# المتتابعات والمتسلسلات

## المتتابعات:

**تعريف:** $f$ متتابعة (أو متتالية) إذا كان

$f$ هي دالة من $\mathbb{N}$ (أو جزء منه) إلى $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n)$$

ونرمز إلى $f(n)$ بـ $u_n$ ، $f = \{u_n\} = u_{n \in \mathbb{N}}$

$u_n$: هو الحد النوني للمتتابعة

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_3, \dots)$$

مثال: (١)

$u = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n}$

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \frac{1}{n}$$

(٢)

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \ln(n)$$

$u = (0, \ln(2), \ln(3), \ln 4, \dots)$

(٣)

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \frac{\sin(n) + 3n}{n-1}$$

$u_1$ غير موجود. $\quad u_2 = \frac{\sin 2 + 6}{1}, \quad u_3 = \frac{\sin 3 + 9}{2}, \dots$

مجال المتتابعة $u$ هو $\mathbb{N} \setminus \{1\}$

(٤)

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto (-1)^n$$

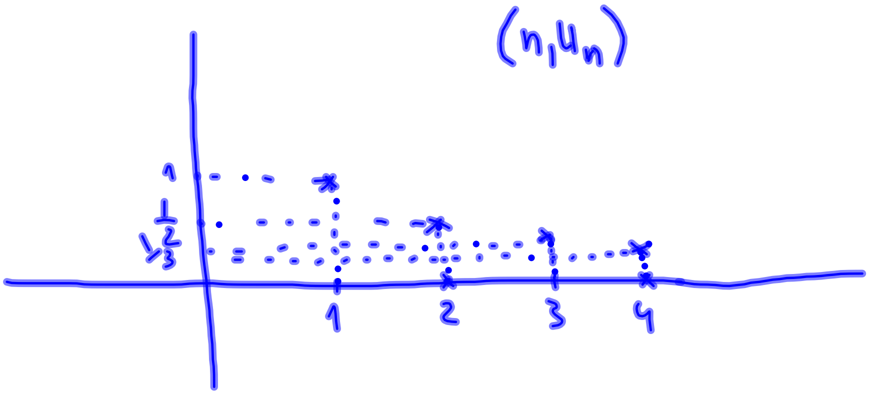
$$u_n = \begin{cases} 1 & ; n = 2p \; ; p \in \mathbb{N} \\ -1 & ; n = 2p-1 \; ; p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$u_n = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

رسم المتتابعة:

$u = \frac{1}{n}$

$(n, u_n)$



## المتتابعة المتقاربة :

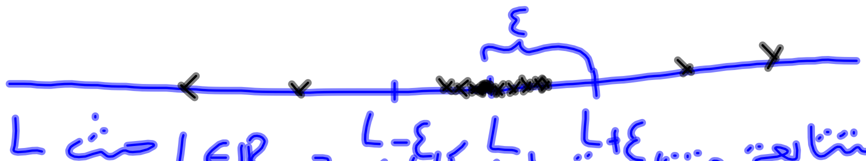
**تعريف :** لتكن $u$ متتابعة حيث $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ولتكن $L\in\mathbb{R}$

(1) المتتابعة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إلى $L$ ونرمز $\lim u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

إذا كان لكل $\varepsilon>0$ فإن عدد لا منتهي من حدود $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يوجد في الفترة $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

وعدد منتهي من حدود $(u_n)$ يوجد خارج الفترة $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

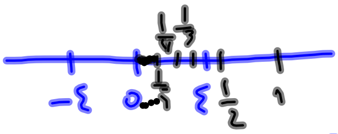



(2) نقول أن المتتابعة متقاربة إذا كان يوجد $L\in\mathbb{R}$ حيث $\lim u_n = L$

(3) إذا كانت المتتابعة غير متقاربة فإنها متباعدة

مثال (١) $u_n = \frac{1}{n}$ ; $\lim u_n = 0$

لتكن $\varepsilon > 0$

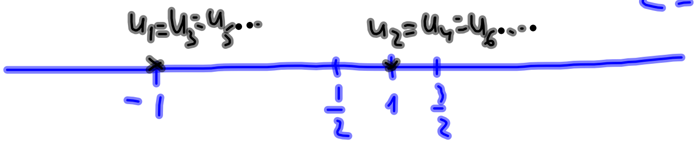



في الفترة $(-\varepsilon, \varepsilon)$ يوجد عدد لا منتهٍ من الحدود
و يوجد عدد منتهٍ من الحدود خارج الفترة.

