جامعة الملك سعود　　　　الاختبار الفصلي الأول　　　　الفصل الثاني

1436/1435هـ

كلية العلوم- قسم الرياضيات　　　　في المقرر 151 ريض　　　　الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأول

أ- أثبت أن $(p \vee q) \to (\neg p \wedge r) \equiv \neg p \wedge (q \to r)$. (درجتان)

ب- أثبت أن العبارة $\neg u \to [(u \wedge v) \to w]$ مصدوقة. (درجتان)

السؤال الثاني

أ- لتكن k, m, n أعداداً صحيحة. استخدم طريقة البرهان بالمكافئ العكسي لإثبات أنه إذا كان $k + m + n$ زوجياً، فإن k زوجي أو m زوجي أو n زوجي . (درجتان)

ب- ليكن a عدداً غير كسري. استخدم طريقة البرهان بالتناقض لإثبات أن $3a - 2$ عدد غير كسري. (درجتان)

السؤال الثالث

أ- اثبت أن $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n > 2^n$ لكل عدد صحيح $n \geq 4$. (3 درجات)

ب- لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية الأعداد الحقيقية المعرفة استقرائياً كما يلي:

$a_1 = -1,\ a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = -\sqrt{10}$ و $a_n = a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3}$ لكل عدد صحيح $n \geq 4$.

أثبت أن $a_n < 0$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (3 درجات)

السؤال الرابع

أ- لتكن R العلاقة المعرفة على المجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ كما يلي:

$a\,R\,b \Leftrightarrow a^2 = b$.

(i) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)

(ii) أوجد كلاً من مجال ومدى العلاقة R. (درجتان)

(iii) مثّل العلاقة R برسم موجّه. (درجة)

(iv) أوجد M_R، مصفوفة العلاقة R. (درجة)

ب- لتكن $S = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,3)\}$ علاقة معرفة على المجموعة $B = \{1, 2, 3\}$.

(i) أوجد S^{-1}. (درجة).

(ii) أوجد $S \cap S^{-1}$. (درجة)

(iii) أوجد $S - S^{-1}$. (درجة).

(iv) أوجد $S \circ S^{-1}$. (درجتان).

د. برهان

إصلاح الاختبار الشهري الأول ١٥١ ريض للفصل الثاني ١٤٣٦/٣٥ هـ

السؤال الأول: (4 درجات)

أ)

$$(p\vee q)\to(\neg p\wedge r)\equiv$$

$$\neg(p\vee q)\vee(\neg p\wedge r)\equiv(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge r)$$

(2)

$$\equiv\neg p\wedge(\neg q\vee r)$$

$$\equiv\neg p\wedge(q\to r)$$

ب)

$$\neg u\to[(u\wedge v)\to w]\equiv$$

$$u\vee[\neg(u\wedge v)\vee w]\equiv u\vee[(\neg u\vee\neg v)\vee w]$$

$$\equiv(u\vee\neg u)\vee\neg v\vee w$$

(2)

$$\equiv(T\vee\neg v)\vee w$$

صدوقة $\equiv T\vee w\equiv T$

السؤال الثاني (4 درجات)

أ) نأخذ k, m, n أعداد صحيحة. نضع التقارير التالية:

p: $(k+m+n)$ هو زوجي

q: k زوجي

r: m زوجي

u: n زوجي.

(1)

العبارة تكتب على الصيغة الرمزية $p\to(q\vee r\vee u)$.

المكافئ العكسي للعبارة هي: $\neg(q\vee r\vee u)\to\neg p\equiv$

$(\neg q)\wedge(\neg r)\wedge(\neg u)\to\neg p$

يعني "إذا كان k فرديا و m فرديا و n فرديا فإن $(k+m+n)$ هو فرديا."

الإثبات: بما أن k فردي إذن $k=2L+1$ $(L\in\mathbb{Z})$

(1)

كذلك m فردي إذن $m=2J+1$ $(J\in\mathbb{Z})$

ب) نأخذ a عددا غير كسري. نستخدم طريقة البرهان بالتناقض

نفترض أن $x = 3a-2$ هو كسري فإن $a = \frac{x+2}{3}$

هو كسري و هذا يتناقض مع المعطى أن a غير كسري

فنستنتج أن $(3a-2)$ هو عدد غير كسري. (2)

السؤال الثالث (6 درجات)

أ) نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي:

نضع $P(n): \quad 2^n < n!$

• خطوة الأساس: $n=4$; $16 = 2^4 \overset{?}{<} 4! = 24$ صح إذن $P(4)$ صائب

(1)

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 4$ ونفترض أن $P(k)$ صائب

(يعني لدينا $2^k < k!$) فلنثبت صحة $P(k+1)$ $\left(2^{k+1} \overset{?}{<} (k+1)!\right)$

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 < 2\,k!$$

(2)

$$< (k+1)\,k! = (k+1)!$$

إذن $P(k+1)$ صائب.

فنستنتج أن لكل $n \geq 4$; $2^n < n!$.

ب) نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي:

نضع $P(n): \quad a_n < 0$

• خطوة الأساس:

$n=1$	$n=2$	$n=3$
$a_1 = -1 < 0$	$a_2 = -1/2 < 0$	$a_3 = -\sqrt{10} < 0$
إذن $P(1)$ صائب	إذن $P(2)$ صائب	إذن $P(3)$ صائب

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 3$ و نفترض أن $P(3), P(4), \ldots, P(k)$ (1)

جميعها صائبة فلنثبت صحة $P(k+1)$.

بما أن $P(k)$ صائب فإن $a_k < 0$ (2)

كذلك $P(k-1)$ صائب فإن $a_{k-1} < 0$ وبما أن $a_{k+1} = a_k a_{k-1} a_{k-2}$

و $P(k-2)$ صائب فإن

السؤال الرابع (11 درجة)

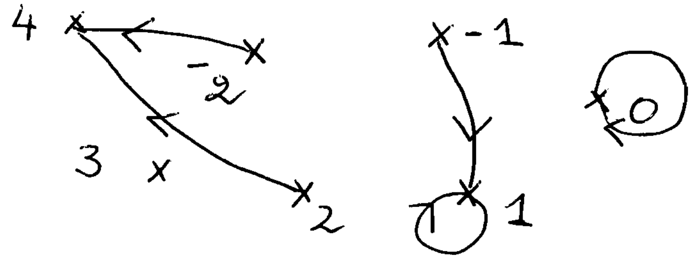
(أ)

(i) $R = \{(-2,4);(-1,1);(0,0);(1,1);(2,4)\}$ — 2

(ii) مجال R هو $D_R = \{-2,-1,0,1,2\}$ — 1

مدى R هو $Im_R = \{0,1,4\}$ — 1

(iii) — 1



(iv) مصفوفة العلاقة R هي: — 1

$$M_R = \begin{array}{c|ccccccc} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(ب)

(i) $S^{-1} = \{(1,1);(2,1);(1,3);(3,3)\}$ — 1

(ii) $S \cap S^{-1} = \{(1,1);(3,3)\}$ — 1

(iii) $S - S^{-1} = \{(1,2);(3,1)\}$ — 1

(iv) $S \circ S^{-1} = \{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2);(1,3);(3,1);(3,3)\}$ — 2