الفصل الثاني
طريقة السمبلكس
The Simplex Algorithm

نستخدم طريقة السمبلكس لحل مسألة البرمجة الخطية.

من متطلبات هذه الطريقة هو تحويل مسألة البرمجة الخطية إلى الصيغة الأساسية.

تعريف (**1-2**):

الصيغة القياسية: **Standard Form**

تكون مسألة البرمجة الخطية في الصيغة القياسية ، إذا كانت جميع القيود عبارة عن معادلات خطية طرفها الأيمن غير سالب، وكانت جميع المتغيرات غير سالبة ، وكانت معادلة دالة الهدف في صورة معادلة صفرية.

ملاحظات:

لتحويل مسألة البرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية نتبع الآتي:

(1) نتأكد من أن جميع المتغيرات غير سالبة، وإذا وُجد متغير غير محدد الإشارة unrestricted sign فإننا نقوم بكتابته على صورة فرق بين متغيرين غير سالبين.

فمثلاً إذا كان x_2 **غير محدد الإشارة فإنه يمكن كتابته كالآتي:**

$$x_2 = x_2' - x_2'' \quad , \quad x_2' \, , x_2'' \geq 0$$

(2) نحول المتراجحات إلى معادلات طرفها الأيمن غير سالب وذلك عن طريق إضافة أو حذف المتغير المكمل أو المتغير الزائد على الترتيب كالآتي:

فمثلاً $x_1 + x_2 \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 + s = 3 \quad , \quad s \geq 0$

حيث s **يسمى بالمتغير المكمل slack variable**

$$x_1 + x_2 \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 - e = 3 \quad , \quad e \geq 0$$

حيث e **يسمى المتغير الزائد excess variable**

فمثلاً $5x_1 - 2x_2 \geq -7 \quad (\times -1)$

$$\Rightarrow \quad -5x_1 + 2x_2 \leq 7$$

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

تحول إلى $\Rightarrow \quad -5x_1 + 2x_2 + s = 7$

(3) نكتب دالة الهدف في صورة معادلة صفرية

$$\max z = 9x_1 + 12x_2 \quad \Rightarrow \quad \max z - 9x_1 - 12x_2 = 0$$

مثال (**1-2**):

حول المسألة التالية إلى الصيغة القياسية

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 14x_1 + 9x_2 \\ s.t \quad & x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

الصورة القياسية هي

$$\begin{aligned} \max \quad & z - 14x_1 - 9x_2 = 0 \\ s.t \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 10 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 - e_1 = 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \quad , \quad s_1, s_2 \ge 0 \quad , \quad e_1 \ge 0 \end{aligned}$$

مثال (**2-2**):

حول المسألة التالية إلى الصيغة القياسية

$$\begin{aligned} \max z = 4x_1 + 3x_2 \\ s.t \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 \le -1 \end{aligned}$$

$x_1 \ge 0 \quad , \quad x_2$ **urs (غير محدد الإشارة)**

الحل:

$\because$ x_2 **غير محدد الإشارة ، فإنه يمكن كتابته على الصورة**

$$x_2 = x_2' - x_2'' \quad , \quad x_2' , x_2'' \ge 0$$

فيصبح القيد الأول $x_1 + x_2' - x_2'' = 2$

القيد الثاني يكون $x_1 - 2x_2 \le -1 \quad (\times -1)$

$$\Rightarrow \quad -x_1 + 2x_2 \ge 1$$
$$\Rightarrow \quad -x_1 + 2x_2 - e_1 = 1$$
$$\Rightarrow \quad -x_1 + 2(x_2' - x_2'') - e_1 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - e_1 = 1$$

معادلة دالة الهدف هي

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ &= 4x_1 + 3(x_2' - x_2'') \\ &= 4x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \end{aligned}$$
$$\max z - 4x_1 - 3x_2' + 3x_2'' = 0$$

$\therefore$ **الصيغة القياسية للمسألة هي**

$$\max z - 4x_1 - 3x_2' + 3x_2'' = 0$$
$$x_1 + x_2' - x_2'' = 2$$
$$-x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - e_1 = 1$$
$$x_1 \ge 0 \quad , \quad x_2', x_2'' \ge 0 \quad , \quad e_1 \ge 0$$

المتغيرات الأساسية والحل الأساسي:

تعريف (**2-2**):

ليكن لدينا النظام $AX = b$ **حيث** A **مصفوفة من الدرجة** $m \times n$, $n \ge m$ **حيث** m **يرمز لعدد القيود (المعادلات الخطية)،** n **عدد المتغيرات (المجاهيل) فإنه يمكن الحصول على الحل الأساسي لهذا النظام بوضع** $n - m$ **من المتغيرات يساوي الصفر والتي تسمى حينئذ بالمتغيرات غير الأساسية**

(Non Basic Variables, NBV) ثم إيجاد قيم بقية المتغيرات والتي تسمى بالمتغيرات الأساسية (Basic Variables, BV).

مثال (**3-2**):

أوجد حلاً أساسياً للنظام

$$x_1 + x_2 = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$-x_2 + x_3 = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

الحل:

عدد القيود $m=2$ ، عدد المتغيرات $n=3$

$$n-m=3-2=1$$

$\therefore$ يمكن وضع متغير واحد يساوي الصفر لكي يُصبح متغير غير أساسي.