وبالتالي $\lim \frac{1}{n} = 0$

(٢) $u_n = (-1)^n$ , $(u_n)$ متباعدة.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$




في الفترة $(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2})$ يوجد عدد غير منتهٍ من الحدود وهي

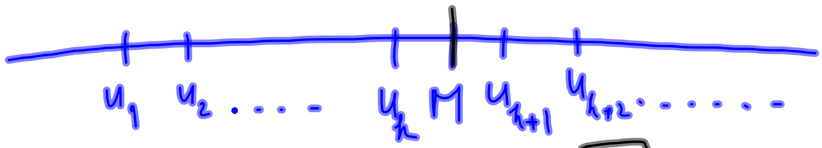
$u_2, u_4, u_6, \ldots, u_{2p}, u_{2p+2}, \ldots$

وخارج الفترة $(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2})$ يوجد عدد غير منتهٍ من الحدود وهي

$u_1, u_3, u_5, \ldots, u_{2p+1}, u_{2p+3}, \ldots$

وبالتالي المتتابعة $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة.

**مثال 3:** $u_n = n$ , $\lim u_n = +\infty$ $(u_n)$ متباعدة.




يوجد عدد غير منته من الحدود خارج أي فترة $(M-\varepsilon, M+\varepsilon)$

وبالتالي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة.

# خصائص المتتالية المتقاربة

(١) إذا كان المتتابعة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إلى $L$ $(L\in\mathbb{R})$
فإن (i) النهاية وحيدة (ii) المتتابعة محدودة.

(٢) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إلى $L$ إذا وفقط إذا كان
$(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}}$ كل منهما متتابعة متقاربة إلى $L$.

(٣) لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتابعة حيث توجد دالة $f$ تحقق $u_n=f(n)$
المتتابعة متقاربة الى $L$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

(٤) إذا كان $\lim u_n=0$ و $(v_n)$ متتابعة محدودة
فإن $\lim u_n\cdot v_n=0$

## مثال:

هل أن المتتابعة $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة أم متباعدة في الحالات التالية

(1) $U_n = \ln(n)$ (2) $U_n = \dfrac{n^2+1}{5n^2-3}$

(3) $U_n = n^2 - 3n + 1$ (4) $U_n = 3 + \sin n$

## الحل

(1) $U_n = \ln(n)$

ولدينا الدالة $f$ حيث أن

$$U_n = f(n) = \ln(n)$$

نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

بأن $\lim U_n = +\infty$

وبالتالي $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة.

(2) $U_n = \dfrac{n^2+1}{5n^2-3}$

لدينا $f(x) = \dfrac{x^2+1}{5x^2-3}$

ونعلم أن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{5x^2-3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{5x^2\left(1-\frac{3}{5x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{3}{5x^2}} = \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{x^2} \to 0$, $\frac{3}{5x^2} \to 0$

فإن $(U_n)$ هي متقاربة إلى $\frac{1}{5}$

(3) $U_n = n^2 - 3n + 1$

ولدينا $f(x) = x^2 - 3x + 1$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3x + 1)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty}\underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}\right)}_{1}$$

$$= +\infty$$

بأن $(U_n)$ متباعدة حيث

$$\lim U_n = +\infty$$

(4) $U_n = 3 + \sin n$

لنأخذ: $f(x) = 3 + \sin(x)$

و $U_n = f(n)$

$\sin(x)$ ليست لها نهاية عند $+\infty$

وبالتالي $\lim_{+\infty} 3+\sin(x)$ غير موجودة

بأن $U_n = 3 + \sin(n)$ متباعدة.

مثال 5 ص 246: أثبت أن $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

تذكير: $\lim_{0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\lim_{0^+} t \ln t = 0^-$

الحل: لنكن $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

فإن $\ln(f(x)) = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = 1$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^1 = e$

وبالتالي $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

مثال ص 246: احسب $\lim \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

الحل: لتكن $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

إذن $\lim \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$

مثال 7 ص 247: حدد فيما إذا كانت المتتابعة: $\left(\frac{5n}{e^{2n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ متقاربة أم متباعدة؟

تذكير:
$\lim_{+\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

الحل: لنكن $f(x) = \frac{5x}{e^{2x}}$

ولدينا:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{e^{2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x}{2x}}{\frac{e^{2x}}{2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5}{2}}{+\infty} = 0$$

وبالتالي $\lim \frac{5n}{e^{2n}} = 0$ بأن $\left(\frac{5n}{e^{2n}}\right)$ متقاربة إلى 0.

