جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار الشهري الأول في المقرر 151 ريض	الفصل الصيفي 1436/1435 هـ الزمن: ساعة و نصف

السؤال الأول(2+3+3=8 درجات):

(1) أثبت أن : $(p \wedge q) \to r \equiv (p \wedge \neg r) \to \neg q$.

(2) دون استخدام الجداول, أثبت أن العبارة $\left[\neg q \to \neg\left[q \wedge (p \to \neg q)\right]\right]$ هي مصدوقة.

(3) لكل $n \in \mathbb{Z}$ (عدد صحيح), أثبت أن: $(3n+2)$ هو عددا فرديا إذا و فقط إذا كان $(9n+5)$ هو عددا زوجيا.

السؤال الثاني(3+4=7 درجات):

(1) أثبت أن لكل $n \geq 0$, $3 \mid \left(2^{2n}-1\right)$.

(2) لتكن $\{a_n\}$ المتتالية المعرفة استقرانيا كالآتي : $\begin{cases} a_0 = 0\,,\ a_1 = 4 \\ a_{n+1} = -2\,a_n + 3\,a_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$.

أثبت أن: $a_n = 1 - (-3)^n$ لكل $n \geq 0$.

السؤال الثالث(4+3+3=10 درجات):

(1) اكتب كلا من العلاقات التالية المعرفة على $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ كأزواج مرتبة:

(i) $R_1 = \{(a,b) \in A^2 \mid a+b=1\}$.

(ii) $R_2 = \{(a,b) \in A^2 \mid 1 < b-a < 3\}$.

(iii) $R_3 = \{(a,b) \in A^2 \mid a^2 = b^2\}$.

(iv) $R_4 = \{(a,b) \in A^2 \mid b = 2\,a\}$.

(2) إذا كانت $M_R = \begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \end{pmatrix}$ و $M_S = \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$ مصفوفتي العلاقتين R و S. فأوجد $M_{S \circ R}$ و $M_{R \circ S}$.

(3) لتكن T علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كما يلي : $mTn \Leftrightarrow m+n \geq 2$.

بيّن فيما إذا كانت T انعكاسية , تناظرية , متعدية.

إصلاح الاختبار الشهري الأول للفصل الصيفي ١٤٣٧/٣٠هـ

- ١٥١ ريض -

السؤال الأول (8 درجات)

① $(p\wedge q)\rightarrow r \equiv \neg(p\wedge q)\vee r$

$\equiv \neg p\vee\neg q\vee r$

② $\equiv \neg p\vee r\vee\neg q$

$\equiv \neg(p\wedge\neg r)\vee\neg q \equiv (p\wedge\neg r)\rightarrow\neg q$

② $\neg q\rightarrow\neg[q\wedge(p\rightarrow\neg q)] \equiv q\vee[\neg q\vee\neg(p\rightarrow\neg q)]$

$\equiv q\vee[\neg q\vee\neg(\neg p\vee\neg q)]$

③ $\equiv (q\vee\neg q)\vee\neg(\neg p\vee\neg q)$

$\equiv T\vee\neg(\neg p\vee\neg q)\equiv T$

③ p: $(3n+2)$ هو فردي و q: $(9n+5)$ هو زوجي

• "$p\rightarrow q$" نفترض أن $(3n+2)$ هو فردي فلنثبت أن $(9n+5)$ زوجيا

بما أن $(3n+2)$ فرديا إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $3n+2=2k+1$

فإن $9n+5=(2k+1)+6n+3$

1,5 $=2(\underbrace{k+3n+2})=2m$

فنستنتج أن $(9n+5)$ هو زوجي.

• "$q\rightarrow p$" نفترض أن $(9n+5)$ هو زوجي فلنثبت أن $(3n+2)$ هو فردي.