وليكن $x_1=0$ فإن $BV = x_2 , x_3$, $NBV = x_1$

عند $x_1=0$ فإن $x_2=3 \Leftarrow (1)$

عند $x_2=3$ فإن $(2) \Rightarrow -3+x_3=-1 \Rightarrow x_3=2$

$\therefore$ الحل الأساسي هو

$$V_1=\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}$$

أما إذا أخذنا $x_2=0$ فإن $BV = x_1 , x_3$, $NBV = x_2$

$$(1) \Rightarrow x_1=3$$
$$(2) \Rightarrow x_3=-1$$

$\therefore$ الحل الأساسي هو

$$V_2=\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$$

وبوضع $x_3=0$ فإن $BV = x_1 , x_2$, $NBV = x_3$

عند $x_3=0$ فإن

$$(2) \Rightarrow -x_2=-1$$
$$\therefore x_2=1$$

عند $x_2=1$ فإن

$$(1) \Rightarrow x_1+1=3$$
$$\therefore x_1=2$$

ويكون الحل الأساسي هو

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

$$V_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

كلاً من الحلين $V_1 \ , \ V_3$ يسمى حلاً مقبولاً، بينما الحل V_2 ليس حلاً مقبولاً، ويتضح ذلك من التعريف التالي:

تعريف (**2-3**):

أي حل أساسي للنظام $AX = b$ يسمى حلاً أساسياً مقبولاً (basic feasible solution or bfs) ، إذا كانت جميع المتغيرات فيه (مركباته) تأخذ قيماً غير سالبة.

طريقة السمبلكس

Simplex Method

تعريف (**4-2**):

الشكل القانوني: **canonical form**

نقول أن نظاماً من المعادلات الخطية أنه في الشكل القانوني ، إذا كانت كل معادلة تحتوي على متغير ذي معامل 1 فيها وذي معامل 0 في بقية المعادلات.

مثال:

أوجد حل المسألة التالية بإستخدام طريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 + x_2 \\
s.t \quad & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\
& x_1 - x_2 \le 3 \\
& x_1 , x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

الحل:

الخطوة **1**:

تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية

$$\begin{aligned}
\max \quad & z - 4x_1 - x_2 = 0 \\
s.t \quad & -x_1 + 2x_2 + s_1 = 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12 \\
& x_1 - x_2 + s_3 = 3 \\
& x_i , s_j \ge 0 \quad \forall i = 1,2 \quad , \quad j = 1,2,3
\end{aligned}$$

الخطوة **2**:

كتابة جدول السمبلكس المبدئي بعد تحديد المتغيرات الأساسية وغير الأساسية.

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**Rhs**	**BV**
1	-4	-1	0	0	0	0	$z=0$
	-1	2	1	0	0	4	$s_1=4$
	2	3	0	1	0	12	$s_2=12$
	1	-1	0	0	1	3	$s_3=3$

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

نلاحظ أن نظام المعادلات الخطية السابق في الشكل القانوني.

الخطوة **3**:

تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج ومن ثم تحديد العنصر المحوري pivot element

المتغير الداخل:

هو ذلك المتغير الذي له أكبر معامل سالب في الصف Ro والذي نحوله من متغير غير أساسي إلى متغير أساسي.

المتغير الخارج:

هو المتغير الذي له أقل نسبة تحدد بإستخدام قاعدة النسبة الآتية:

$$Ratio = \frac{Rhs}{\text{معامل المتغير الداخل الموجب فقط}}$$

والذي نحوله من متغير أساسي إلى متغير غير أساسي.

	z	$[[x_1]]$	x_2	s_1	s_2	s_3	Rhs	BV	Ratio
Ro	1	-4	-1	0	0	0	0	$z=0$	$-$
R1		-1	2	1	0	0	4	$s_1=4$	$-$
R2		2	3	0	1	0	12	$s_2=12$	6
R3		$[[1]]$	-1	0	0	1	3	$[[s_3]]=3$	3

الخطوة **4**:

تحوير العنصر المحوري بإستخدام طريقة جاوس – جوردان للحذف.

	z	[[x_1]]	x_2	s_1	s_2	s_3	Rhs	BV	Ratio
4R3+Ro	1	0	−5	0	0	4	12	$z=12$	–
R3+R1		0	1	1	0	1	7	$s_1=7$	7
−2R3+R2		0	[[5]]	0	1	−2	6	[[s_2]]$=6$	$6/5$
R3		1	−1	0	0	1	3	$x_1=3$	–

نكرر الخطوتين (3) و (4) حتى نصل إلى الحالة التي فيها كل معاملات Ro جميعها غير سالبة (وذلك في مسألة القيمة العظمى) ، عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

	z	[[x_1]]	x_2	s_1	s_2	s_3	Rhs	BV
5R2+R0	1	0	0	0	1	2	18	$z=18$
−R2+R1		0	0	1	$-1/5$	$7/5$	$29/5$	$s_1=29/5$
R2		0	[[1]]	0	$1/5$	$-2/5$	$6/5$	$x_2=6/5$
R2+R3		1	0	0	$1/5$	$3/5$	$21/5$	$x_1=21/5$

نلاحظ أن معاملات الصف Ro جميعها غير سالبة.