**مثال:** احسب النهاية إن وجدت في الحالات التالية:

(1) $\lim (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ (2) $\lim \frac{\sin n}{n}$ (3) $\lim \frac{(-1)^n + 3}{n^2}$

**الحل:** (1)

نعلم أن $\lim \frac{1}{n} = 0$

و $\left((-1)^n\right)$ محدودة $\left(-1 \le (-1)^n \le 1\right)$

فإن $\lim (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$

(2) نعلم أن $(\sin n)$ متتابعة محدودة

$(-1 \le \sin n \le 1)$

ولدينا $\lim \frac{1}{n} = 0$

فإن $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$

(3) لدينا

$2 \le (-1)^n + 3 \le 4$

ولدينا $\lim \frac{1}{n^2} = 0$

فإن

$$\lim \frac{(-1)^n + 3}{n^2} = 0$$

**مثال:** أوجد النهاية للمتتابعة إن وجدت.

(1) $\lim n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (2) $\lim \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ (3) $\lim n \cos \frac{1}{n}$

**الحل:** (1)

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{+\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

فإن $\lim n \sin \frac{1}{n} = 1$

(2)

$f(x) = \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

$\ln(f(x)) = x \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$\lim_{+\infty} \ln(f(x))$

$= \lim_{+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{2t}$

$= \frac{1}{2}$

فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{\frac{1}{2}}$

وبالتالي $\lim \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}$

(3)

$f(x) = x \cos \frac{1}{x}$

لدينا

$\lim_{+\infty} \cos \frac{1}{x}$

$= \lim_{t \to 0^+} \cos t = 1$

فإن $\lim_{+\infty} x \cos \frac{1}{x} = +\infty$

**المتتابعة الهندسية:** لتكن $(u_n)$ متتابعة

$(u_n)_{n=1}^{\infty}$ متتابعة هندسية إذا كان يوجد $r \in \mathbb{R}$ حيث

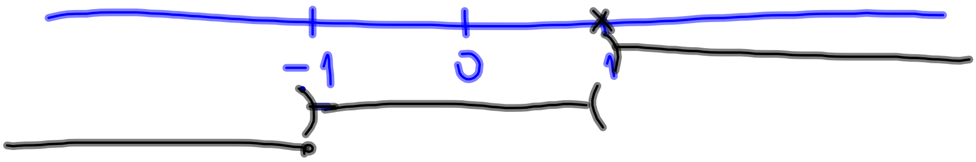
$u_{n+1} = r\,u_n \; ; \forall n \geq 1$ $\left( \frac{u_{n+1}}{u_n} = r \right.$ لكل $\left. n \geq 1 \right)$

وفي هاته الحالة فإن $u_n = r^{n-1} \cdot u_1$ لكل $n \geq 1$

و $u_n = r^{n-p} u_p$ لكل $n \geq p$

**مبرهنة:** لتكن $r \in \mathbb{R}$ , $r \neq 0$

$$\lim r^n = \begin{cases} 1 & ; \ r = 1 \\ +\infty & ; \ r > 1 \\ 0 & ; \ -1 < r < 1 \quad (|r|<1) \\ \text{غير موجودة} & ; \ r \leq -1 \end{cases}$$



مثال: أوجد النهاية للمتتابعة $(u_n)$ في الحالات التالية:

(١) $\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (٢) $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (٣) $\lim \left(\frac{7}{3}\right)^n$

الحل (١) $\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

لأن $-1 < r = -\frac{1}{2} < 1$

(٢) $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$-1 < \frac{1}{3} < 1$

(٣) $\lim \left(\frac{7}{3}\right)^n = +\infty$

لأن $\left(\frac{7}{3}\right) > 1$

مثال: أوجد النهاية للمتتابعة التالية:

$u_n = -6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ لكل $n \geq 2$

الحل: لدينا

$u_n = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$= -6\left(2^2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = -24\left(\frac{1}{2}\right)^n$

بما أن $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

وبالتالي $\lim u_n = 0$

**تعريف:** لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة:

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي <u>متزايدة</u> إذا كان $u_n \le u_{n+1}$ لكل $n \ge 1$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي <u>متناقصة</u> إذا كان $u_n \ge u_{n+1}$

$\{u_n\}$ هي <u>مضطردة</u> إذا كان $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة أو متناقصة

**مبرهنة:** لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة:

(1) إذا كان $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ مضطردة ومحدودة فإن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة.

(2) إذا كان $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة ويوجد $M \in \mathbb{R}$ حيث $u_n \le M$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة.

(3) إذا كان $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متناقصة ويوجد $m \in \mathbb{R}$ حيث $u_n \ge m$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة.