بما أن $(9n+5)$ هو زوجي إذن يوجد عدد صحيح k' بحيث $9n+5=2k'$

$=3n+6n+2+3$. هذا يؤدي إلى:

$3n+2=2k'-6n-3$

1,5 $=2(\underbrace{k'-3n-2})+1$

إذن $(3n+2)$ هو فردي

السؤال الثاني (7 درجات)

(1) نضع $P(n) : \text{"}\, 3 \mid (2^{2n}-1) \,\text{"}$

(1)

. الخطوة الأساسية : $n=0$

$3 \mid 2^0 - 1 = 0$ لأن $0 = 3\times 0$ إذن $P(0)$ صائب

. خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 0$ عدد صحيح و نفترض أن $P(k)$ صائب (يعني لدينا $3 \mid (2^{2k}-1)$) فلنثبت صحة $P(k+1)$.

(1)

$$2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1$$
$$= 4 \cdot 2^{2k} - 1$$

بما أن $3 \mid (2^{2k}-1)$ فإنه يوجد عدد صحيح m بحيث $2^{2k}-1 = 3m$

عندئذ $2^{2k} = 3m+1$.

(1)

فإن $$2^{2(k+1)} - 1 = 4(3m+1) - 1$$
$$= 12m + 3 = 3(\underbrace{4m+1}_{L})$$

إذاً $3 \mid (2^{2(k+1)}-1)$ يعني $P(k+1)$ صائب

باستخدام المبدأ الأول للاستقراء الرياضي لدينا لكل $n \geq 0$: $3 \mid (2^{2n}-1)$.

(2) نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي :

نضع $P(n) : a_n = 1 - (-3)^n$

. خطوة الأساسية :

(1)

$n=0$	$n=1$
$a_0 = 1 - (-3)^0 = 0$	$a_1 = 1 - (-3)^1$
صح إذن $P(0)$ صائب	$a_1 = 4$
	صح إذن $P(1)$ صائب.

. خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 2$. نفترض أن $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(k)$ جميعها صائبة فلنثبت صحة $P(k+1)$.

نعلم أن : $a_{k+1} = -2a_k + 3a_{k-1}$

① وبما أن $P(k)$ صائب فإن : $a_k = 1-(-3)^k$

كذلك $P(k-1)$ صائب فإن $a_{k-1} = 1-(-3)^{k-1}$

عندئذ : $a_{k+1} = -2\left[1-(-3)^k\right] + 3\left[1-(-3)^{k-1}\right]$.

$$a_{k+1} = -2 + 2\times(-3)^k + 3 - 3(-3)^{k-1}$$

② $$a_{k+1} = 1 + 2\times(-3)^k + (-3)^k$$

$$a_{k+1} = 1 + 3\times(-3)^k = 1-(-3)^{k+1}$$

إذن $P(k+1)$ صائب

ونستنتج أن لكل $n \geq 0$ ، $a_n = 1-(-3)^n$.

السؤال الثالث (10 درجات)

$R_1 = \{(a,b) \in A^2 / \ a+b=1\}$. ①

① $R_1 = \{(-1,2);(0,1);(1,0);(2,-1)\}$.

$R_2 = \{(a,b) \in A^2 / \ 1 < b-a < 3\}$.

$R_2 = \{(a,b) \in A^2 / \ b-a=2\}$

$R_2 = \{(a,b) \in A^2 / \ b=a+2\}$.

① $R_2 = \{(-2,0),(-1,1);(0,2)\}$.

$R_3 = \{(a,b) \in A^2 / \ a^2=b^2\}$.

① $R_3 = \{(-2,-2);(-2,2);(-1,-1);(-1,1);(0,0)$
$(1,-1);(1,1);(2,-2);(2,2)\}$.

$R_4 = \{(a,b) \in A^2 \ / b=2a\}$

① $R_4 = \{(a,2a) / a \in A\} = \{(-1,-2);(0,0);(1,2)\}$.

②

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$$

(1,5) $$M_{S\circ R} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

$$M_{R\circ S} = M_S \odot M_R$$

(1,5) $$M_{R\circ S} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

③ . T ليست انعكاسية لأن $0 \not T 0$. (1)

. T تناظرية لأن إذا $m T n$ فإن $m+n \geq 2 \Leftrightarrow n+m \geq 2$
وهذا يؤدي $n T m$. (1)

. T ليست متعدية لأن $-1 T 3$ و $3 T 0$ لكن $-1 \not T 0$. (1)