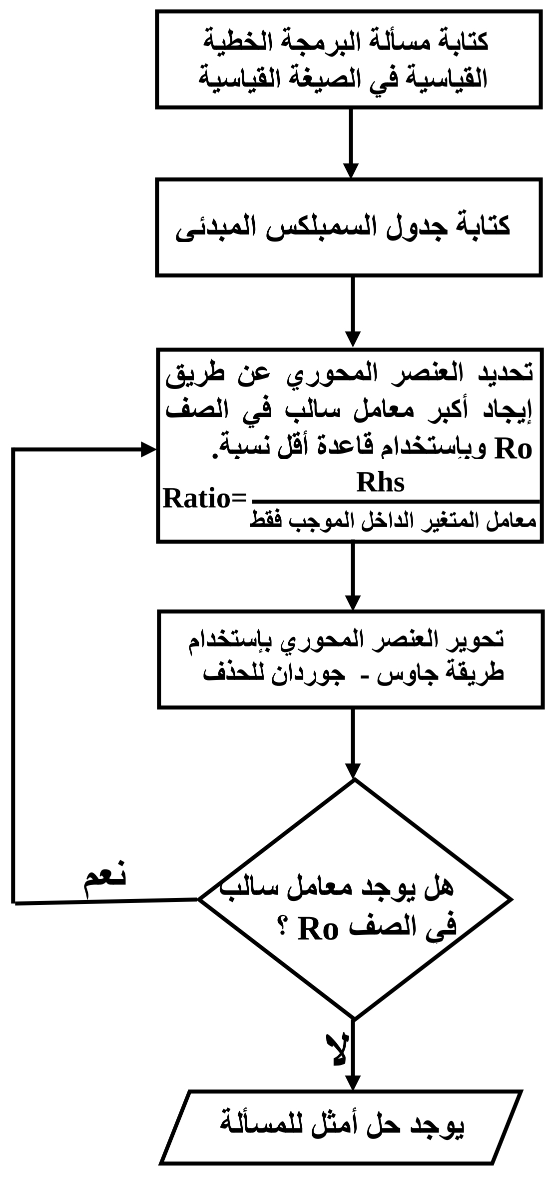
$\therefore$ **الحل الأمثل يكون عند**

$$x_1=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5} \quad , \quad x_2=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

حيث $\max z=18$

مخطط الانسياب لخوارزمية السمبلكس لحل مسألة القيمة العظمى

The Simplex Algorithm Flowchart For Solving Max. Pb.



تعريف (**2-5**):

يكون جدول أمثلياً في مسالة القيمة العظمى max إذا كانت معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Ro جميعها غير سالبة.

تعريف (**2-6**):

يكون جدول السمبلكس أمثلياً في مسألة القيمة الصغرى min إذا كانت معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Ro جميعها غير موجبة.

مثال (**2-2**):

أوجد حل مسألة البرمجة الخطية الآتية بطريقتين مختلفتين بإستخدام طريقة السمبلكس

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 4x_1 - x_2 \\ s.t \quad & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_2 \le 5 \\ & x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

الطريقة الأولى:

يمكن تحويل المسألة من مسألة قيمة صغرى إلى مسألة قيمة عظمى كما يلي:

$$\begin{aligned} \max \quad & -z = -4x_1 + x_2 \\ s.t \quad & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_2 \le 5 \\ & x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

ثم تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية كما يلي:

$$\begin{aligned} \max \quad & -z + 4x_1 - x_2 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 + s_1 = 8 \\ & x_2 + s_2 = 5 \\ & x_1 - x_2 + s_3 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{aligned}$$

جدول السمبلكس هو

	$-z$	x_1	$[[x_2]]$	s_1	s_2	s_3	**Rhs**	**BV**	**Ratio**
Ro	1	4	-1	0	0	0	0	$-z = 0$	
R1		2	1	1	0	0	8	$s_1 = 3$	8
R2		0	[[1]]	0	1	0	5	$s_2 = 5$	[[5]]
R3		1	-1	0	0	1	4	$s_3 = 4$	

	$-z$	x_1	$[[x_2]]$	s_1	s_2	s_3	Rhs	BV
R2+Ro	1	4	0	0	0	0	5	$-z=5$
-R2+R1		2	0	1	-1	0	3	$s_1=3$
R2		0	$[[1]]$	0	1	0	5	$x_2=5$
R2+R3		1	0	0	1	1	9	$s_3=9$

انلاحظ أننا قد وصلنا إلى الحل الأمثل لأن معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Ro جميعها غير سالبة.

