المتسلسلات

تعريف: لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة:

← **المتسلسلة** هي المجموع اللامنتهي $a_1+a_2+\cdots$

أو نرمز كذلك: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أو $\sum a_n$

← **المجموع الجزئي** المنته هو $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

← **متتالية المجموع الجزئي:** $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

← a_n يسمى الحد النوني في المتسلسلة $\sum a_n$.

← المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة إذا كان المتتابعة للمجموع الجزئي $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة

ونرمز: $\lim S_n = \sum a_n$

← المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة إذا كان المتتابعة للمجموع الجزئي $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة:

← المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة.

ولدينا $\lim S_n = \sum a_n$

مبرهنة: إذا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة
فإن $\lim a_n = 0$

ملاحظة: إذا كان $\lim a_n \neq 0$ أو $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة
فإن المتسلسلة متباعدة.

مثال: (1) المتسلسلة $\sum (-1)^n$ متباعدة
لأن $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ متتابعة متباعدة.

(2) المتسلسلة $\sum \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$
متباعدة لأن: $\lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = 1 \neq 0$

(3) المتسلسلة $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ (لا نقدر أن نستنتج باستعمال
المبرهنة) لأن $\lim \frac{1}{n(n+1)} = 0$

(4) المتسلسلة $\sum \frac{1}{2^n}$ (لا نقدر أن نستنتج
باستعمال المبرهنة) لأن $\lim \frac{1}{2^n} = 0$)
($\{\frac{1}{2^n}\}$ متتابعة هندسية حيث $-1 < r = \frac{1}{2} < 1$)

مبرهنة (1): ليكن $r \in \mathbb{R}$ ، $r \neq 1$, $r \neq 0$

فإن $S_n = 1+r+r^2+\dots+r^n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$

برهان: لدينا: $S_n = 1+r+r^2+\dots+r^n$

$r.S_n = r+r^2+r^3+\dots+r^{n+1}$

إذن $S_n - r.S_n = 1-r^{n+1}$

إذن $S_n(1-r) = 1-r^{n+1}$

وبالتالي $S_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$

(2) المتسلسلة $\left\{\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right\}$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $-1<r<1$

وفي هاته الحالة $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1+r+r^2+\dots = \dfrac{1}{1-r}$

نسمي $\left\{\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right\}$ هي المتسلسلة الهندسية.

ملاحظة: المتسلسلة: $\sum a.r^n$ هي متسلسلة هندسية:

حيث $\sum a.r^n = a.\sum r^n$

مثال (1): المتسلسلة: $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$

متقاربة: لأن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

حيث $-1 < r = \frac{1}{2} < 1$

ولدينا: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

مثال: المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة:

نلاحظ أن: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

لأن: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

لدينا:

$$S_n = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{n+1}}$$

وأن: $\lim S_n = \lim \left(1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}\right) = 1$

وبالتالي: $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1$

مثال: المتسلسلة: $\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}$ متباعدة

ص 72

$\sum \frac{1}{n} = \infty$