المتتاليات غير المنتهية Infinite Sequences

ندرس في هذا الفصل المتتابعات غير المنتهية ، والتي هي دوال حقيقية نطاقها مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية .

تعريف

نعرف المتتابعة غير المنتهية بأنها دالة نطاقها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (أو مجموعة جزئية منها) ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، أي $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

وبشكل عام إذا كانت $n \geq 1 , f(n) = a_n$ فإن مجموعة الأعداد المرتبة $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ تعرف المتتابعة تعريفا تاما. وكنتيجة لذلك فإننا لن نستخدم رمز الدالة للدلالة على المتتابعة وندل على المتتابعة بصورها. فعند كتابتنا $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نقصد المتتابعة f بحيث أن $f(n) = a_n, \quad \forall n \geq 1$. بالمثل ، إذا كانت $f(n) = a_n$ لكل $n \geq m$ فإننا نكتب $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ للدلالة على المتتابعة.

إن المتتابعة $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ مقرونة بالأعداد الصحيحة $1,2,3,\ldots$ فإننا نسمي a_1 الحد الأول و a_2 الحد الثاني و a_n الحد النوني.

مثال1

أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

الحل:

$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{8},\ a_4 = \frac{1}{16},\ a_5 = \frac{1}{32}$.

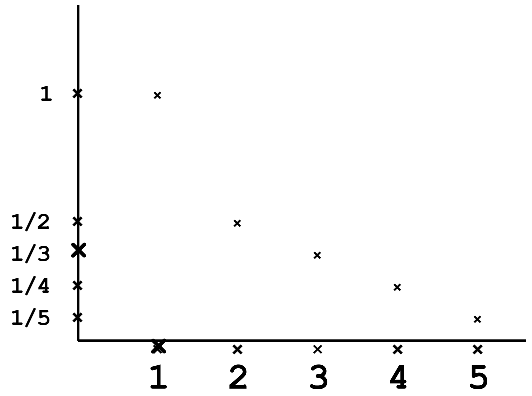
بعض المتتابعات تعطى بما يسمى بالصيغ الاختزالية، أي تعطى قيمة للحد الأول a_1 ، مع قاعدة نحصل منها على الحد a_{n+1} من الحد a_n الذي يسبقه مباشرة في الترتيب. يقال لمثل هذه المتتابعات أنها معرفة اختزالياً.

مثال2

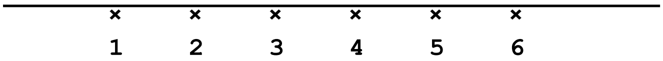
إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة فيها $a_1 = 1$ ، و $a_n = 3a_{n-1} - 1$ لكل $n \geq 1$. أوجد a_2, a_3, a_4.

الحل:

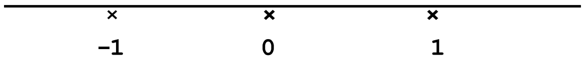
بوضع $n = 2$ في الصيغ الاختزالية $a_n = 3a_{n-1} - 1$ نحصل على $a_2 = 3a_1 - 1$ وبالتعويض بقيمة a_1 نحصل $a_2 = 2$ بالمثل $a_3 = 5$ و $a_4 = 9$.



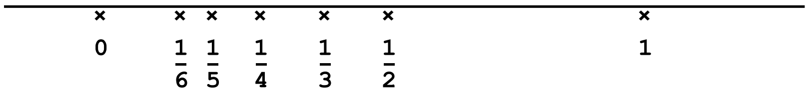
إن التمثيل الأكثر ملائمة هو أن تمثل المتتابعة على خط الأعداد الحقيقية. هذا النوع من التمثيل يوضح لنا إلى أين "تسعى" المتتابعة. فالمتتابعة $\left\{n\right\}_{n=1}^{\infty}$ "تسعى" إلى مالانهاية، والمتتابعة $\left\{(-1)^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ تتذبذب بين -1 و 1 ، بينما المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ " تقترب" من الصفر.



$$\left\{n\right\}_{n=1}^{\infty}$$



$$\left\{(-1)^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$



$$\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

المتتابعات المتقاربة Convergent Sequences

تعريف1

يقال أن المتتابعة $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وتتقارب من العدد الحقيقي L، إذا كان لأي فترة مفتوحة مركزها L ونصف قطرها ε ،حيث $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد N بحيث أن $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ لكل $n > N$. أي أن جميع حدود المتتابعة محتواة في الفترة باستثناء عدد منته من حدودها.

تعريف2

يقال أن نهاية المتتابعة $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ هو العدد الحقيقي L ، إذا وجد لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$.عدد N بحيث أن $|a_n - L| < \varepsilon$ لكل $n > N$ ، ونكتب هذا $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

إذا وجد العدد L فإنه يقال أن المتتابعة $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة (أو أنها تتقارب من العدد L)، وإذا لم يوجد العدد L فإنه يقال أن المتتابعة متباعدة.

مثال3

باستخدام تعريف النهاية ، اثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

الحل:

سنثبت أنه لأي $0 < \varepsilon$ يوجد عدد N بحيث لكل $n > N$ فإن $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ ، لأي $0 < \varepsilon$.

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n-2n-1}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{-1}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon$$

وبالتالي فإن $\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$

أي أن $\frac{1}{2n+1} < 2\varepsilon$ وهذا يؤدي إلى أن $n > \frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon} - 1)$

لنأخذ N بحيث أن $N \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon} - 1)$ ، ومنه لكل $n > N$ فإن $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

أي أن $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$.

مثال4

اثبت أن المتتابعة $\left\{ (-1)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة.

