الإصلاح

جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر 151 ريض	الفصل الثاني 1437/1436 هـ الزمن: 3 ساعات

اسم الطالب	
الرقم الجامعي	

السؤال الأول (8 درجات)

(أ) بين فيما إذا كان: $(p \to q) \vee r \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$. (درجتان)

$$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)$$
$$\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee q \vee r$$
$$\equiv (\neg p \vee q) \vee r$$
$$\equiv (p \to q) \vee r$$

2

(ب) لتكن x, y, z أعدادا صحيحة . استخدم طريقة المكافئ العكسي لإثبات التقرير التالي:

" إذا كان $3x - y = z$ فإن x زوجي أو y زوجي أو z زوجي ". (درجتان)

1 المكافئ العكسي للعبارة : إذا كان x فردي و y فرديا و z فرديا فإن $3x - y \neq z$.

بما أن x فردي فإن $x = 2k+1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

كذلك y فردي فإن $y = 2k'+1$ حيث $k' \in \mathbb{Z}$

$$3x - y = 3(2k+1) - (2k'+1)$$
$$= 6k + 3 - 2k' - 1 = 6k - 2k' + 2$$
$$= 2(k - k' + 1) = 2L$$

يعني $3x-y$ هو زوجي

1 إذن $3x - y \neq z$ بما أن z فردي.

(ج) استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات أن:

$n^2 - 6n + 8 \geq 0$ لكل عدد صحيح $n \geq 4$. (4 درجات)

نضع $P(n):\ n^2 - 6n + 8 \geq 0$

1 • خطوة الأساس: $n = 4$: $4^2 - 6\times 4 + 8 = 0 \geq 0$ إذن $P(4)$ صائب

1 • خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 4$. نفترض أن $P(k)$ صائب يعني لدينا $k^2 - 6k + 8 \geq 0$ فلنثبت صحة $P(k+1)$ يعني $(k+1)^2 - 6(k+1) + 8 \overset{?}{\geq} 0$

$$(k+1)^2 - 6(k+1) + 8 = k^2 + 2k + 1 - 6k - 6 + 8$$

2
$$= \underbrace{(k^2 - 6k + 8)}_{\geq 0} + \underbrace{(2k - 5)}_{\geq 0}$$

بما أن $k \geq 4$

إذن $P(k+1)$ صائب

$n^2 - 6n + 8$

السؤال الثاني (7 درجات)

(أ) لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $Z=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ كما يلي:

$$|a|=|b| \Leftrightarrow aRb$$

(i) أثبت أن R علاقة تكافؤ. (3 درجات)

① • R انعكاسية على $\mathbb{Z}$ لأن لكل $a\in\mathbb{Z}$ ، $|a|=|a|$ يعني aRa .

① • R تناظرية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ a و b في $\mathbb{Z}$ ونفترض أن aRb فإن $|a|=|b|$ إذن $|b|=|a|$ يعني bRa .

① • R متعدية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ a, b, c في $\mathbb{Z}$ ونفترض أن aRb و bRc فإن لدينا $|a|=|b|$ و $|b|=|c|$ إذن $|a|=|c|$ يعني aRc .

- بما أن R انعكاسية، تناظرية و متعدية فهي علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

(ii) أوجد $[5]$. (درجة)

$$[5]=\{a\in\mathbb{Z} \,/\, aR5\}$$
$$[5]=\{a\in\mathbb{Z} \,/\, |a|=|5|=5\}$$
① $$[5]=\{-5,5\}$$

(ب) لتكن $S=\{(x,y),(x,z),(y,x),(z,x),(z,y),(z,z)\}$ علاقة على المجموعة $A=\{x,y,z\}$.
أوجد كلا من الإغلاق التناظري والإغلاق المتعدي للعلاقة S. (3 درجات)