مثال 12 ص 261: لتكن $a_1=\frac{3}{4}$ ، $a_n=\frac{4n^2-1}{4n^2}$

أثبت أن $\{a_n\}$ متقاربة:

الحل: ط 1

$$\lim a_n=\lim \frac{4n^2-1}{4n^2}=\lim \frac{n^2(4-\frac{1}{n^2})}{4n^2}=\lim \frac{4-\frac{1}{n^2}}{4}$$

0

$$=1$$

ط 2: لدينا $0\le 4n^2-1\le 4n^2$ فإن $0\le a_n=\frac{4n^2-1}{4n^2}\le 1$

فإن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة محدودة.

ولدينا:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{4(n+1)^2-1}{4(n+1)^2}-\frac{4n^2-1}{4n^2}$$

$$=\frac{(4n^2+8n+4-1)n^2-(4n^2-1)(n^2+2n+1)}{4(n+1)^2n^2}$$

$$=\frac{4n^4+8n^3+3n^2-(4n^4+8n^3+4n^2-n^2-2n-1)}{4(n+1)^2n^2}$$

$$=\frac{2n+1}{4(n+1)^2n^2}\ge 0$$

فإن $a_{n+1}\ge a_n$ فإن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة.

وبما أنها محدودة فإن المتتابعة متقاربة.

مثال 13 ص 262, 263:

لتكن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ معرفة كما يلي

$a_1=\sqrt{2}$ , $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ لكل $n\geq 1$

أثبت أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى العدد r وأوجد r

الحل: الحدود الأولى من المتتابعة:

$a_1=\sqrt{2}$ , $a_2=\sqrt{2+a_1}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$a_3=\sqrt{2+a_2}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ,

$a_4=\sqrt{2+a_3}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ ,

← $\{a_n\}$ متزايدة

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n$$

$$=\frac{2+a_n-a_n^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n}$$

لدينا: (1)

$2+x-x^2=0$

$\iff x=-1$ أو $x=2$

فإن $-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | $0$ | $-$ | |

لدينا (2) $\sqrt{2}\leq a_1\leq 2$

ولكل $n\geq 1$: $\sqrt{2}\leq a_n\leq 2$

فإن $\sqrt{2}<2+\sqrt{2}\leq 2+a_n\leq 4$

$\sqrt{2}\leq\sqrt{2+a_n}=a_{n+1}\leq 2$

وبالتالي $\sqrt{2}\leq a_n\leq 2$

لكل $n\geq 1$

فإن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة

وبما أنها متزايدة فإن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، $\lim a_n=r$

لدينا ← $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ لكل n

فإن $\lim a_{n+1}=\lim\sqrt{2+a_n}$

فإن $r=\sqrt{2+r}$

فإن $r^2=2+r$

وبالتالي $r^2-r-2=0$

فإن $r=-1$ أو $r=2$

وبما أن $\sqrt{2}\leq a_n\leq 2$

فإن $\sqrt{2}\leq\lim a_n=r\leq 2$

وبالتالي $\boxed{r=2}$

# المتسلسلات

تعريف: لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة:

التركيب:

$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$

يسمى متسلسلة ونرمز لهذا: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أو $\sum a_n$

$a_n$: الحد النوني للمتسلسلة $\sum a_n$

ونسمي المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ المجموع الجزئي للمتسلسلة $\sum a_n$

ونعرفها كما يلي:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1+a_2$ , $S_3 = a_1+a_2+a_3$ , $\ldots$ , $S_n$

$S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$

← المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة إذا كان المجموع الجزئي $\{S_n\}$ متقاربة. ولدينا

$$\boxed{\sum a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n}$$

نلاحظ أن: $S_{n+1} = \underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_n}+a_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

مثال: (1) المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ ، $a_n = \frac{1}{n^2}$ ، $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

متتابعة المجموع الجزئي

الحد النوني للمتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$

(2) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ : الحد النوني للمتسلسلة.

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ : متتابعة المجموع الجزئي للمتسلسلة $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

(3) المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ ، $r \neq 0$ (المتسلسلة الهندسية)

$r^n$ : الحد النوني.

$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$ : متتابعة المجموع الجزئي.