الحل:

نفرض أن المتتابعة تتقارب من L ، إذا كان $L \geq 0$ فإن $|-1-L| \geq 1$ ، وإذا كان $L \leq 0$ فإن $|1-L| \geq 1$ ، ومنه لأي $0 < \varepsilon \leq 1$ لا يوجد L بحيث $|a_n - L| < \varepsilon$ لكل $n > N$ ، أي المتتابعة متباعدة.

<u>مبرهنة1</u>

إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، فإن نهايتها وحيدة.

<u>مبرهنة2</u>

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة، وليكن L عددا حقيقيا و f دالة معرفة على الفترة $[1,\infty)$،حيث $f(n) = a_n$ لكل $n \geq 1$.

i) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ فإن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.

ii) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$) فإن المتتابعة متباعدة و $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ (أو $\lim_{n\to\infty} f(n) = -\infty$). أي $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(n)$.

مثال5

حدد ما إذا كانت المتتابعة $\left\{ n \sin\frac{\pi}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة أم متباعدة.

الحل:

ضع $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ لكل $x\geq 1$، بالتالي فإن $f(n)=n\sin\frac{\pi}{n}$ لكل $n\geq 1$. وبما أن

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to\infty}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi$$

فإن $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$.أي أن المتتابعة متقاربة.

مثال6

اثبت أن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

الحل:

ضع $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ لكل $x\geq 1$، ومنه فإن $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ لكل $n\geq 1$.

بأخذ لوغاريتم الطرفين للعلاقة نحصل على $\ln f(x)=x\ln\ (1+\frac{1}{x})$

ومنه فإن $\lim_{x\to\infty} x\ln\ (1+\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ (1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

بتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ (1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\ (-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$

وبالتالي فإن $\lim_{x\to\infty} f(x)=e$ ، ومنه نجد أن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

مثال7

احسب $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

الحل:

ضع $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ لكل $x\geq 1$،ومنه فإن $f(n)=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ لكل $n\geq 1$. لإيجاد النهاية نضرب بالمرافق كما يلي

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=0$$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$.

مبرهنة3

إذا كان r عددا حقيقيا، فإن المتتابعة $\left\{r^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لكل r حيث أن $|r|<1$ و $r=1$ أي أن

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 1 & ; \ r=1 \\ 0 & ; \ |r|<1 \end{cases}$$

ومتباعدة لكل r حيث أن $|r|>1$ و $r=-1$ كما أن $\lim_{n\to\infty}\left|r^n\right|=\infty$.

المتتابعة $\left\{r^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ تسمى **المتتابعة الهندسية** ، ويعود ذلك لكون r^n هو الوسط الهندسي للعددين r^{n-1} و r^{n+1} .

مثال8

حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة وأيها متباعدة

(i) $\left\{(1.05)^{n+1}\right\}$ (ii) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$.

الحل:

(i) بما أن $|r|=1.05>1$، فمن نظرية نستنتج كذلك أن المتتابعة متباعدة.

(ii) بما أن $|r|=\frac{1}{2}<1$، فمن نظرية نستنتج أن المتتابعة متقاربة.

خواص التقارب للمتتابعات

مبرهنة4

(ا) المتتابعة الثابتة $\left\{c\right\}_{n=1}^{\infty}$، لها النهاية c .

(ب) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$.

(ج) $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.

(د) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$.

(هـ) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ ، شريطة أن $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ و $b_n \neq 0$ لكل n.

مثال9

احسب نهاية المتتابعة $\left\{\frac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

الحل:

لإيجاد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ، حيث $a_n=\frac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}$، نقسم بسط ومقام a_n على n^2 ونستخدم المبرهنة لنحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{5+\frac{4}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}$$

$$=\frac{3-0-0}{5+0}=\frac{3}{5}$$

مبرهنة5

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة. إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

مثال10

إذا كان $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ، فاثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

الحل:

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

فمن المبرهنة ، يقتضي أن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

ملاحظة: إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$ ، فإن المبرهنة قد لا تكون صحيحة. فمثلا نهاية المتتابعة $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ غير موجودة، بينما $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$.

مبرهنة 6 (نظرية الحصر)

إذا كانت $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ متتابعات وكانت $b_n\le c_n\le a_n$ لكل n وإذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$.

مثال11

اثبت أن المتتابعة $\left\{\frac{\sin n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

نعلم أن $1 \le |\sin\ n| \le 0$وحيث أن مضروب n أكبر من الصفر، فإن بالقسمة على $n!$ نجد أن

$$0 \le \left|\frac{\sin\ n}{n!}\right| \le \frac{1}{n!}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.فإنه من المبرهنة $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\ n}{n!}\right| = 0$ ، ونجد أن $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\ n}{n!} = 0$. أي أن المتتابعة متقاربة ونهايتها الصفر.

المتتابعات المحدودة والمضطردة

تعريف3

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة (Bounded) ، إذا وجد عدد حقيقي M موجب بحيث أن $|a_n| \le M$ لكل $n \ge 1$، وفيما سوى ذلك، يقال أن المتتابعة غير محدودة (Unbounded).

مثال12

اثبت أن المتتابعتين (i) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ii) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودتان.

الحل:

(i) بما أن $n < n+1$ لكل $n \ge 1$ ، فإن $\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$. وحينئذ $\left|\frac{n}{n+1}\right| < M$ لأي عدد حقيقي موجب $M \ge 1$. أي أن المتتابعة محدودة.

(ii) $|(-1)^n| = 1$، ومنه $\left|(-1)^n\right| \le M$ لأي عدد حقيقي موجب $M \ge 1$. أي أن المتتابعة محدودة.

مبرهنة 7

(ا) إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متقاربة، فإنها محدودة.

(ب) إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة غير محدودة، فإنها متباعدة.