ويكون الحل الأمثل عند $x_1=0\ ,\ x_2=5$ **حيث** $-z=5$ **أي** $z=-5$

أي تكون أقل قيمة لدالة الهدف هي $z=-5$ **عند** $x_1=0\,,x_2=5$

الطريقة الثانية لحل المسألة:

$$\begin{aligned}
\min\quad & z=4x_1-x_2\\
s.t\quad & 2x_1+x_2\le 8\\
& x_2\le 5\\
& x_1-x_2\le 4\\
& x_1\,,x_2\ge 0
\end{aligned}$$

الصيغة القياسية هي

$$\begin{aligned}
\min\quad & z-4x_1+x_2=0\\
s.t\quad & 2x_1+x_2+s_1=8\\
& x_2+s_2=5\\
& x_1-x_2+s_3=4\\
& x_1,x_2,s_1,s_2,s_3\ge 0
\end{aligned}$$

	$-z$	x_1	$[[x_2]]$	s_1	s_2	s_3	Rhs	BV	Ratio
Ro	1	-4	1	0	0	0	0	$z=0$	
R1		2	1	1	0	0	8	$s_1=8$	8
R2		0	$[[1]]$	0	1	0	5	$[[s_2]]=5$	5
R3		1	-1	0	0	1	4	$s_3=4$	

نختار المتغير الداخل في مسألة القيمة الصغرى على أساس أن معامله أكبر معامل موجب في الصف Ro

	$-z$	x_1	$[[x_2]]$	s_1	s_2	s_3	Rhs	BV
−R2+Ro	1	-4	0	0	-1	0	-5	$z=-5$
−R2+R1		2	0	1	-1	0	3	$s_1=3$
R2		0	1	0	1	0	5	$x_2=5$
R2+R3		1	0	0	1	1	9	$s_3=9$

واضح أن معاملات المتغيرات غبر الأساسية في الصف Ro جميعها غير موجبة $\therefore$ تتوقف طريقة السمبلكس (في مسألة القيمة الصغرى) ويكون الحل الأمثل عند $x_2=5$, $x_1=0$ حيث $z=-5$ (قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن).

واجب:

بإستخدام طريقة السمبلكس ، أوجد حل المسألة التالية:

$$\begin{aligned} \min \quad & z=-3x_1+x_2 \\ s.t \quad & x_1+x_2 \le 5 \\ & 2x_1+x_2 \le 8 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الإجابة: **الحل الأمثل عند** $x_2=0$, $x_1=4$ **حيث** $z=-12$

يوجد ثلاث حالات رئيسية عند حل مسألة القيمة العظمى في البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس.

(1) إذا كانت معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Ro جميعها موجبة فإن للمسألة حل وحيد.

(2) إذا كان معامل أحد المتغيرات غير الأساسية في الصف Ro يساوي صفراً فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول الأمثلية.

(3) إذا كانت جميع معاملات المتغير الداخل في جميع القيود موجبة فإن المسألة تكون غير محدودة الحل.

وهو ما سنوضحه من خلال عرض الأمثلة التالية:

مثال (**3-2**):

بإستخدام طريقة السمبلكس ، أوجد حل المسألة التالية:

$$\begin{aligned} mas \quad & z = x_1 + 3x_2 \\ s.t \quad & x_1 - 2x_2 \le 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ & x_1 \ , \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

الصيغة القياسية للمسألة هي

$$\begin{aligned} mas \quad & z - x_1 - 3x_2 = 0 \\ & x_1 - 2x_2 + s_1 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_2 = 3 \\ & x_1 , x_2 \ , \ s_1 \ , \ s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

	z	x_1	$[[x_2]]$	s_1	s_2	**Rhs**	**BV**	**Ratio**
Ro	1	-1	-3	0	0	0	$z=0$	
R1		1	-2	1	0	4	$s_1=4$	
R2		-1	$[[2]]$	0	1	3	$[[s_2]]=3$	$3/2$

	z	$[[x_1]]$	x_2	s_1	s_2	**Rhs**	**BV**
3R2+Ro	1	$-5/2$	0	0	$3/2$	$9/2$	$z=9/2$
2R2+R1		0	0	1	1	7	$s_1=7$
R2		$-1/2$	1	0	$1/2$	$3/2$	$x_2=3/2$

من الواضح هنا أنه لا يمكننا تحديد المتغير الخارج عن طريق إختبار النسبة لأن معاملات المتغير الداخل جميعها غير موجبة وبالتالي لا توجد أي قيود على الكمية s_1 أو x_2 التي نستطيع بها زيادة x_1 ، في هذه الحالة تكون المسألة غير محددة الحل، ويمكن توضيح ذلك بيانيًا.

مثال (**2-4**):

بإستخدام طريقة السمبلكس، أوجد حل مسألة البرمجة الخطية الآتية:

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 + x_2 \\
s.t \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\
& x_1 + x_2 \le 1 \\
& 4x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_1 \ge 0 \;,\; x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل:

(1) مسألة البرمجة الخطية في الصيغة القياسية تكون هي

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z - 4x_1 - x_2 = 0 \\
& 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + x_2 + s_2 = 1 \\
& 4x_1 + x_2 + s_3 = 2 \\
& x_1 \,,\, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(2) جدول السمبلكس المبدئي هو

	z	$[[x_1]]$	x_2	s_1	s_2	s_3	**Rhs**	**BV**	**Ratio**
Ro	1	-4	-1	0	0	0	0	$z=0$	–
R1		2	3	1	0	0	4	$s_1=4$	2
R2		1	1	0	1	0	1	$s_2=1$	1
R3		[[4]]	1	0	0	1	2	$[[s_3]]=2$	$1/2$

(3) تحوير العنصر المحوري بإستخدام طريقة جاوس . جوردان للحذف

	z	x_1	$[[x_2]]$	s_1	s_2	s_3	**Rhs**	**BV**	**Ratio**
4R3+Ro	1	0	0	0	0	1	2	$z=2$	–
−2R3+R1		0	$5/2$	1	0	$-1/2$	3	$s_1=3$	$6/5$
−R3+R2		0	$[[3/4]]$	0	1	$-1/4$	$1/2$	$[[s_2]]=1/2$	$2/3$
R3		1	$1/4$	0	0	$1/4$	$1/2$	$x_1=1/2$	2

واضح أنه لا توجد معاملات غير سالبة في الصف Ro.