• الاغلاق التناظري لـ S هو

① $$\sigma(S)=\{(x,y);(x,z);(y,x);(z,x);(z,y);(z,z);(y,z)\} = S\cup S^{-1}$$

• الاغلاق المتعدي لـ S هو

$$\tau(S)=S\cup S^2\cup S^3$$
$$S=\{(x,y);(x,z);(y,x);(z,x);(z,y);(z,z)\}$$
$$S^2=\{\underline{(x,x)},(x,y);(x,z);\underline{(y,y)};(y,z);(z,x);\cancel{(z,x)};(z,y);(z,z)\}$$
② $$S^3=S^2\circ S=\{(x,y);(x,z);(x,x);(y,x);(y,y);(y,z);(z,x);(z,y);(z,z)\}$$

$$\tau(S)=\{(x,y);(x,z);(y,x);(z,x);(z,y);(z,z);(x,x);(y,y),(y,z)\}$$
$$\tau(S)=A\times A$$

السؤال الثالث (10 درجات)

(أ) ليكن B جبرا بوليا و $a,b \in B$ بحيث $a = a'b$. أثبت أن $a = b = 0$ (درجتان)

$a = a'b$ إذن: $aa = aa'b \Rightarrow a = 0$ // بتعويض قيمة a في المعادلة يؤدي إلى $b=0$. (1)

إذن: $a=b=0$ (1)

(ب) لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه :

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	0	1
xy'	0	1	0	0
$x'y'$	0	0	0	0
$x'y$	1	0	1	1

(i) اكتب f على شكل CSP. (درجة)

$$CSP(f) = xyzw + xyzw' + xyz'w + xy'zw' + x'yzw + x'yz'w' + x'yz'w.$$

(1)

(ii) اكتب f على شكل MSP. (درجتان)

$$MSP(f) = yw + xzw' + x'yz'$$

(2)

(iii) اكتب f على شكل MPS. (درجتان)

$$MPS(f) = [MSP(f')]'$$

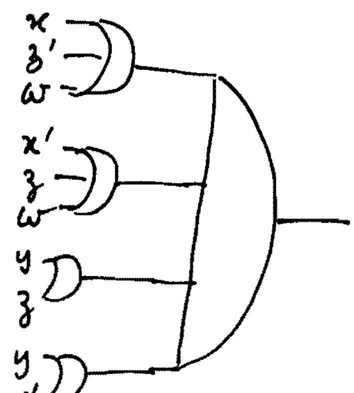
$$MSP(f') = x'zw' + xz'w' + y'z' + y'w$$

$$MPS(f) = (x+z'+w)\cdot(x'+z+w)\cdot(y+z)\cdot(y+w')$$

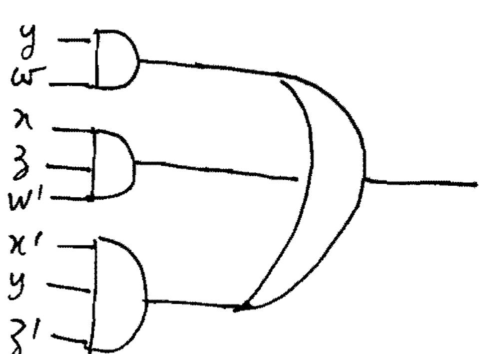
(2)

(iv) صمم شبكة عطف و فصل أصغريه مخرجها f. (درجة)

(0,5)



5 بوابات



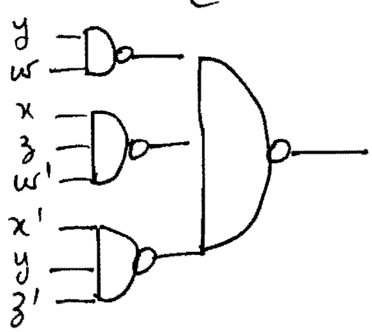
(0,5)

4 بوابات إذن هي شبكة عطف

(v) صمم شبكة منطقية مخرجها f باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة)

$$MSP(f) = yw + xzw' + x'yz'$$
$$= \left[(yw + xzw' + x'yz')'\right]'$$
$$= \left[(yw)' \cdot (xzw')' \cdot (x'yz')'\right]'$$