تعريف4

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

(i) متزايدة (Increasing) إذا كان $a_n \le a_{n+1}$ لكل $n \ge 1$.

(ii) متناقصة (Decreasing) إذا كان $a_n \ge a_{n+1}$ لكل $n \ge 1$.

ويقال أن المتتابعة مضطردة، إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

مثال13

اثبت أن المتتابعة $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_{n=3}^{\infty}$ متزايدة.

الحل:

نعرف $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ لكل $x\geq 3$، ومنه فإن $f(n)=1-\dfrac{1}{n}$ لكل $n\geq 3$. نجد المشتقة الأولى $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ، وبما أن $x^2>0$ و $x\geq 3$ ، فإن $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$. أي أن f دالة متزايدة. وهذا يقتضي أن المتتابعة متزايدة.

تعريف5

لتكن A مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

(ا) يقال أن المجموعة A محدودة من أعلى (Bounded above) إذا وجد عدد حقيقي M بحيث أن $x\leq M$ لكل x في A. يسمى أي عدد M حد علوي (Upper bound) للمجموعة A .

(ب) يقال أن المجموعة A محدودة من أسفل (Bounded below) إذا وجد عدد حقيقي m بحيث أن $x\geq m$ لكل x في A يسمى أي عدد m حد سفلي (Lower bound) للمجموعة A .

(ج) يقال أن المجموعة A محدودة (Bounded) إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل.

مبرهنة8

إذا كانت المتتابعة محدودة ومضطردة فإنها متقاربة.

مثال14

ليكن

$$a_1=\sqrt{2}\text{،}\ a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\text{،}\ a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\text{،}\cdots$$

وبشكل عام

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

(ا) اثبت أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة محدودة ومتزايدة.

(ب) اثبت أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب من عدد r .

(ج) استخدم فرع (ب) مع كون $a_{n+1}^2=2+a_n$ لإثبات أن $r=2$

الحل:

(ا) لإثبات أنها محدودة نلاحظ من تعريف المتتابعة أن $a_n\leq 2$ ولإثبات ذلك نستخدم الاستقراء الرياضي:

عندما $n=1$ فإن $a_1=\sqrt{2}<2$، وعندما $n=2$ فإن $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$. نفرض أنها صحيحة عندما $n=k-1$ ونثبت أنها صحيحة عندما $n=k$. أي نفرض أن $a_{k-1}\leq 2$. بما أن

$$a_k=\sqrt{2+a_{k-1}}$$

فإن $a_k{}^2=2+a_{k-1}\leq 4$ لكن $a_k>0$ لذلك $a_k\leq 2$.

نثبت الآن أن المتتابعة متزايدة. بما أن $a_n\leq 2$ فإن $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\geq a_n$ إذن المتتابعة متزايدة.

(ب) من (ا) وجدنا أن المتتابعة محدودة من أعلى، بالتالي فإن لها أصغر حد علوي وليكن r . ووفقا للمبرهنة فإن المتتابعة تتقارب من r.

(جـ) من المبرهنة $\lim_{n\to\infty} 2 + a_n = 2 + r$ (1)

ومن فرع (د) من نفس المبرهنة لدينا

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = r^2 \qquad (2)$$

من العلاقة $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$ ومن (1) وكذلك (2) نحصل على

$$r^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} 2 + a_n = 2 + r$$

أي أن $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$ ومنه فإن، $r = -1$ أو $r = 2$ ، وبما أن $r > 0$. لذلك فإن $r = 2$.

المتسلسلات غير المنتهية Infinite Series

تعريف1

لتكن $\{a_n\}_1^\infty$ متتابعة. يسمى التركيب $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$ (*)

متسلسلة غير منتهية (أو متسلسلة)، وباستخدام رمز المجموع نكتب (*) على الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ أو } \sum a_n$$

كل عدد a_k يسمى حدا للمتسلسلة، كما يسمى a_n الحد النوني أو الحد العام للمتسلسلة.

نقدم الآن نوعا خاصا من المتتابعات التي نحصل عليها باستخدام حدود المتسلسلة. من المتتابعة

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

نكون متتابعة جديدة $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ وذلك بجمع العناصر المتعاقبة للمتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^\infty$:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ التي حصلنا عليها بهذه الطريقة تسمى **متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة.**

تعريف2

(i) نعرف المجموع الجزئي النوني s_n للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنه $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

(ii) نعرف متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنها المتتابعة $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$

ملاحظة: من التعريف $s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}$

ومنه $s_n = s_{n-1} + a_n$.

مثال1

أوجد المتسلسلة التي متتابعة المجاميع الجزئية لها هي $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

الحل:

بما أن $s_1 = \frac{1}{2}$ فإن $a_1 = \frac{1}{2}$. إذا كان $n > 1$ فإن

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n}$$

كذلك فإن المتسلسلة هي: $\frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

مثال2

من المتتابعة $\left\{\frac{1}{2^{\,n-1}}\right\}_1^{\infty}$ كون متتابعة المجاميع الجزئية ثم اكتب المتسلسلة.

الحل:

$$s_1 = 1\ s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{3}$$
$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$
$$\vdots$$
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

وهي متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\,n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$

مثال3

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة

(ا) أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(**ب**) أوجد صيغة جبرية للحد النوني s_n بدلالة n .

الحل:

(ا) $s_1 = a_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$, $s_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$,

$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$, $s_4 = s_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$.