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

$\therefore$ في البداية يكون الحل الأمثل للمسألة هو $x_2 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ حيث $z = 2$
وهذا الحل متغير مع النقطة $(1/2 , 0)$ ولكن يلاحظ أن x_2 متغير غير أساسي ومعامله يساوي الصفر في الصف Ro في هذه الحالة يوجد عدد لا نهائي من الحلول الأمثلية.

ويمكن أخذ x_2 متغير داخل ، s_2 متغير خارج ، تحوير العنصر $3/4$ كما يلي:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Rhs	BV
Ro	1	0	0	0	0	1	2	$z=2$
−5/2R2+R1		0	0	1	$-10/3$	$1/3$	$4/3$	$s_1 = 4/3$
R2		0	1	0	$4/3$	$-1/3$	$2/3$	$x_2 = 2/3$
−1/4R2+R3		1	0	0	$-1/3$	$1/3$	$1/3$	$x_1 = 1/3$

$\therefore$ يوجد حل أمثلي آخر عند

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

حيث $z = 2$

وهذا الحل متغير مع النقطة $(\frac{1}{3} , \frac{2}{3})$

$\therefore$ يمكن كتابة الحلول الأمثلية لهذه المسألة كالآتي:

$$\{(x_1,x_2):(x_1,x_2)=(1-\alpha)(\tfrac{1}{2},0)+\alpha(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}),\ 0\le\alpha\le 1\}$$

طريقة **M** الكبيرة
The Big M Method

خطوات حل مسألة البرمجة الخطية بإستخدام طريقة **M** الكبيرة
(The Big M Method)

(1) التأكد من أن الطرف الأيمن في كل قيد عبارة عن عدد غير سالب ، فإذا كان سالباً فإننا نقوم بضرب الطرفين في -1

(2) تحويل المسألة للصيغة القياسية مع إضافة متغيرات اصطناعية للقيود التي من النوع $\geq$ **أو** $=$

(3) القيام بإضافة $-Ma_1$ **لدالة الهدف لكل متغير اصطناعي** a_1 **في مسألة القيمة العظمى max أو إضافة** Ma_1 **في مسألة القيمة الصغرى min**

(4) في البداية نجعل المتغيرات الاصطناعية متغيرات أساسية وذلك عن طريق حذف معاملاتها في الصف Ro

(5) نحل المسألة بإستخدام طريقة السمبلكس ، وفي كل مرة يخرج فيها متغير اصطناعي من المتغيرات الأساسية يتم حذف عموده بالكامل من جدول السمبلكس ، وللوصول للحل الأمثل لابد أن تكون معاملات المتغيرات في الصف Ro جميعها غير سالبة في مسألة القيمة العظمى max ، ومعاملات المتغيرات في الصف Ro جميعها غير موجبة في مسألة القيمة الصغرى min وبحيث تكون جميع المتغيرات الاصطناعية في الجدول الأمثلي مساوية للصفر، وأما إذا وُجد متغير اصطناعي أكبر من الصفر فإن المسألة ليس لها حل (غير ممكنة الحل).

طريقة M الكبيرة The Big M Method

مثال (**1**):

أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ s.t \quad & 2x_1 + x_2 \le 16 \\ & x_1 + 3x_2 \ge 20 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1 \, , \, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

يمكن كتابة المسألة السابقة في الصيغة القياسية كما يلي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\ & x_1 + 3x_2 - e_1 = 20 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1 \, , x_2 \, , s_1 , e_1 \ge 0 \end{aligned}$$

البداية لكي نتمكن من إستخدام طريق السمبلكس لابد من فرض متغيرات اصطناعية

$a_1 , a_2 , \ldots$ **artificial variables**

لكل قيد يحتوي على $\ge$ أو $=$ ، فتصبح معادلات القيود السابقة كما يلي:

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\ & x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 20 \\ & x_1 + x_2 \qquad + a_2 = 10 \end{aligned}$$

للحصول على الحل الأمثل في النهاية لابد أن تنعدم قيمة كل متغير اصطناعي وإلا فإن المسألة ليس لها حل ، ولكي يتحقق ذلك لابد من طرح الكميتين $Ma_2 \, , \, Ma_1$ المناظرتين لـ a_2 , a_1 على الترتيب من دالة الهدف ، حيث M عدد كبير جداً وذلك في مسألة القيمة العظمي max فتصبح دالة الهدف هي

