د. برهان

جامعة الملك سعود	**الاختبار الفصلي الأول**	**الفصل الأول 1433/1434هـ**
كلية العلوم	**في المقرر 151 ريض**	**الزمن: ساعة ونصف**

اسم الطالب	
الرقم الجامعي	
رقم الشعبة	
مدرس المقرر	

رقم السؤال	1	2	3	4	5
رمز الجواب	ب	أ	أ	أ	ج

الجزء الأول: اختر الإجابة الصحيحة. (درجتان لكل سؤال)

(1) العبارة $p \wedge \neg [q \to (p \vee r)]$

(أ) مصدوقة (ب) تناقض (ج) ليست مصدوقة وليست تناقض

(2) العبارة $(p \to q) \to \neg p$ مكافئة منطقياً لـ:

(أ) $p \to \neg q$ (ب) $p \to q$ (ج) $q \to p$ (د) $\neg q \to \neg p$

(3) مجال العلاقة R المعرفة على المجموعة $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ بالقاعدة $a R b \Leftrightarrow a-1=2b$ هو:

(أ) $\{-1,1\}$ (ب) A (ج) $\{-2,0,2\}$ (د) $\{-2,-1,2\}$

(4) إذا كانت $R=\{(a,b),(a,c),(b,b)\}$ و $S=\{(a,a),(a,c),(b,c),(c,a)\}$ علاقتين على المجموعة $\{a,b,c\}$، فإن $(R \circ S) \cap R^{-1}$ تساوي:

(أ) ϕ (ب) $\{(b,a),(b,b)\}$ (ج) $\{(c,a),(b,b)\}$ (د) $\{(b,a)\}$

(5) العلاقة T المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بالقاعدة $x T y \Leftrightarrow x < y+1$ هي:

(أ) انعكاسية وتناظرية (ب) تناظرية وغير انعكاسية

(ج) انعكاسية وغير تناظرية (د) غير انعكاسية وغير تناظرية

الجزء الثاني: أجب عن الأسئلة التالية.

1) ليكن x, y عددين صحيحين موجبين. باستخدام طريقة البرهان بالمكافئ العكسي أثبت أنه إذا كان $x^2+y^2 \geq 8$ فإن $x \geq 2$ أو $y \geq 2$. (درجتان ونصف)

باستخدام طريقة البرهان بالمكافئ العكسي. نفترض أن $x<2$ و $y<2$ (مع العلم أن $x,y \in \mathbb{N}$) فلنثبت أن $x^2+y^2<8$. 1

بما أن $0 \leq x < 2$ فإن $0 \leq x^2 < 4$
كذلك $0 \leq y < 2$ فإن $0 \leq y^2 < 4$ 1,5
بجمع هاتين المتباينات، نحصل أن: $0 \leq x^2+y^2 < 8$.

2) باستخدام الاستقراء الرياضي، أثبت أن $3^n > 2^{n+2}$ لكل عدد صحيح $n \geq 4$. (4 درجات)

نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي:
نضع $P(n): \quad 3^n > 2^{n+2}$

• الخطوة الأساسية: $n=4$ ؛ $3^4 = 3^2 . 3^2 = 81$ ، $2^{4+2} = 2^6 = 2^3 . 2^3 = 64$ بما أن $64<81$ 1
فإن $3^4 > 2^6$ يعني أن $P(4)$ صائب.

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 4$. نفترض أن $P(k)$ صائب (يعني لدينا $3^k > 2^{k+2}$) فلنثبت أن $P(k+1)$ يبرهن صائب (يعني $3^{k+1} \overset{?}{>} 2^{k+3}$) 1

$3^{k+1} = 3 . 3^k$
بما أن $P(k)$ صائب $3^k > 2^{k+2}$ إذن 2
$3^{k+1} > 3 . 2^{k+2} > 2 . 2^{k+2} = 2^{k+3}$
إذن $P(k+1)$ صائب.
فنستنتج أن لكل $n \geq 4$ ، $P(n)$ صائب. يعني $3^n > 2^{n+2}$ لكل $n \geq 4$.

3) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية معرفة استقرائياً كما يلي: $a_2=11, a_1=3$ و $a_n = a_{n-1}\, a_{n-2} + 2$ لكل $n \geq 3$. أثبت أن a_n عدد صحيح فردي لكل $n \geq 1$. (4 درجات)

نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي.

نضع $P(n)$: a_n هو عدد صحيح فردي

• خطوة الأساس: $n=1$; $a_1=3$ و هو عدد صحيح فردي لذا $P(1)$ صائب

1 $n=2$; $a_2=11$ و هو أيضا عدد صحيح فردي إذن $P(2)$ صائب.

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 2$. نفترض أن $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ جميعها صائبة فلنثبت أن $P(k+1)$ يبقى صائب.

1 بما أن $a_{k+1} = a_k\, a_{k-1} + 2$

1 و بما أن $P(k)$ صائب إذن a_k هو عدد صحيح فردي

كذلك $P(k-1)$ صائب إذن a_{k-1} هو عدد صحيح فردي $\Rightarrow$ $a_k . a_{k-1}$ هو أيضا عدد صحيح فردي

1 نعلم أن عدد فردي + عدد زوجي هو عدد فردي فنستنتج أن a_{k+1} هو عدد صحيح فردي يعني $P(k+1)$ صائبا.

4) لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ بالقاعدة $m\,R\,n \Leftrightarrow m+n \neq 5$.

بين فيما إذا كانت R انعكاسية ، تناظرية ، متعدية. (4 درجات ونصف)

• R هي علاقة انعكاسية على $\mathbb{N}$ لأن عندما نأخذ $m \in \mathbb{N}$, $m+m=2m$ (الحاصل هو عدد زوجي) لأن 5 هو عدد فردي إذن $m+m \neq 5$ يعني mRm.

1.5

• R هي علاقة تناظرية على $\mathbb{N}$ لأن عندما نأخذ $m,n \in \mathbb{N}$ ونفترض أن mRn . فإن لدينا $m+n \neq 5$ يعني $n+m \neq 5$ إذن nRm .

1.5

• R هي علاقة ليست متعدية على $\mathbb{N}$ لأن $1\,R\,2$ $(1+2 \neq 5)$ و $2\,R\,4$ $(2+4 \neq 5)$ لكن $1 \not{R}\, 4$ (لأن $1+4=5$).

1.5