(**ب**) بما أن $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ، فإنه باستخدام الكسور الجزئية نحصل على: $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

وبالتالي فإن

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}\ ،\ a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ ،\ a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\ ،\ a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ومن هنا نجد أن

$$s_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

بعد إزالة الأقواس والاختصار نحصل على: $s_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

ملاحظة: الطريقة التي اتبعناها في المثال السابق تطبق فقط للحالات الخاصة. وبصفة عامة فإنه يتعذر إيجاد صيغة جبرية عامة للحد النوني s_n . إذا كان للمتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نهاية فإنها تسمى مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

مثال4

اثبت أن المتسلسلة التالية متقاربة وأن مجموعها 2 .

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

الحل:

إن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة هي $\{s_n\}$ ، حيث

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$s_n=1+\frac{1}{2}\left(s_n-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1+\frac{s_n}{2}-\frac{1}{2^n}$$

$$s_n=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ ، فإن $\lim_{n\to\infty}s_n=2$. أي أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها 2 .

مثال5

اثبت أن المتسلسلة التالية متباعدة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

الحل:

نعيد كتابة المتسلسلة بتجميع حدودها كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16})+(\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32})+\cdots$$

لاحظ أن عدد حدود كل قوس ضعف عدد حدود القوس الذي يسبقه مباشرة. بما أن مجموع حدود كل قوس أكبر من $\frac{1}{2}$ ، فإننا نحصل على المتراجحات التالية:

$$s_2=s_{2^1}=1+\frac{1}{2}>2(\frac{1}{2})$$

$$s_4=s_{2^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}>3(\frac{1}{2})$$

$$s_8=s_{2^3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}>4(\frac{1}{2})$$

وباستخدام الاستقراء الرياضي، يمكن إثبات أن: $s_{2^k} > (1+k)\frac{1}{2}$ لكل عدد صحيح موجب k .

وهذا يقتضي أن: $\lim_{n\to\infty} s_{2^k} > \lim_{n\to\infty}(1+k)\frac{1}{2}$ لكن $\lim_{n\to\infty}(1+k)\frac{1}{2} = \infty$ ولذلك $\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty$

أي أن $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ ولهذا فالمتتابعة $\{s_n\}$ متباعدة، وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

تسمى هذه المتسلسلة **بالمتسلسلة التوافقية** (Harmonic series).

المتسلسلات الهندسية (Geometric series)

المتسلسلة الهندسية هي المتسلسلة التي تأخذ الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

حيث أن a و r أعداد حقيقية و $a \neq 0$. (اكتسبت المتسلسلات الهندسية اسمها من كون ar^n المتوسط الهندسي للعددين (ar^{n-1} و ar^{n+1}). المتسلسلة في مثال4 متسلسلة هندسية، حيث $a = 1 , r = \frac{1}{2}$.

تقارب المتسلسلات الهندسية يعتمد كليا على اختيار r كما سنرى في المبرهنة التالية:

مبرهنة1 (نظرية المتسلسلات الهندسية)

ليكن a و r عددين حقيقيين و $a \neq 0$. المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

متقاربة ومجموعها $\frac{a}{1-r}$ لكل r ، حيث$0 < |r| < 1$، ومتباعدة لكل r ، حيث$|r| \geq 1$.

مثال6

اثبت أن المتسلسلة التالية متقاربة وأوجد مجموعها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$$

الحل:

المتسلسلة هندسية حيث $r = \frac{1}{3} < 1$ و $a = 2$، من النظرية نستنتج أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S = \frac{2}{1-1/3} = 3$.

مبرهنة2 (اختبار للتباعد)

(ا) **إذا كانت المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **متقاربة ، فإن** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ب) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ **أو غير موجودة ، فإن المتسلسلة متباعدة.**

المتسلسلة	النهاية	الاستنتاج
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+5}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+5}=\frac{1}{3}\neq 0$	متباعدة، وفقا لمبرهنة2 اختبار التباعد.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$	لا نستطيع تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$	لا نستطيع تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}=\infty$	متباعدة، وفقا لمبرهنة 2اختبار التباعد.

تحصيل المتسلسلات (Combinations of series)

مبرهنة3

(أ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلتين متقاربتين مجموعهما T و R على الترتيب، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ متقاربة أيضا، كما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=T+R$$

(ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة متقاربة و c عددا حقيقيا ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ متقاربة، كما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n=cT$$

(ج) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ كما في (أ) ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-b_n\right)$ متقاربة وأن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=T-R$$

(د) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة متباعدة و c عددا حقيقيا ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ متباعدة.

مثال7

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)}\right)$ متقاربة، ثم احسب مجموعها.

الحل:

من مبرهنة المتسلسلات الهندسية فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n}=\frac{4(1/2)}{1-1/2}=4$

من المبرهنة 3 (ب) ومثال نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=3$

من المبرهنة (جـ) نحصل على $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)})=4-3=1$

مبرهنة4

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين تختلفان قي الحدود الأولى التي عددها m حدا فقط (أي أن $a_k = b_k$ لكل $k > m$) فإما أن المتسلسلتين متقاربتان أو أنهما متباعدتان.

مثال8

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}$ متقاربة أو متباعدة.

الحل:

المتسلسلة المعطاة هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}=0+0+0+0+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+4}+\cdots$

وبمقارنتها بالمتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

نلاحظ أن المتسلسلتين تختلفان في الحدود الأربعة الأولى. من المبرهنة وبما أن المتسلسلة التوافقية متباعدة، فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

مبرهنة5

لكل عدد صحيح موجب k فإن المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \quad \text{و} \quad \sum_{n=k+1}^{\infty}a_n=a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n+\cdots$$

تكونان متقاربتين معا أو متباعدتين معا. وأيضا إذا كانت المتسلسلتان متقاربتين فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_k+\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n$$

مثال9

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة وأوجد مجموعها.