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2 - Ma_1 - Ma_2$$

$\therefore$ **يمكن صياغة المسألة كالآتي:**

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

$$\max \quad z - 2x_1 - 3x_2 + Ma_1 + Ma_2$$
$$2x_1 + x_2 + s_1 = 16$$
$$x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 20$$
$$x_1 + x_2 \qquad + a_2 = 10$$
$$x_1 , x_2 , s_1 , e_1 , a_1 , a_2 \geq 0$$

max z		x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	**Rhs**
Ro	1	-2	-3	0	0	M	M	0
R1		2	1	1	0	0	0	16
R2		1	3	0	-1	1	0	20
R3		1	1	0	0	0	1	10

لكي يكون a_1 , a_2 متغيران أساسيان نجري العمليات الآتية:

$-MR2-MR3+Ro \Rightarrow$

z **max**		x_1	[[x_2]]	s_1	e_1	a_1	a_2	**Rhs**	**BV**	**Ratio**
Ro	1	$-2M-2$	$-4M-3$	0	M	0	0	$-30M$	$z=-30M$	$-$
R1		2	1	1	0	0	0	16	$s_1 = 16$	16
R2		1	[[3]]	0	-1	1	0	20	[[a_1]] $= 20$	$20/3$
R3		1	1	0	0	0	1	10	$a_2 = 10$	10

$\therefore$ **الحل الأساسي المبدئي هنا يكون عند النقطة** $(0,0)$ **حيث** $x_1 = 0 , x_2 = 0$

max	z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	**Rhs**	**BV**
(4M+3)R2+Ro	1	$\frac{-2M}{3}-10$	0	0	$\frac{-M}{3}-1$	$\frac{4M}{3}+1$	0	$\frac{-10M}{3}+20$	$z = \frac{-10M}{3}+20$
−R2+R1		$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{28}{3}$	$s_1 = \frac{28}{3}$
R2		$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$x_2 = \frac{20}{3}$
−R2+R3		$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$a_2 = \frac{10}{3}$

واضح أن المتغير الاصطناعي a_1 أصبح متغيراً غير أساسي

$\therefore$ **يمكن حذفه من الجدول كما يلي:**

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

z max	$[[x_1]]$	x_2	s_1	e_1	a_2	Rhs	BV	Ratio
1	$\frac{-2M}{3}-1$	0	0	$\frac{-M}{3}-1$	0	$\frac{-10M}{3}+20$	$z=\frac{-10M}{3}+20$	–
	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{28}{3}$	$s_1=\frac{28}{3}$	$\frac{28}{3}$
	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$x_2=\frac{20}{3}$	20
	$[[\frac{2}{3}]]$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$[[a_2]]=\frac{10}{3}$	5

الحل الأساسي هنا يكون عند النقطة $(0,20/3)$.

	max z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_2	Rhs	BV
((2/3)M+1)R3+Ro	1	0	0	0	$-1/2$	$M+3/2$	25	$z=25$
-5/3R3+R1		0	0	1	$-1/2$	$-5/2$	1	$s_1=1$
-1/3R3+R2		0	1	0	$-1/2$	$-1/2$	5	$x_2=5$
R3		1	0	0	$1/2$	$3/2$	5	$x_1=5$

وهذا الحل عند النقطة $(5,5)$

واضح لدينا أن المتغير الاصطناعي a_2 **أصبح متغيراً غير أساسي**

$\therefore$ **يمكن حذفه من الجدول كما يلي:**

max z	x_1	x_2	s_1	$[[e_1]]$	Rhs	BV	Ratio
1	0	0	0	$-1/2$	25	$z=25$	
	0	0	1	$-1/2$	1	$s_1=1$	
	0	1	0	$-1/2$	5	$x_2=5$	
	1	0	0	$[[1/2]]$	5	$[[x_1]]=5$	10

	max z	x_1	x_2	s_1	e_1	Rhs	BV
1/2R3+Ro	1	1	0	0	0	30	$z=30$
1/2R3+R1		1	0	1	0	6	$s_1=6$
1/2R3+R2		1	1	0	0	10	$x_2=10$
R3		2	0	0	1	10	$e_1=10$

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

∵ **جميع المتغيرات في الصف Ro غير سالبة**

∴ **قد وصلنا إلى الحل الأمثل والذي يكون عند**

$$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = 10 \quad , \quad s_1^* = 6 \quad , \quad e_1^* = 10$$

حيث $z^* = 30$

لاحظ أيضاً أن الحل يكون عند النقطة $(0,10)$

$$z^* = \max z = 2(0) + 3(10) = 30$$

مثال (**2**):

أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ s.t \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 16 \\ & x_1 + 3x_2 \ge 36 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

(1) نحول المسألة للصيغة القياسية بإضافة المتغيرين الاصطناعيين a_1 , a_2 **للقدين الثاني والثالث مع إضافة المتغير المكمل** s_1 **للقيد الأول.**

طرح المتغير الزائد a_1 **للقيد الثاني ، ثم نقوم بتعديل دالة الهدف لتصبح**

$$\min \; z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_1 - Ma_2 = 0$$

فتكون الصيغة القياسية للمسألة هي

$$\begin{aligned} \min \quad & z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_1 - Ma_2 = 0 \\ s.t \quad & 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 16 \\ & x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 36 \\ & x_1 + x_2 + a_2 = 10 \\ & x_1 , x_2 , s_1 , e_1 , a_1 , a_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(2) جدول السمبلكس المبدئي هو

min	z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs
Ro	1	-2	-3	0	0	$-M$	$-M$	0
R1		2	1	1	0	0	0	16
R2		1	3	0	-1	1	0	36
R3		1	1	0	0	0	1	10

