جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار الشهري الأول في المقرر ١٥١ ريض	الفصل الأول ١٤٣٤/١٤٣٥هـ الزمن: ساعة و نصف

السؤال الأول (٦ درجات)

(أ) أثبت أن : $(p \to q) \wedge r \equiv \neg(r \to p) \vee \neg(r \to \neg q)$. (٣ درجات)

(ب) بدون استخدام الجداول، أثبت أن : $\neg u \to \left[u \to (v \vee w \vee x \vee y)\right]$ مصدوقة. (درجتان)

(ج) اكتب المكافئ العكسي للعبارة التالية:

إذا كانت mn عدداً فردياً، فإن m عدد فردي و n عدد فردي. (درجة)

السؤال الثاني (٤ درجات)

(أ) لتكن x, y و z أعدادا حقيقية بحيث $x + y + z > 3$. استخدم طريقة البرهان بالتناقض لإثبات أن:

$x > 1$ أو $y > 1$ أو $z > 1$. (درجتان)

(ب) ليكن m, n عددين حقيقيين. استخدم طريقة البرهان البديل لإثبات أنه إذا كان $m \leq 2$ فإن

$n - m \neq 4$ أو $n \leq 6$.

(درجتان)

السؤال الثالث (٦ درجات)

(أ) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن : $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3 لكل عدد صحيح $n \geq 0$.

(٣ درجات)

(ب) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية معرفة استقرائيا كما يلي : $\begin{cases} a_1 = 8 \quad , \quad a_2 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$.

أثبت أن : a_n هو عدد زوجي لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (٣ درجات)

السؤال الرابع (٩ درجات)

(أ) لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ كما يلي : $x \; R \; y \Leftrightarrow xy \geq 2$.

(i) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)

(ii) أوجد مجال و مدى R. (درجة + درجة)

(ب) لتكن $B = \{1, 2, 3\}$ و لتكن $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\}$ علاقة على B.

(i) أوجد S^2. (درجتان)

(ii) بيّن فيما إذا كانت S انعكاسية، تناظرية، متعدية. (٣ درجات)

لا يكتب في هذا الهامش

إصلاح الاختبار الشهري الأول (١٥١ ريض)
للفصل الأول ١٤٣٤ - ١٤٣٥ هـ

السؤال الأول: (6 درجات)

أ) $(p \to q) \wedge r \equiv (\neg p \vee q) \wedge r$

$\equiv (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

3 $\equiv \neg(p \vee \neg r) \vee \neg(\neg q \vee \neg r)$

$\equiv \neg(\neg r \vee p) \vee \neg(\neg r \vee \neg q)$

$\equiv \neg(r \to p) \vee \neg(r \to \neg q)$

ب) $\neg u \to [u \to (v \vee w \vee x \vee y)] \equiv$

$\neg u \to [\neg u \vee (v \vee w \vee x \vee y)] \equiv$

2 $u \vee [\neg u \vee (v \vee w \vee x \vee y)] \equiv$

$(u \vee \neg u) \vee (v \vee w \vee x \vee y) \equiv T \vee (v \vee w \vee x \vee y)$

$\equiv T$

ج) نضع p التعبير mn عدد فردي
q التعبير m عدد فردي
r التعبير n عدد فردي

العبارة تكتب على الشكل $A:\ p \to (q \wedge r)$

المكافئ العكسي لـ A: $\neg(q \wedge r) \to \neg p$

$\equiv (\neg q \vee \neg r) \to \neg p$

1 " إذا كان m عددًا زوجيًا أو n عددًا زوجيًا
فإن mn هو عدد زوجي "

السؤال الثاني (4 درجات)

أ) نستخدم طريقة البرهان بالتناقض.

نفرض أن $x \le 1$ و $y \le 1$ و $z \le 1$

(2)

فإن $x+y+z \le 1+1+1$

يعني $x+y+z \le 3$

وهذا استحالة لأن $x+y+z > 3$.