الحل:

يمكن الحصول على المتسلسلة المعطاة من المتسلسلة المتداخلة في مثال (5) وذلك بحذف الحدود الثلاث الأولى. بما أن المتسلسلة المتداخلة متقاربة ومجموعها 1، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12})=\tfrac{1}{4}.$$

مبرهنة6

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ متباعدة.

مثال10

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n})$ متقاربة أو متباعدة.

الحل:

إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ متباعدة كما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ هندسية فيها $|r| = \frac{1}{4} < 1$ فهي متقاربة. من المبرهنة 6 نستنتج أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

ملاحظة: إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدتين ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ قد تكون متقاربة أو غير متقاربة. فمثلا إذ كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ فإن مجموعهما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ وهي متباعدة. لكن إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ فإن مجموعهما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ وهي متقاربة.

المتسلسلات ذات الحدود الموجبة (اختبار التكامل واختبار المقارنة)

Positive Term Series (Integral and Comparison tests)

تقتصر دراستنا على المتسلسلات الموجبة (Positive series) أي المتسلسلات التي كل حد من حدودها عدد حقيقي موجب، أي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحيث أن $a_n > 0$.

مبرهنة7

المتسلسلة الموجبة متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية محدودة من أعلى.

مبرهنة 8 (اختبار التكامل)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة، ولتكن f دالة متصلة ومتناقصة معرفة على الفترة $[1, \infty)$ بحيث $f(n) = a_n$ لكل $n \geq 1$

عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان التكامل المعتل $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ متقاربا .

تعريف3

متسلسلة $- p$ ، هي المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

حيث أن p عدد حقيقي.

مبرهنة9

متسلسلة $p-$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

(ا) متقاربة لكل $p > 1$

(ب) متباعدة لكل $p \le 1$

مثال11

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ متباعدة .

الحل:

بما أن المتسلسلة موجبة ، لذلك نستخدم اختبار التكامل. نعرف

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad \text{لكل} \quad x \ge 2$$

بما أن x و $\ln x$ متصلتان و $f'(x) = \frac{-(1+\ln x)}{(x \ln x)^2} < 0$ فإن الدالة متصلة ومتناقصة على الفترة $[2,\infty)$ وأيضا $f(n) = \frac{1}{n \ln n}$ لكل $n \ge 2$ ،لذلك نستطيع استخدام اختبار التكامل

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^{t} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} [\ln (\ln x) - \ln (\ln 2)] = \infty$$

أي أن التكامل المعتل متباعد وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

مبرهنة10 (اختبار المقارنة Comparison test)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **و** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **متسلسلتين موجبتين**

(أ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **متقاربة و** $a_n \le b_n$ **لكل** $n \ge 1$ ، **فإن** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **متقاربة كما أن** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **متباعدة و** $b_n \le a_n$ **لكل** $n \ge 1$ ، **فإن** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **متباعدة.**

مثال12

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ متقاربة.

الحل:

نعلم من نظرية المتسلسلات الهندسية أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ متقاربة. بما أن

$$\frac{1}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

لذلك نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ متقاربة.

مثال13

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

الحل:

لاحظ أن $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ لكل $n \geq 1$ وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متسلسلة – p حيث $p = \frac{1}{2}$ ، لذلك فهي متباعدة. ومن ثم فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ أيضا متباعدة. نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ متباعدة.

مثال14

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\sin^2 n}{n!}$.

الحل:

نعلم أن $0 \leq \sin^2 n \leq 1$ لكل $n \geq 0$ وبالتالي فإن $\frac{3\sin^2 n}{n!} \leq \frac{3}{n!}$ لكل $n \geq 0$

لكن $n! \geq n^2$ لكل $n \geq 4$ ، ولذلك $\frac{3\sin^2 n}{n!} \leq \frac{3}{n!} \leq \frac{3}{n^2}$ لكل $n \geq 4$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متسلسلة – p حيث $p = 2$ ، لذلك فهي متقاربة ، ومنه فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ وبالتالي فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ أيضا متقاربة. من اختبار المقارنة نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\sin^2 n}{n!}$ متقاربة.

مثال15

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^3+1}$.

الحل:

لاحظ أن $n^3+1>n^3$ و $\ln n<n$ لكل $n\geq 2$، بالتالي فإن $\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^3+1}<\frac{n\sqrt{n}}{n^3}=\frac{1}{n^{3/2}}$، وبما أن

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ هي متسلسلة – p حيث $p=\frac{3}{2}$ فهي متقاربة. بالتالي المتسلسلة قيد الدراسة متقاربة.

مبرهنة11 (اختبار نهاية المقارنة Limit comparison test)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلتين موجبتين. عندئذ

(أ) **إذا كانت** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L>0$ **فإما أن المتسلسلتين كلاهما متقاربتان أو كلاهما متباعدتان.**

(ب) **إذا كانت** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ **وكانت المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ **متقاربة فإن المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **متقاربة.**

(ج) **إذا كانت** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ **وكانت المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ **متباعدة فإن المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **متباعدة.**

توضيح

a_n	حذف الحدود ذات الأس الأصغر	خيار b_n
$\frac{5n+2}{3n^4+n^3-1}$	$\frac{5n}{3n^4}=\frac{5}{3n^3}$	$\frac{1}{n^3}$
$\frac{9}{\sqrt{5n^3+n^2+3}}$	$\frac{9}{\sqrt{5n^3}}=\frac{9}{\sqrt{5}n^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{1}{n^{1/3}}$
$\frac{\sqrt[3]{n^2+5}}{7n^2+3n-1}$	$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{7n^2}=\frac{n^{3/2}}{7n^2}=\frac{1}{7n^{4/3}}$	$\frac{1}{n^{4/3}}$

مثال16

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3-2}{2^n(3n^3-5n+6)}$.