لكي يكون a_2 , a_1 متغيران أساسيان نجري العمليات الآتية:

MR2+MR3+Ro $\Rightarrow$

min	z	x_1	$[[x_2]]$	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs	BV	Ratio
Ro	1	$2M-2$	$4M-3$	0	$-M$	$-M$	$-M$	$46M$	$z=46M$	$-$
R1		2	1	1	0	0	0	16	$s_1=16$	16
R2		1	3	0	-1	1	0	36	$a_1=36$	12
R3		1	[[1]]	0	0	0	1	10	$[[a_2]]=10$	10

min	z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs	BV
(−4M+3)R3+Ro	1	$1-2M$	0	0	$-M$	0	$3-4M$	$6M+30$	$z=6M+30$
−R3+R1		1	0	1	0	0	-1	6	$s_1=6$
−3R3+R2		-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_1=36$
R3		1	1	0	0	0	1	10	$x_2=10$

تتوقف طريقة السمبلكس في مسألة القيمة الصغرى السابقة حيث أن معاملات المتغيرات في الصف Ro جميعها غير موجبة ، كما نلاحظ أيضاً أن قيمة المتغير الاصطناعي a_1 يكون أكبر من الصفر (أي أنه ما زال متغيراً أساسياً) ، كما أن دالة الهدف z مرتبطة بالعدد M.

$\therefore$ هذه مسألة برمجة خطية ليس لها حل .Infeasible Lp

خطوات حل مسألة البرمجة الخطية بإستخدام طريقة المرحلتين
(The Two Phase Method)

(1) التأكد من أن الطرف الأيمن في كل قيد عبارة عن عدد غير سالب ، فإذا كان سالباً فإننا نقوم بضرب الطرفين في -1.

(2) تحويل المسألة للصيغة القياسية مع إضافة متغيرات اصطناعية للقيود التي من النوع $\geq$ أو $=$.

(3) المرحلة الأولى:

نقوم فيها بإهمال دالة الهدف الأصلية ، ونستبدلها بدالة الهدف التالية:

$$\begin{aligned} \min y &= \sum_i a_i \\ &= a_1 + a_2 + \cdots \end{aligned}$$

أي أن دالة الهدف الجديدة تمثل مجموع المتغيرات الاصطناعية.

فإذا كان لمسألة البرمجة الخطية حل ، فإن قيمة y تساوي صفراً في جدول السمبلكس الأمثلي ، أما إذا كانت $y > 0$ فإن المسألة ليس لها حل.

(4) بفرض أن $y = 0$ وأن المسألة لها حل في المرحلة الأولى فإن جميع المتغيرات الاصطناعية تكون غير أساسية وفي هذه الحالة نحذف أعمدة المتغيرات الاصطناعية من الجدول الأمثلي في المرحلة الأولى.

(5) المرحلة الثانية:

نقوم بإستبدال الصف Ro في جدول السمبلكس الذي حصلنا عليه في المرحلة الأولى بدالة الهدف الأصلية ثم نكمل طريقة السمبلكس حتى نصل إلى الحل الأمثل.

The Two Phase Method طريقة المرحلتين

مثال (**1**):

سوف نحل مثال (1) السابق في M الكبيرة ، بإستخدام طريقة المرحلتين

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ s.t \quad & 2x_1 + x_2 \le 16 \\ & x_1 + 3x_2 \ge 20 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

نقوم بإضافة المتغيرات المكملة والزائدة والإصطناعية للقيود فتكون الصيغة القياسية للمسألة هي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\ & x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 20 \\ & x_1 + x_2 + a_2 = 10 \\ & x_1 , x_2 , s_1 , e_1 , a_1 , a_2 \ge 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأولى: (**phase I**)

نقوم بإستبدال دالة الهدف في المسألة الأصلية بدالة الهدف الآتية:

$$\min \quad y = a_1 + a_2$$

حيث a_1 , a_2 **المتغيران الاصطناعيان**

$$\begin{aligned} \min \quad & z - a_1 - a_2 = 0 \\ s.t \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\ & x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 20 \\ & x_1 + x_2 + a_2 = 10 \end{aligned}$$

حيث $x_1 , x_2 , s_1 , e_1 , a_1 , a_2 \ge 0$

min	y	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs
Ro	1	0	0	0	0	-1	-1	0
R1		2	1	1	0	0	0	16
R2		1	3	0	-1	1	0	20
R3		1	1	0	0	0	1	10

لجعل a_1 , a_2 متغيران أساسيان نجري العملية الحسابية الآتية:

R2+R3+Ro $\Rightarrow$

min	y	x_1	$[[x_2]]$	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs	BV	Ratio
Ro	1	2	4	0	-1	0	0	30	$y=30$	$-$
R1		2	1	1	0	0	0	16	$s_1=16$	16
R2		1	$[[3]]$	0	-1	1	0	20	$[[a_1]]=20$	$20/3$
R3		1	1	0	0	0	1	10	$a_2=10$	10

