جامعة الملك سعود كلية العلوم – قسم الرياضيات	الاختبار الفصلي الأول في المقرر ١٥١ ريض	الفصل الثاني ١٤٣٣/١٤٣٤هـ الزمن: ساعة ونصف

س١

(أ) أثبت أن $(p \to q) \wedge (q \vee \neg r) \equiv (p \vee r) \to q$، ثم استخدم ذلك لإثبات أن
$\big((u \vee v) \to w\big) \wedge \big(w \vee \neg (x \wedge y)\big) \equiv \big((u \vee v) \vee (x \wedge y)\big) \to w$. (٣ درجات)

(ب) أثبت أن $(p \wedge q) \to (r \to q)$ مصدوقة. (درجتان)

س٢

(أ) إذا كان $a \neq 1$ عدداً حقيقاً، أثبت أن $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ لكل عدد صحيح $n \geq 0$. (٣ درجات)

(ب) لتكن $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية معرفة استقرائياً كما يلي: $b_1 = 1, b_2 = 2$ و $b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}$ لكل عدد صحيح $n \geq 3$. أثبت أن $b_n = n$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (٤ درجات)

(ج) لتكن m, n, p أعداداً صحيحةً بحيث $p = m + n$. إستخدم طريقة البرهان البديل لإثبات أنه إذا كان $p > 0$ ، فإن إما $m > 0$ أو $n > 0$. (درجتان)

س٣

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ بالقاعدة $x\, R\, y \Leftrightarrow x = 2y$.

(أ) أكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجة)

(ب) أوجد مجال R (D_R) ثم أوجد مدى R $(\mathrm{Im}(R))$. (درجتان)

(ج) أرسم الرسم الموجه للعلاقة R. (درجة)

س٤

لتكن $S = \{(a,b),(a,d),(b,c),(c,d)\}$ علاقة معرفة على المجموعة $B = \{a,b,c,d\}$. أوجد.

(أ) M_S. (درجة)

(ب) S^2. (درجة)

(ج) $S^{-1} \circ S$. (درجة)

(د) $S^2 - (S^{-1} \circ S)$. (درجة)

س٥

لتكن T علاقة معرفة على المجموعة $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ بالقاعدة $m\, T\, n \Leftrightarrow m < n$. بين فيما إذا كانت T إنعكاسية، تناظرية ، متعدية. (٣ درجات)

لا يكتب في هذا الهامش

د. برهان

إصلاح الاختبار الشهري الأول (١٥١ ريض)
للفصل الثاني ١٤٣٣ - ١٤٣٤هـ

السؤال الأول (5 درجات)

(أ) $q \vee \neg r \equiv \neg r \vee q \equiv r \to q$ قاعدة الشرط ①

إذن $(p \to q) \wedge (q \vee \neg r) \equiv (p \to q) \wedge (r \to q)$

① $\equiv (p \vee r) \to q$ قاعدة البرهان البديل

نستخدم مبدأ التعويض للتكافؤ المنطقي:

نضع $A :\equiv u \vee v$

① $B :\equiv w$

$C :\equiv x \wedge y$

فإن $((u \vee v) \to w) \wedge (w \vee \neg(x \wedge y)) \equiv (A \to B) \wedge (B \vee \neg C)$

$\equiv (A \vee C) \to B$

$\equiv ((u \vee v) \vee (x \wedge y)) \to w$

(ب) $(p \wedge q) \to (r \to q) \equiv (p \wedge q) \to (\neg r \vee q)$ قاعدة الشرط

٤ $(p \wedge q) \to (r \to q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (\neg r \vee q)$ قاعدة الشرط

$(p \wedge q) \to (r \to q) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee q$ قاعدة ديمورجان

$(p \wedge q) \to (r \to q) \equiv \neg p \vee \neg r \vee (\neg q \vee q)$ قاعدة التجميع

$(p \wedge q) \to (r \to q) \equiv \neg p \vee \neg r \vee T$ قاعدة النفي

$(p \wedge q) \to (r \to q) \equiv \neg p \vee T \equiv T$ قاعدة الشمول

السؤال الثاني (9 درجات)

(أ) ليكن $a \neq 1$ ، نضع $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ حيث $n \geq 0$