الحل:

بحذف جميع الحدود من البسط والمقام باستثناء الحدود ذات الأس الأكبر، نحصل على $\frac{5n^3}{2^n(3n^3)}=\frac{5}{32^n}$

نختار $b_n = \frac{1}{2^n}$. بتطبيق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-2}{2^n(3n^3-5n+6)} \times \frac{2^n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-2}{3n^3-5n+6} = \frac{5}{3} > 0$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ هي متسلسلة هندسية، من نظرية المتسلسلات الهندسية فهي متقاربة (حيث $r = \frac{1}{2} < 1$). ومنه فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

مثال17

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}}$.

الحل:

نكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ كما فعلنا في المثال السابق فنحصل على $\frac{1}{\sqrt[3]{8n^2}} = \frac{1}{2n^{2/3}}$

نختار $b_n = \frac{1}{n^{2/3}}$، بتطبيق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}} \times \frac{n^{2/3}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}}{\sqrt[3]{8n^2-5n}} = \frac{1}{2} > 0$$

لكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ هي متسلسلة - p حيث $p = \frac{2}{3} < 1$ وبالتالي فهي متباعدة، ومنه فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

اختبار النسبة Ratio test

مبرهنة 12 (اختبار النسبة)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة ، ولنفرض أن $a_n \neq 0$ لكل n وأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(ا) **إذا كان $0 \leq L < 1$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.**

(ب) **إذا كان $L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.**

(ج) **إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة ام متباعدة. وفي هذه الحالة لا بد من استخدام اختبار آخر.**

ملاحظة: إن اختبار النسبة هو أكثر الاختبارين استخداما .

مثال18

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

الحل:

بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{5^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$$

بالتالي المتسلسلة متقاربة.

مثال19

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}$.

الحل:

بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{5^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{(n+1)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2+2n+1} = 5$$

بما أن $5>1$، فإن المتسلسلة متباعدة.

مثال20

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

الحل:

نطبق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

وبما أن $1 < \frac{1}{e}$ ، فإن المتسلسلة متقاربة.

اختبار الجذر Root test

يستخدم هذا الاختبار بصفة خاصة عندما يكون a_n مرفوع للأس n .

مبرهنة 13 (اختبار الجذر)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة ، نفرض أن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

(ا) إذا كان $0 \le L < 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) إذا كان $L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

(ج) إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة. وفي هذه الحالة لا بد من استخدام اختبار آخر.

مثال21

اختبر تباعد أو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n$.

الحل:

نستخدم في هذا المثال اختبار الجذر، لأن a_n مرفوع للأس n ، فنحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{1000} = \infty$$

وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

مثال22

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

الحل:

نستطيع تطبيق اختبار النسبة أو الجذر في هذا المثال. بتطبيق اختبار الجذر نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{2} = \frac{1}{2}$$

بما أن $1 < \frac{1}{2}$ فإن المتسلسلة متقاربة.

مثال23

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$.

الحل:

يتضمن a_n في تعريفه 2^{n^2} ، وبالرغم من ذلك فإن اختبار النسبة أفضل هنا من اختبار الجذر. بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}} \times \frac{2^{n^2}}{n!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0$$

بالتالي المتسلسلة متقاربة.

المتسلسلات المترددة والتقارب المطلق

المتسلسلات المترددة (Alternating series)

المتسلسلة المترددة هي المتسلسلة التي تتعاقب حدودها بين الموجب والسالب. أي المتسلسلة التي من الصيغة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$ أو

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$ حيث $a_n > 0$ لكل $n \geq 1$.

مبرهنة 14 (اختبار المتسلسلات المترددة Alternating series test)

المتسلسلة المترددة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

متقاربة إذا تحقق الشرطان التاليان:

(ا) **المتتابعة** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **تناقصية ، أي** $a_{n+1} \leq a_n$ **لكل** n

(ب) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

مثال24

اثبت أن المتسلسلة المترددة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ متقاربة.

الحل:

نضع $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$. لتطبيق اختبار المتسلسلات المترددة علينا إثبات

(ا) $a_{n+1} \le a_n$ لكل n

(ب) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

نستخدم المشتقة للدالة $f(x) = \dfrac{1}{x}$. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$

أي أن الدالة f متناقصة ، ومنه فإن المتتابعة $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ متناقصة. لإثبات (ب) نلاحظ أن $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ، ومنه فإن المتسلسلة متقاربة.

مثال25

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(\ln n)^2}{n}$.

الحل:

المتسلسلة مترددة ، نطبق اختبار المتسلسلة المترددة.

(ا) نضع $a_n = f(n) = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$ ، وباستخدام المشتقة نحصل على

$$f'(x) = -\frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x[2 - \ln x]}{x^2}$$

لكن $\dfrac{\ln x}{x^2} > 0$ لكل $x \ge 2$ ، كذلك $2 - \ln x < 0$ لكل $x \ge 9$ ، ومنه فإن المتتابعة $\left\{(\ln n)^2/n\right\}_{n=9}^{\infty}$ متناقصة

(ب) باستخدام قاعدة لوبيتال مرتين نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

وبالتالي فالمتسلسلة متقاربة.

التقارب المطلق والتقارب الشرطي

مبرهنة15

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة .

مثال26

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^3}$.

الحل:

نعلم أن $-1 \le \sin n \le 1$ وبما أن $n^3 > 0$ لكل n و بحساب عدد قليل من حدود المتسلسلة نلاحظ أنها ليست موجبة ولا مترددة. لذلك لا يمكن تطبيق أيا من الاختبارات السابقة مباشرة. ولاختبار هذه المتسلسلة نختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin n / n^3 \right|$. بما أن $\left| \sin n / n^3 \right| \le \frac{1}{n^3}$ ، كذلك بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ متقاربة لأنها متسلسلة- p حيث $p = 3$ ، فمن اختبار المقارنة، نجد أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin n / n^3 \right|$ متقاربة، ومن المبرهنة فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

تعريف4 (التقارب المطلق والتقارب الشرطي)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة.