هذا الحل يتفق مع النقطة $A(0,0)$

min	y	$[[x_1]]$	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs	BV	Ratio
−4R2+Ro	1	$2/3$	0	0	$1/3$	$-4/3$	0	$10/3$	$y=10/3$	$-$
−R2+R1		$5/3$	0	1	$1/3$	$-1/3$	0	$28/3$	$s_1=28/3$	$28/5$
R2		$1/3$	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	$20/3$	$x_2=20/3$	20
−R2+R3		$[[2/3]]$	0	0	$1/3$	$-1/3$	1	$10/3$	$[[a_2]]=10/3$	5

هذا الحل يتفق مع النقطة $B(0,20/3)$

min	y	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs	BV
−2/3R3+Ro	1	0	0	0	0	-1	-1	0	$y=0$
−5/3R3+R1		0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$-5/2$	1	$s_1=1$
−1/3R3+R2		0	1	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	5	$x_2=5$
R3		1	0	0	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	5	$x_1=5$

في هذا الجدول أصبح المتغيران الاصطناعيان a_1,a_2 غير أساسيان (قيمة كل منهما تساوي الصفر) ، وأن قيمة المتغير y تساوي الصفر.

المرحلة الثانية: (**phase II**)

سنقوم بحذف المتغيران الاصطناعيان a_1,a_2 من الجدول السابق مع إستبدال عناصر الصف Ro بمعاملات دالة الهدف الأصلية

$$\max\ z-2x_1-3x_2=0$$

min y	x_1	x_2	s_1	e_1	Rhs
1	-2	-3	0	0	0
	0	0	1	$-1/2$	1
	0	1	0	$-1/2$	5
	1	0	0	$1/2$	5

لجعل x_1,x_2 متغيران أساسيان نجري العملية الحسابية الآتية:

2R3+3R2+Ro $\Rightarrow$

min y	x_1	x_2	s_1	$[[e_1]]$	Rhs	BV	Ratio
2R3+3R2+Ro	0	0	0	$-1/2$	25	$z=25$	
1							
	0	0	1	$-1/2$	1	$s_1=1$	
	0	1	0	$-1/2$	5	$x_2=5$	
	1	0	0	$[[1/2]]$	5	$[[x_1]]=5$	10

	min y	x_1	x_2	s_1	e_1	Rhs	BV
(1/2)R3+Ro	1	1	0	0	0	30	$z=30$
(1/2)R3+R1		1	0	1	0	6	$s_1=6$
(1/2)R3+R2		1	1	0	0	10	$x_2=10$
		2	0	0	1	10	$e_1=10$

وبهذا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

$$x_1^*=0\ ,\ x_2^*=10\ ,\ s_1^*=6\ ,\ e_1^*=10$$

حيث $\boxed{z^*=30}$

وهذا الحل يتفق مع النقطة $D(0,10)$**.**

مثال (**2**):

سوف نحل مثال (2) السابق في طريقة M الكبيرة ، بإستخدام طريقة المرحلتين.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ s.t \quad & 2x_1 + x_2 \le 16 \\ & x_1 + 3x_2 \ge 36 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

نقوم بإضافة المتغيرات المكملة والزائدة والاصطناعية للقيود فتكون الصيغة القياسية للمسألة هي

$$\begin{aligned} \min \quad & z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\ & x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 36 \\ & x_1 + x_2 + a_2 = 10 \\ & x_1 , x_2 , s_1 , e_1 , a_1 , a_2 \ge 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأولى:

نقوم بإستبدال دالة الهدف في المسألة الأصلية بدالة الهدف الآتية:

$$\min \quad y = a_1 + a_2$$

حيث a_1 , a_2 **المتغيران الاصطناعيان**

فتكون الصورة القياسية للمسألة هي

$$\begin{aligned} \min \quad & y - a_1 - a_2 = 0 \\ s.t \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\ & x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 36 \\ & x_1 + x_2 + a_2 = 10 \end{aligned}$$

حيث $x_1 , x_2 , s_1 , e_1 , a_1 , a_2 \ge 0$

min y		x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs
Ro	1	0	0	0	0	-1	-1	0
R1		0	1	1	0	0	0	16
R2		1	3	0	-1	1	0	36
R3		1	1	0	0	0	1	10

لجعل a_1, a_2 متغيران أساسيان نجري العملية الحسابية الآتية:

2R3+3R2+Ro $\Rightarrow$

min y		x_1	$[[x_2]]$	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs	BV	Ratio
Ro	1	2	4	0	-1	0	0	46	$z=46$	–
R1		2	1	1	0	0	0	16	$s_1=16$	16
R2		1	3	0	-1	1	0	36	$a_1=36$	12
R3		1	[[1]]	0	0	0	1	10	$[[a_2]]=10$	10

min y		x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs	BV
−4R3+Ro	1	-2	0	0	-1	0	-4	6	$y=6$
−R3+R1		1	0	1	0	0	-1	6	$s_1=6$
−3R3+R2		-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_1=6$
R3		1	1	0	0	0	1	10	$x_2=10$

نلاحظ هنا:

أن طريقة السمبلكس تتوقف حيث أن معاملات الصف Ro جميعها غير موجبة ، كما نلاحظ أيضاً أن $y=6$ أي أن $y>0$ وأن المتغير الاصطناعي a_1 ما زال متغيراً أساسياً.

$\therefore$ المسألة ليس لها حل.