② $S_n = 1 + a(\underbrace{1 + a + \dots + a^{n-1}}_{S_n - a^n}) = 1 + a(S_n - a^n)$

$$S_n = 1 + aS_n - a^{n+1}$$

$$S_n - aS_n = 1 - a^{n+1}$$

1 $$(1-a)\,S_n = 1 - a^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad ; \quad a \neq 1$$

طريقة ثانية: نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي على n

نضع $\mathcal{P}(n): \ 1+a+a^2+\cdots+a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

1 - الخطوة الأساسية: $n=0$ ؛ $1 \overset{?}{=} \dfrac{1-a}{1-a} = 1$ إذن $\mathcal{P}(0)$ صائب

- خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 0$ ، نفترض أن $P(k)$ صائب (يعني) $\left(1+a+\cdots+a^k = \dfrac{a^{k+1}-1}{a-1}\right.$

فلنثبت أن $P(k+1)$ يبقى صائب

$$\underbrace{1+a+\cdots+a^k}\, + a^{k+1} = \frac{a^{k+1}-1}{a-1} + a^{k+1}$$

2 $$= \frac{a^{k+1}-1+(a-1)a^{k+1}}{a-1}$$

$$= \frac{\cancel{a^{k+1}}-1+a^{k+2}-\cancel{a^{k+1}}}{a-1}$$

$$= \frac{a^{k+2}-1}{a-1}$$

فنستنتج أن لكل $n \geq 0$ ، $P(n)$ صائب يعني $1+a+\cdots+a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$

(ب) نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي:

نضع $P(n)$: " $b_n = n$ "

1 • الخطوة الأساسية: $n=1$; $b_1 = 1$ إذن $P(1)$ صائب

$n=2$; $b_2 = 2$ إذن $P(2)$ صائب

• الخطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 2$ ، نفترض أن $P(1), P(2), \ldots, P(k)$

جميعها صائبة فلنثبت أن $P(k+1)$ يبقى صائب

1 نعلم أن $b_{k+1} = 2b_k - b_{k-1}$ (*)

بما أن $P(k)$ صائب إذن $b_k = k$

كذلك $P(k-1)$ صائب إذن $b_{k-1} = k-1$ بالتعويض في (*)

هذا الهامش

(1) $b_{k+1} = 2k - (k-1)$

$= 2k - k + 1 = k+1$

إذن $P(k+1)$ هو صائب.

فنستنتج أن $P(n)$ صائب لكل $n \geq 1$ يعني لكل $n \geq 1$ ، $b_n = n$.

(ج) نستخدم طريقة البرهان البديل $A \longrightarrow B \vee C \equiv (A \wedge \neg B) \to C$

نفترض أن $p > 0$ و $m < 0$ فلنثبت أن $n > 0$.

(2) بما أن $p = m + n$ فان $n = p - m$

لدينا $p > 0$ و $-m > 0$. هذا يؤدي أن:

$$n = p - m > 0$$

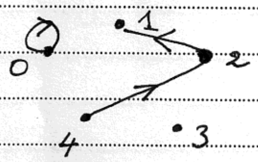
السؤال الثالث (4 درجات)

(1) (أ) $R = \{(0,0) ; (2,1) ; (4,2)\}$

(1) (ب) مجال R هو $D_R = \{0, 2, 4\}$

(1) مدى R هو $Im_R = \{0, 1, 2\}$

(1) (ج)



السؤال الرابع (4 درجات)

(1) (أ)

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ب) $S^2 = S \circ S$

(1) $S^2 = \{(a,c) , (b,d)\}$

(ج) $S = \{(a,b) ; (a,d) ; (b,c) ; (c,d)\}$

$S^{-1} = \{(b,a) ; (d,a) ; (c,b) ; (d,c)\}$

(1) $S^{-1} \circ S = \{(a,a) ; (a,c) ; (b,b) , (c,a) ; (c,c)\}$

(1) (د) $S^2 - (S^{-1} \circ S) = \{(b,d)\}$

لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الخامس (3 درجات)

1 * T ليست انعكاسية لأن $1 \nless 1$ يعني $1 \not T 1$

1 * T ليست تناظرية على $\mathbb{N}$ لأن $1T2$ لكن $2 \not T 1$

1 * T متعدية على $\mathbb{N}$ لأن عندما نأخذ $m,n,p \in \mathbb{N}$ ونفترض أن mTn و nTp فإن لدينا $m<n$ و $n<p$. هذا يؤدي أن $m<p$

$\Leftarrow mTp$.