+(k+1).$$ لأن $k\geq 3$ (موجب)

إذن $P(k+1)$ صائب.

فنستنتج أن لكل $n\geq 3$ ، $n^2>4+n$

(ب) نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي:

نضع $P(n):$ " $3|a_n$ "

• خطوة الأساسية: $n=0$ ؛ $a_0=9$ وبما أن $3|9$ فإن $3|a_0$ إذن
① $P(0)$ صائب.

$n=1$ ؛ $a_1=15$ وبما أن $3|15$ فإن $3|a_1$ إذن
$P(1)$ صائب

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 1$. نفترض أن $P(0), P(1), \ldots, P(k)$

جميعها صائبة ولنثبت صحة $P(k+1)$ ($3 \overset{?}{|} a_{k+1}$)

(1) بما أن $a_{k+1} = \dfrac{a_k \, a_{k-1}}{3} + 6 \quad (1)$

وبما أن $P(k)$ صائب فان $3 | a_k \Rightarrow$ يوجد عدد صحيح c بحيث $a_k = 3c$

كذلك $P(k-1)$ صائب فان $3 | a_{k-1} \Rightarrow$ يوجد عدد صحيح d بحيث $a_{k-1} = 3d$

(1) بتعويض قيم a_k و a_{k-1} في (1)

$$a_{k+1} = \frac{(3c)(3d)}{\cancel{3}} + 6 = 3cd + 6$$
$$= 3(\underbrace{cd+2})$$
$$= 3\, m$$

(1) فنستنج أن $3 | a_{k+1}$

فنستنج أن لكل $n \geq 0$ ، $3 | a_n$

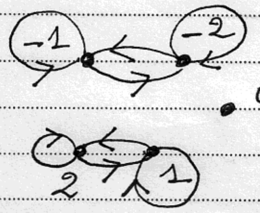
السؤال الرابع (١٠ درجات)

أ) (1) (2) $R = \{(-2,-2) ; (-2,-1) ; (-1,-2) ; (-1,-1) ;$
$(1,1) ; (1,2) ; (2,1) ; (2,2)\}$

(2) (0,5) + (0,5) مجال R هو $D_R = \{-2, -1, 1, 2\}$

(1) مدى R هو $Im_R = \{-2, -1, 1, 2\}$

(3) (1)



ب)

(i) (1) $M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) (2) $S^2 = S \circ S = \{(1,1) ; (1,3) ; (2,2) ; (2,3) ; (3,1) ; (3,2) ; (3,3)\}$

(iii) (1) $S^{-1} = \{(2,1) ; (1,2) ; (3,2) ; (2,3) , (3,3)\}$

(iv) (1) $\overline{S} = B \times B - S = \{(1,1) ; (1,3) ; (2,2) ; (3,1)\}$