(ا) يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقاربا مطلقا (أو متقاربة مطلقا Converges absolutely)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة.

(ب) يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقاربا شرطيا (أو متقاربة شرطيا Converges conditionally)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة.

مثال27

حدد ما إذا كانت المتسلسلة التالية متقاربة مطلقا أو متقاربة شرطيا أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$$

الحل:

بتطبيق اختبار الجذر نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{(-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^2 (3^{1/n})}{n^2} = 0 < 1$$

من تعميم اختبار الجذر نستنتج أن المتسلسلة المعطاة متقاربة مطلقا.

مثال28

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$

متقاربة مطلقا لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتقاربة شرطيا عندما $x = -1$ ومتباعدة عندما $x = 1$ ولكل x ، حيث $|x| > 1$.

الحل:

إذا كان $x = 0$ فإن المتسلسلة متقاربة مطلقا. لنفرض أن $x \neq 0$ ، نطبق اختبار النسبة المعمم نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{x^n}\right|$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=|x|$$

لذلك فالمتسلسلة متقاربة مطلقا لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $|x| > 1$. بقي اختبار المتسلسلة عند $x = \pm 1$. نناقش الحالتين كل على انفراد.

1. عند $x = 1$ نحصل على المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة.

2. عند $x = -1$ نحصل على المتسلسلة المترددة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ وهي متقاربة شرطيا.

التقريب بكثيرات الحدود ونظرية تايلور Polynomial Approximation and Taylor Theorem

نعرف كثيرة الحدود من الدرجة (على الأكثر) n بالصيغة

$$(*)\quad P_n(x) = f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

تسمى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الدرجة n للدالة f بجوار العدد c . ويلاحظ أن P_n و f لهما نفس القيمة وكذلك المشتقات من الرتبة الأولى إلى الرتبة n عند c .

بوضع $c = 0$ في (*) نحصل على حالة خاصة لكثيرة حدود تايلور :

$$(**)\qquad P_n(x) = f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

وتسمى **كثيرة حدود ماكلورين**.

مثال1

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة n للدالة $f(x)=e^x$. وكذلك $P_n(1)$ ثم احسب $P_5(1)$.

الحل:

كي نتمكن من استخدام صيغة $P_n(x)$ نحسب $f^{(k)}(0)$ لأي عدد صحيح غير سالب k . ولكن لكل k فإن $f^{(k)}(x)=e^x$ ، ومنه فإن $f^{(k)}(0)=e^0=1$ ، وبالتالي

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

كنتيجة لذلك نجد أن $P_n(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}$

وعندما $n = 5$ نحصل على $P_5(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=\frac{163}{60}\approx 2.71667$

بما أن الهدف من إيجاد $P_n(x)$ هو الحصول على قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ ، فإن علينا التأكد إلى أي مدى تعتبر $P_5(1)$ تقريبا للقيمة $f(1)=e$. نعلم أن $e=2.71828$ (صحيحة لستة منازل عشرية) وحيث أن $P_5(1)\approx 2.71667$ ، فإن $P_5(1)$ تقريب للعدد e بخطأ مقداره 0.00161 .

مثال2

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة n . للدالة $f(x)=\ln(1+x)$. ثم احسب $P_6(1)$.

الحل:

نقوم أولا بحساب مشتقات الدالة $f(x)$ على النحو التالي:

$$f(x)=\ln(1+x) \qquad f(0)=0$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f^{(2)}(0)=-1$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{(-1)^2\,2!}{(1+x)^3} \qquad f^{(3)}(0)=2!$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{(-1)^3 3!}{(1+x)^4} \qquad f^{(4)}(0)=-(3!)$$

وبشكل عام ، لكل $k\geq 1$ فإن

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

وبالتالي نجد أن $P_n(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

ونستنتج من ذلك أن $P_6(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60}\approx 0.616667$

نتوقع أن تكون $P_n(x)$ تقريبا للدالة $f(x)$. بما أن $f(1)=\ln(2)$ تساوي 0.693147 (صحيحة لـ ستة منازل عشرية) وبما أن $P_6(1)\approx 0.616667$ ، فإن $P_6(1)$ تقريب للعدد $ln\,2$ بخطأ مقداره 0.07648 .

مثال3

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة n . للدالة $f(x)=\frac{1}{1-x}$. ثم احسب $P_n(2)$.

الحل:

مشتقات الدالة f هي

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f(0)=1$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{2!}{(1-x)^3} \qquad f^{(2)}(0)=2!$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{3!}{(1-x)^4} \qquad f^{(3)}(0)=3!$$

وبشكل عام ، لكل $k \geq 1$ فإن

$$f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad f^{(k)}(0)=k!$$

وبالتالي نجد أن $P_n(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$

وعلى وجه الخصوص فإن $P_n(2)=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n$.

لتحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود $P_n(x)$ تقريبا لدالة f مشتقاتها من رتب عليا موجودة عند c ، نعرف ما يسمى **باقي تايلور** R_n للدالة f بالصيغة

تعريف1

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$
$$=f(x)-\left[f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n\right]$$

إن قيمة $R_n(x)$ تساعدنا على تحديد مدى صحة اعتبار $P_n(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$ ، فكلما صغر $R_n(x)$ كلما أصبحت $P_n(x)$ قريبة من $f(x)$.