مثال: لتكن $S=\sum \frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة هل $S$ متقاربة؟

الحل: لدينا ←

$S_1 = \frac{1}{1(2)} = \frac{1}{2}$ , $S_2 = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} = \frac{2}{3}$ ,

$S_3 = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} = S_2 + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ , $S_4 = S_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(5)} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

نلاحظ أن: $S_n = \frac{n}{n+1}$ ؟

← لدينا: لكل $k \geq 1$ , $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1}$

إذاً

$$S_n = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

لكل $n \geq 1$ لدينا:

$$\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \boxed{S_n = \frac{n}{n+1}}$$

←

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$\sum \frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة متقاربة لـ 1

**مبرهنة:** إذا كان المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

**البرهان:** لدينا: $\boxed{S_n - S_{n-1} = a_n} \Leftrightarrow S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n$

إذا كان المتسلسلة متقاربة للعدد $L$ فإن $\lim S_n = L$

وبالتالي $\lim S_{n-1} = L$ فإن

$\lim a_n = \lim (S_n - S_{n-1})$

$= \lim S_n - \lim S_{n-1} = L - L = 0$

**ملاحظة:** (1) إذا كان $\lim a_n \neq 0$ (موجودة أم لا).

فإن المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة.

(2) إذا كان $\lim a_n = 0$ لا يمكن أن نعرف أن المتسلسلة متقاربة أم لا

باستخدام المبرهنة السابقة.

**مثال:**

(1) المتسلسلة: $\sum (-1)^n$ متباعدة لأن $\lim (-1)^n$ غير موجودة

(2) المتسلسلة: $\sum \frac{n}{n+1}$ متباعدة لأن $\lim \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

(3) المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)$ متباعدة لأن $\lim \ln(n) = +\infty$

(4) المتسلسلة: $\sum \frac{1}{n^2}$ (لا يمكن أن نستنتج التقارب أم لا للمتسلسلة حسب المبرهنة, الملاحظة السابقة) لأن $\lim \frac{1}{n^2} = 0$

(5) المتسلسلة: $\sum \frac{1}{n}$ (لا يمكن أن نستنتج) لأن $\lim \frac{1}{n} = 0$

**مبرهنة:** (1) إذا كان $\alpha_n \le a_n \le \beta_n$ لكل $n \geq 1$

ولدينا $L = \sum \alpha_n = \sum \beta_n$ ($\sum \alpha_n$ متقاربة)

فإن $\sum a_n$ متقاربة و $\sum a_n = L$

(2) إذا كان $0 \le a_n \le \beta_n$ لكل $n \geq 1$

ولدينا $\sum \beta_n$ متقاربة فإن $\sum a_n$ متقاربة

وفي هاته الحالة $0 \le \sum a_n \le \sum \beta_n$

مثال: هل أن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة.

الحل: لدينا $n^2 \geq (n-1)n$ لكل $n \geq 1$

وبالتالي $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n}$ لكل $n \geq 2$

نعلم حسب مثال سابق أن

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k}$$

بأن

$$0 \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

بأن

$$0 \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \leq \lim \frac{n}{n+1} = 1$$

ونعلم أن المتتابعة $\left\{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي محدودة ومتزايدة

بأن $\left\{\sum_{p=1} \frac{1}{p^2}\right\}$ متقاربة

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1$$

**مبرهنة:** لتكن $r \in \mathbb{R}$ , $r \neq 0$ ,

لدينا إذا كان $r \neq 1$ فإن: $S_n = 1 + r + \dots + r^n = \sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

وبالتالي

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} \; ; & -1 < r < 1 \\ +\infty \; ; & r \geq 1 \\ \text{غير موجودة} \; ; & r \leq -1 \end{cases}$$

السلسلة $\sum r^n$ متقاربة إلى $\frac{1}{1-r}$ إذا وفقط إذا كان $-1 < r < 1$

مثال: هل أن المتسلسلة التالية متقاربة أو متباعدة؟

(1) $\sum 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (2) $\sum \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ (3) $\sum 2^{n-5}$ (4) $\sum (-1)^n$

الحل: (1) حسب المبرهنة السابقة:

$\sum 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n = 8$ بما أن $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

فإن $\sum 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متقاربة.

(3) لدينا $\sum 2^{n-5} = \sum 2^n \cdot 2^{-5} = \frac{1}{2^5}\sum 2^n$

$= \frac{1}{32}\sum 2^n$

$2>1$ فإن $\sum 2^n = \infty$ وبالتالي

$\sum 2^{n-5}$ متباعدة.

أو لأن $\lim 2^{n-5} = +\infty$

(2) لدينا $\sum\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \sum\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$= \sum 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 4\sum\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$= 4\,\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

فإن $\sum\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ متقاربة.

(4) $\sum(-1)^n$ متباعدة

لأن $\lim(-1)^n$ غير موجودة

أو حسب المبرهنة السابقة.