جامعة الملك سعود — الاختبار الفصلي الأول — الفصل الثاني ١٤٣٤/١٤٣٥هـ

كلية العلوم– قسم الرياضيات — في المقرر ١٥١ ريض — الزمن: ساعة ونصف — د. برهان

اسم الطالب:................ الرقم الجامعي: .... رقم الشعبة:..........

السؤال الاول

أ– بين فيما إذا كانت العبارة المنطقية $(p\to q)\wedge(p\to r)$ تكافئ منطقياً العبارة $p\to(q\wedge r)$. (درجتان)

1

$$p\to(q\wedge r)\equiv \neg p\vee(q\wedge r).$$

$$\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r).$$

1

$$\equiv(p\to q)\wedge(p\to r).$$

ب– (i) دون استخدام الجداول، أثبت أن العبارة $\neg p\to[(p\vee q)\to q]$ مصدوقة. (درجتان)

$$\neg p\to[(p\vee q)\to q]\equiv p\vee[(p\vee q)\to q].$$

1

$$\equiv p\vee[\neg(p\vee q)\vee q].$$

1

$$\equiv(p\vee q)\vee\neg(p\vee q).$$

$$\equiv T$$

(ii) استخدم (i) لإثبات أن $\neg p\to[(p\vee r\vee s\vee u)\to(r\vee s\vee u)]$ مصدوقة. (درجة)

1

نستخدم مبدأ التعويض المنطقي : نضع $q: r\vee s\vee u$

بما أن $\neg p\to[(p\vee q)\to q]$ هي مصدوقة فإن

$\neg p\to[(p\vee r\vee s\vee u)\to(r\vee s\vee u)]$ هي مصدوقة.

السؤال الثاني

أ- لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية معرفة استقرائياً كما يلي:

$a_0 = 1$ و $a_n = 2a_{n-1} + 1$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$.

أثبت أن $a_n = 2^{n+1} - 1$ لكل عدد صحيح $n \geq 0$. (٣ درجات)

نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي:

نضع $P(n): \quad a_n = 2^{n+1} - 1$

• خطوة الأساس: $n=0$; $a_0 = 2^{0+1} - 1 = 1$ صح إذن $P(0)$ صائب 1

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 0$. نفترض أن $P(k)$ صائب (يعني لدينا $a_k = 2^{k+1} - 1$) ولنثبت صحة $P(k+1)$:

2

$$a_{k+1} = 2a_k + 1$$
$$= 2(2^{k+1} - 1) + 1$$
$$= 2^{k+2} - 2 + 1 = 2^{k+2} - 1$$

فنستنتج أن لكل $n \geq 0$، $a_n = 2^{n+1} - 1$.

ب- ليكن m عدداً صحيحاً يقبل القسمة على 6. باستخدام طريقة البرهان بالمكافئ العكسي، أثبت أنه إذا كان n عدداً صحيحاً بحيث $m+n$ لا يقبل القسمة على 3، فإن n لا يقبل القسمة على 3. (درجتان)

نفترض أن $3|_n$ ولنثبت أن $3|_{m+n}$.

1

بما أن $6|_m$ إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $m = 6k$

كذلك لدينا $3|_n$ فإنه يوجد عدد صحيح k' بحيث $n = 3k'$

فنستنتج أن $m+n = 6k + 3k'$

1

$= 3(2k+k')$

$= 3L$ حيث $L = 2k + k' \in \mathbb{Z}$

يعني $3|_{m+n}$.

جـ- إذا علمت أن $\sqrt{6}$ عدد غير كسري، فاستخدم طريقة البرهان بالتناقض لإثبات أن $2\sqrt{6}-3$ عدد غير كسري. (درجتان)

نفترض أن $x = 2\sqrt{6}-3$ هو عدد كسريا.

2 فإن $\frac{x+3}{2} = \sqrt{6}$ هو أيضا عدد كسريا

و هذا يتناقض مع المعطى أن $\sqrt{6}$ هو عدد غير كسري

السؤال الثالث

أ- لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ كما يلي:

$ab < 0 \Leftrightarrow a R b$.

(i) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)

2 $R = \{(-2,2); (-2,1); (-1,2); (-1,1); (1,-2); (1,-1); (2,-1); (2,-2)\}$

(ii) أوجد كلاً من مجال ومدى العلاقة R. (درجتان)

1 $D_R = \{a \in A / (a,b) \in R\}$
$= \{-2,-1,1,2\}$

1 $Im R = \{b \in A / (a,b) \in R\} = \{-2,-1,1,2\}$

(iii) أوجد R^2. (درجتان)

$R = \{(-2,+2); (-2,+1); (-1,+2); (-1,+1); (1,-1); (1,-2); (2,-1); (2,-2)\}$

$R^2 = R \circ R = \{(-2,-2); (-2,-1); (-1,-2); (-1,-1); (1,1); (1,2); (2,1), (2,2)\}$

ب- لتكن S علاقة المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كما يلي:

$m+n \Leftrightarrow m S n$ عدد فردي.

بين فيما إذا كانت S، إنعكاسية، تناظرية، متعدية. (٣ درجات)

• S ليست انعكاسية لأن $2 \not S 2$ ($2+2=4$ عدد زوجي) (1)

• S تناظرية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ $a,b \in \mathbb{Z}$

إذا كان $a S b \Leftrightarrow (a+b)$ هو عدد فردي $\Leftrightarrow (b+a)$ هو فردي

هذا يؤدي أن $b S a$. (1)

• S ليست متعدية على $\mathbb{Z}$ لأن: $3 S 2$ و $2 S 5$ لكن $3 \not S 5$.

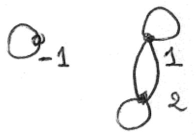
(1)

جـ- لتكن T علاقة معرفة على المجموعة $B = \{-1,1,2\}$ كما يلي:

$.xy > 0 \Leftrightarrow x T y$

(i) مثل العلاقة T برسم موجه. (درجة)

(1)



(ii) أثبت أن T علاقة تكافؤ. (٣ درجات)

$T = \{(-1,-1); (1,1); (2,2)$
$(1,2); (2,1)\}$

• T انعكاسية على B لأنها تحتوي على العلاقة القطرية

(3)

• T تناظرية $T^{-1} = T$

• T متعدية

(iii) جد جميع فصول التكافؤ للعلاقة T. (درجتان)

(2)

$[-1] = \{-1\}$

$[1] = [2] = \{1,2\}$