د. برهان

جامعة الملك سعود　　　**الاختبار الفصلي الأول**　　　**الفصل الثاني 1433/1432هـ**
كلية العلوم- قسم الرياضيات　　　**في المقرر 151 ريض**　　　**الزمن: ساعة ونصف**

أسم الطالب	
الرقم الجامعي	
رقم الشعبة	
مدرس المقرر	

رقم السؤال	1	2	3	4
رمز الجواب	ج	د	ب	د

الجزء الأول: اختر الإجابة الصحيحة. (درجتان لكل سؤال)

(1) المكافئ العكسي للتقرير " إذ اكان $x \geq 2$ أو $y \geq 3$ فإن $x^2 + y^2 \geq 4$ " هو:

(أ) "إذا كان $x < 2$ أو $y < 3$ فإن $x^2 + y^2 < 4$ "
(ب) "إذا كان $x < 2$ و $y < 3$ فإن $x^2 + y^2 < 4$ "
(ج) "إذا كان $x^2 + y^2 < 4$ فإن $x < 2$ و $y < 3$ "
(د) "إذا كان $x^2 + y^2 < 4$ فإن $x < 2$ أو $y < 3$ "

(2) العبارة $(p \wedge q) \to (p \to \neg q)$ مكافئة منطقياً للعبارة:

(أ) p　　(ب) q　　(ج) $p \wedge q$　　(د) $\neg(p \wedge q)$

(3) إذا كانت S و T علاقتين على $E = \{1, 2, 3\}$ بحيث
$S = \{(1,1), (1,3), (2,1), (3,2)\}$ و $T = \{ (1,2), (1,3), (2,2), (2,3) \}$ فإن العلاقة
$T\, o\, S^2$ تساوي:

(أ) $\{ (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1) \}$
(ب) $\{ (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) \}$
(ج) $\{ (1,3), (2,2), (3,2), (3,3) \}$
(د) $\{ (1,2), (1,3), (3,2), (3,3) \}$

(4) مجال العلاقة R المعرفة على المجموعة $A = \{0, 1, 3, 4, 6\}$ بالقاعدة
$a\,R\,b \Leftrightarrow$ a-b =1 هو:

(أ) Ø　　(ب) A　　(ج) $\{1, 3, 6\}$　　(د) $\{1, 4\}$

الجزء الثاني: أجب عن الأسئلة التالية.

(1) (ثلاث درجات)

أثبت أن العبارة $u \longrightarrow [(u \longrightarrow v) \longrightarrow v]$ مصدوقة ثم استخدم ذلك لإثبات أن العبارة التالية مصدوقة أيضا:

$$(p \vee q) \longrightarrow [((p \vee q) \longrightarrow (r \wedge s \wedge x)) \longrightarrow (r \wedge s \wedge x)]$$

$$u \longrightarrow [(u \to v) \to v] \equiv u \longrightarrow [(\neg u \vee v) \to v].$$

$$\equiv u \longrightarrow [\neg(\neg u \vee v) \vee v].$$

2

$$\equiv \neg u \vee [(u \wedge \neg v) \vee v].$$

$$\equiv \neg u \vee [(u \vee v) \wedge (\underbrace{\neg v \vee v})].$$

$$\equiv \neg u \vee [(u \vee v) \wedge T].$$

$$\equiv \neg u \vee (u \vee v) \equiv (\neg u \vee u) \vee v \equiv T \vee v \equiv T$$

1

$u = p \vee q$

$v = r \wedge s \wedge x$

- باستخدام مبدأ التعويض للتكافؤ المنطقي: نضع

بما أن $u \to [(u \to v) \to v]$ مصدوقة فإن $(p \vee q) \to [((p \vee q) \to (r \wedge s \wedge x)) \to (r \wedge s \wedge x)]$ هي أيضا مصدوقة

(2) (ثلاث درجات)

أثبت التالي لكل عدد صحيح $n \geq 1$ ،

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

* الطريقة الأولى: نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي: نضع لكل $n \geq 1$

$$P(n): \ 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

1

• خطوة الأساسية: $n = 1$; $2^1 \stackrel{?}{=} 2^{1+1} - 2$ ، $2 = 4 - 2$ التقرير $P(1)$ صائب

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 1$. نفترض أن $P(k)$ صائب (يعني $2^1 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 2$) فلنثبت أن $P(k+1)$ صائب (يعني $2^1 + \dots + 2^{k+1} \stackrel{?}{=} 2^{k+2} - 2$)

2

$$\underbrace{2^1 + 2^2 + \dots + 2^k} + 2^{k+1} = \underbrace{2^{k+1} - 2} + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 2$$

$$= 2^{k+2} - 2.$$

إذن $P(k+1)$ هو تقرير صائب.

نتيجة: لكل $n \geq 1$ ، $P(n)$ صائب يعني $2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

* الطريقة الثانية: نأخذ $n \geq 1$ ، نضع $S_n = 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$

$$= 2[1 + \underline{2 + \dots + 2^{n-1}}] \quad 2$$

3

$$= 2[1 + S_n - 2^n] = 2 + 2S_n - 2^{n+1}$$

$$(1-2) S_n = 2 - 2^{n+1} \implies S_n = 2^{n+1} - 2.$$

(3) (ثلاث درجات)

إذا كانت المتتالية (a_n) معرفة كما يلي:

$a_0 = 1,\ a_1 = 2$ و $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ لكل عدد صحيح $n \ge 2$

فأثبت أن $1 \le a_n \le 2$ لكل عدد صحيح $n \ge 0$.

- نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي :

نضع التقرير: $P(n)$: $1 \le a_n \le 2$ ، لكل $n \ge 0$.

• الخطوة الأساسية : $n=0$; $1 \le a_0 = 1 \le 2$ ، $P(0)$ صائب

$n=1$; $1 \le a_1 = 2 \le 2$ ، $P(1)$ صائب

1

• خطوة الاستقراء : نأخذ $k \ge 1$ ، نفترض $P(1), P(2), \ldots, P(k-1), P(k)$ جميعها صائب فلنثبت أن التقرير $P(k+1)$ صائب (يعني $1 \le a_{k+1} \le 2$ ؟).

بما أن $a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2}$ وبما أن $P(k-1)$ و $P(k)$ صائبة

فإن $1 \le a_{k-1} \le 2$

و $1 \le a_k \le 2$. إذن $1+1 \le a_k + a_{k-1} \le 2+2$. هذا يؤدي $1 \le \frac{a_k+a_{k-1}}{2} \le 2$ يعني $1 \le a_{k+1} \le 2$. إذن $P(k+1)$ صائب

2

نتيجة : لكل $n \ge 0$ و $1 \le a_n \le 2$.

(4) (ثلاث درجات)

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ بالقاعدة:

$$x R y \iff x > y$$

بين فيما إذا كانت العلاقة R انعكاسية، تناظرية، متعدية.

• R ليست انعكاسية على N لأن $x \not R x$ مثلا $1 \not R 1$ لأن $1 \geq 1$ 1

• R ليست تناظرية على N لأن $2R1$ و $1 \not R 2$ 1

• R علاقة متعدية على N لأن إذا كان xRy و yRz 1

فإن xRz لكل $x, y, z \in N$.

$$\left.\begin{aligned} x>y &\iff xRy \\ y>z &\iff yRz \end{aligned}\right\} \Rightarrow x>z \iff xRz$$