(ب) نضع p العبارة التالية: $m \le 2$

q العبارة: $n-m=4$

r العبارة: $n \le 6$

لإثبات صحة $p \to (q \vee r)$ نستخدم طريقة البرهان المباشر

نفترض صحة $p \wedge \neg q$ ولنثبت صحة r

بما أن $n-m=4$ فإن $n=m+4$ وبما أن $m \le 2$ فإن لدينا

(2)

$n = m+4 \le 2+4$

إذن نحصل أن $n \le 6$

يعني العبارة $(p \wedge \neg q) \to r$ صحيح.

السؤال الثالث (6 درجات)

(أ) نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي

نضع $P(n): \; 3 \mid (4^n-1)$

• الخطوة الأساسية: $n=0$ ؛ $4^0-1=0$

بما أن $3 \mid 0$ (لأن $0=3\times 0$) فإن $P(0)$ صائبة.

• خطوة الاستقراء: ثابت $k \ge 0$. نفترض أن $P(k)$ صائبة (يعني لدينا $3 \mid 4^k-1$) ولنثبت صحة $P(k+1)$.

هذا الهامش

$$3 \overset{?}{\Big|} 4^{k+1}-1$$

بما أن $P(k)$ صادق إذن $3 \mid 4^k-1$ يعني يوجد عدد صحيح c

بحيث

$$4^k - 1 = 3c$$

كذلك لدينا

2

$$4^{k+1}-1 = 4\times 4^k - 1$$
$$= 4\times(3c+1) - 1$$
$$= 12c+4-1 = 12c+3$$
$$= 3(4c+1) = 3m$$

حيث $m=4c+1$ وهو عدد صحيح.

فنستنتج أن $3 \mid 4^{k+1}-1$ إذن $P(k+1)$ صادق

فنستنتج أن لكل $n\geq 0$ ، $3 \mid 4^n-1$

(ب) نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي

نضع $P(n)$: a_n هو عدد زوجي

• خطوة الأساس :

1

$n=1$ ، $a_1 = 8$ (معطى) وهو زوجي

$n=2$ ، $a_2 = 4$ (معطى) وهو زوجي

إذن $P(1)$ و $P(2)$ صادقة

• خطوة الاستقراء : نأخذ $k\geq 2$ ، ونفترض أن $P(1)$ ، $P(2)$ ، ... ، $P(k)$ جميعها صادقة

فلنثبت أن $P(k+1)$ يبقى صادق (يعني a_{k+1} هو زوجي؟)

بما أن لدينا $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$

و $P(k-1)$ هو صادق إذن a_{k-1} هو عدد زوجي

كذلك $P(k)$ صائب أيضا a_k هو عدد زوجي

2

ونعلم أن جمع عددين زوجين هو عدد زوجي

فنستنتج أن a_{k+1} هو عدد زوجي.

إذاً $P(k+1)$ هو صائب.

فنستنتج أن لكل $n \geq 1$، a_n هو عدد زوجي.

السؤال الرابع (9 درجات)

(أ)

(i) 2 $$R = \{(-2,-2); (-2,-1); (-1,-2); (1,2); (2,1), (2,2)\}$$

(ii) 1 مجال R هو $D_R = \{-2,-1,1,2\}$

1 مدى R هو $Im_R = \{-2,-1,1,2\}$

(ب) $S = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,2); (3,1); (3,3)\}$ ، $S^2 = SoS$

(i) 2 فإن $$S^2 = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,2); (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

(ii) • العلاقة التطابقية على B هي $I = \{(1,1), (2,2); (3,3)\}$

1 بما أن $I \subset S$ فإن S انعكاسية على B

1 • بما أن $1S2$ لكن $2 \not S 1$ فإن S ليست تناظرية على B

1 • بما أن $S^2 \not\subset S$ فإن S ليست متعدية

(نرى أيضا مباشرة: $3S1$ و $1S2$ لكن $3 \not S 2$)