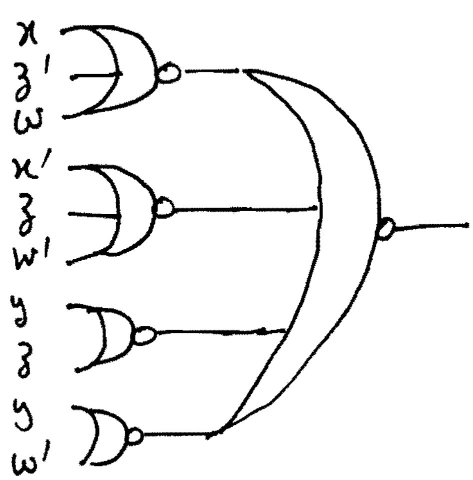
1



(vi) صمم شبكة منطقية مخرجها f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)

$$MPS(f) = \left[\left((x+z'+w)(x'+z+w)(y+z)\cdot(y+w')\right)'\right]'$$
$$= \left[(x+z'+w)' + (x'+z+w)' + (y+z)' + (y+w')'\right]'$$

1



السؤال الرابع (15 درجة)

(أ) ليكن G رسما عدد رؤوسه $3n$, حيث n رأسا درجة كل واحد منها 2 و $2n$ رأسا درجة كل واحد منها 1. أوجد n إذا علمت أن عدد أضلاع G هو 20. (درجتان)

1 نعلم أن $\sum_{x \in V(G)} \deg x = 2|E|$

$$2 \times n + 2n \times 1 = 2 \times 20$$

$$4n = 40$$

1 إذن $n = 10$

(ب) أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم $\overline{K_{7,13}}$ للرسم $K_{7,13}$ ثم بين فيما إذا كان $\overline{K_{7,13}}$ شجرة . (3 درجات)

$$K_{7,13} \cup \overline{K_{7,13}} = K_{20}$$

$$E(K_{7,13}) + E(\overline{K_{7,13}}) = E(K_{20})$$

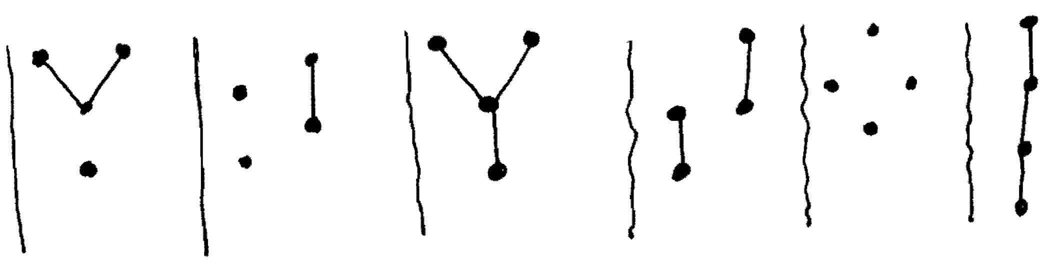
2 $E(\overline{K_{7,13}}) = 190 - 91 = 99 \Leftarrow \quad 7 \times 13 + E(\overline{K_{7,13}}) = \frac{20 \times 19}{2}$

فنستنتج أن عدد أضلاع $\overline{K_{7,13}}$ هو: 99

1 $\overline{K_{7,13}}$ ليس شجرة لأن عدد رؤوسه 20 و عدد أضلاعه ليس 19.

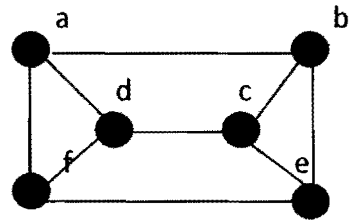
(ج) ارسم كل الغابات غير المتماثلة التي عدد رؤوس كل منها 4. (درجتان)

غابة لا تحتوي على دورات.

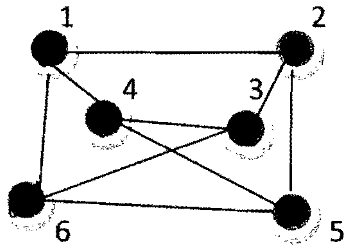


2

(د) بيَن فيما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا. (درجتان)



K



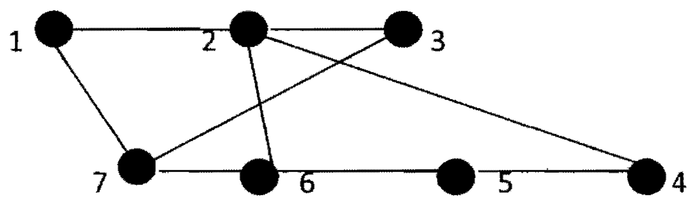
H

$H \ncong K$ لأن H ثنائي التجزئة ومماثل لـ $K_{3,3}$

لكن K يحتوي على دورات فردية ليس ثنائي التجزئة.

2

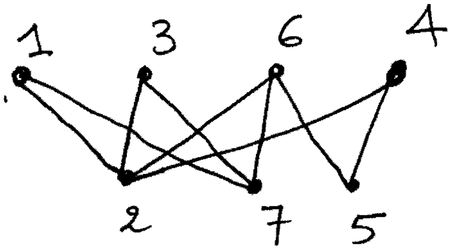
(ه) بيَن فيما إذا كان الرسم G أدناه ثنائي التجزئة أم لا و إذا كان ثنائي التجزئة فأوجد تمثيلا ثنائي التجزئة له. (درجتان)



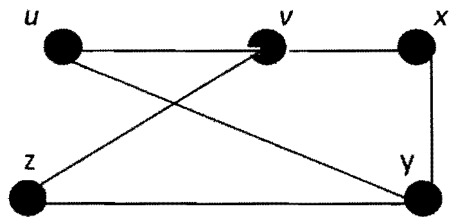
G

G لا يحتوي على دورات فردية فإنه ثنائي التجزئة

2

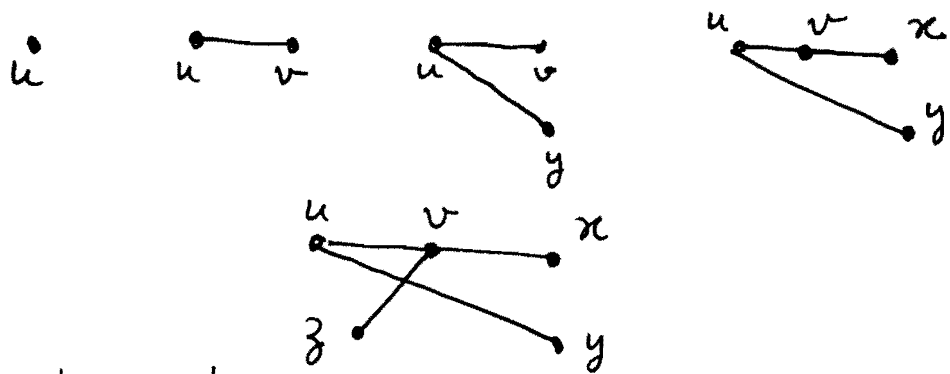


(و) للرسم M أدناه:



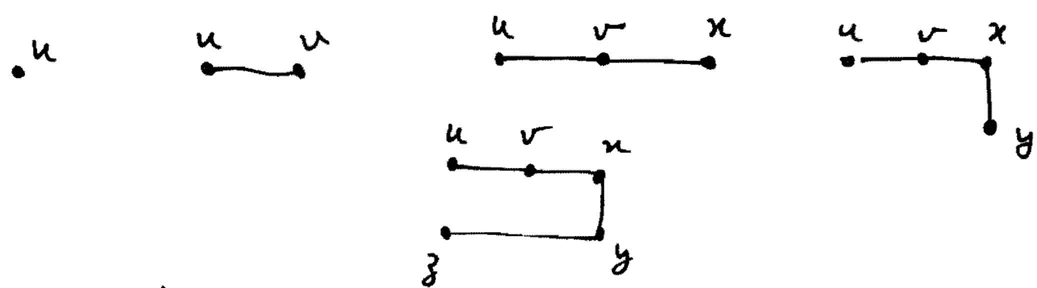
M

(i) أوجد شجرة تقص عرضي جذرها u. (درجتان)



شجرة تقصي عرضي جذرها u.

(ii) أوجد شجرة تقص عمقي (طولي) جذرها u. (درجتان)



شجرة تقصي طولي جذرها u.