تزودنا المبرهنة التالية التي يمكن اعتبارها كتعميم لنظرية القيمة الوسطى بوسيلة لإيجاد $R_n(x)$ وبالتالي بمدى صحة استبدال $f(x)$ بكثيرة حدود تايلور .

مبرهنة1

إذا كانت f دالة بحيث أن f وجميع مشتقاتها من الرتبة n متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، وإذا كانت $f^{(n+1)}(x)$ موجودة لجميع x في الفترة المفتوحة (a,b)، فإنه يوجد عدد z_x في الفترة المفتوحة (a,b) بحيث إن

$$f(x)=f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (1)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (2)$$

تعرف المعادلة (1) بصيغة تايلور والمعادلة (2) بصيغة لاجرانج للباقي (Lagrange Remainder Formula).

بوضع $c=0$ في (2) نحصل على حالة خاصة لصيغة تايلور :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x)+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots \\ &\quad +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{n+1!}x^{n+1}\end{aligned}}$$

حيث z_x يقع بين 0 و x ، وتسمى **صيغة ماكلورين**.

متسلسلات القوى Power Series

تعريف2

ليكن x متغيرا. تسمى المتسلسلة من الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

متسلسلة قوى في x. حيث a_n عدد حقيقي لكل n.

مثال4

اثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ متقاربة فقط عندما $x=0$.

الحل:

إذا كان $x \neq 0$ ، فان

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

بالتالي ومن اختبار النسبة فان المتسلسلة متباعدة لكل $x \neq 0$.

مثال5

اثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل عدد حقيقي x.

الحل:

إذا كان $x \neq 0$ ، فان

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

وبالتالي ومن اختبار النسبة فإن المتسلسلة متقاربة لكل عدد x.

مثال6

حدد قيم x التي تكون عندها متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$ متقاربة.

الحل:

إذا كان $x \neq 0$ ، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{2^n x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{3}\frac{n}{(n+1)}x\right| = \frac{2}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}|x|$$

بالتالي من اختبار النسبة فإن المتسلسلة تكون متقاربة مطلقا عندما $\frac{2}{3}|x| < 1$، أو ما يكافئ ذلك عندما تكون $|x| < \frac{3}{2}$. كما تكون المتسلسلة متباعدة عندما تكون $\frac{2}{3}|x| > 1$، أو ما يكافئ ذلك عندما تكون $|x| > \frac{3}{2}$.

وعندما تكون $\frac{2}{3}|x| = 1$ (أي عندما تكون $x = \pm\frac{3}{2}$) فان اختبار النسبة يفشل. لذلك لا بد من اختبار المتسلسلة عند هاتين القيمتين بطريقة أخري.

عندما $x = \frac{3}{2}$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n3^n}\frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

فإن المتسلسلة متقاربة.

عندما $x = -\frac{3}{2}$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n3^n}\left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$

وهذه المتسلسلة متباعدة لأنها المتسلسلة التوافقية.

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متقاربة لكل $-\frac{3}{2} < x \le \frac{3}{2}$ ، ومتباعدة لكل $x > \frac{3}{2}$ أو $x \le -\frac{3}{2}$.

مبرهنة2

(ا) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة لعدد حقيقي $d \neq 0$ فإنها متقاربة مطلقا لكل $|x| < |d|$.

(ب) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متباعدة لعدد حقيقي $d \neq 0$ فإنها متباعدة لكل $|x| > |d|$.

مبرهنة 3

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى . عندئذ فإن واحدا فقط من الشروط التالية يتحقق:

ا. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة فقط عند $x = 0$.

ب. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة لكل $\mathbf{x}$.

ج. يوجد عدد $r > 0$ بحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة لكل x، حيث $|x| < r$ ومتباعدة لكل x، حيث $|x| > r$.

ملاحظة: يسمى العدد r في (**ج**) من النظرية **نصف قطر تقارب المتسلسلة** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. إذا حققت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ فرع (ا) فإننا نضع $r = 0$، وإذا حققت فرع (**ب**) فإننا نضع $r = \infty$. إذن لكل متسلسلة قوى نصف قطر تقارب r ، وهو على العموم عدد حقيقي غير سالب أو يساوي ∞. تسمى مجموعة قيم x والتي عندها $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة **فترة تقارب المتسلسلة** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. من الشروط (ا)-(**ج**) نستنتج أن فترة تقارب المتسلسلة تأخذ واحدا وواحدا فقط من الأشكال التالية:

$$[0,0],\ [-r,r],\ (-r,r],\ [-r,r),\ (-r,r),\ (-\infty,\infty)$$

مثال7

حدد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

الحل:

بوضع $x = -1$ نجد أن المتسلسلة هي $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/2}}$ ، وهي متقاربة من اختبار المتسلسلة المترددة.

عندما $x = 1$ تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ وهي متباعدة لأنها متسلسلة - p حيث $p = \frac{1}{2}$. بما أن المتسلسلة متقاربة عندما $x = -1$ ومتباعدة عندما $x = 1$، فإن النظرية تضمن أن نصف قطر التقارب $r = 1$ وبالتالي فترة التقارب $[-1,1)$.

تعريف3

ليكن c عددا حقيقيا و x متغيرا . نعرف متسلسلة القوى في $x-c$ ، بأنها المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

حيث أن المعاملات a_n ، $n=0,1,2,\dots$ أعداد حقيقية .

مثال8

أوجد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}(x-5)^n$.

الحل:

عندما $x \neq 5$ نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{(x-5)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}(x-5)\right| = |x-5|$$

من اختبار النسبة المعمم ، المتسلسلة متقاربة عندما تكون $|x-5|<1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $|x-5|>1$.
أي أنها متقاربة لكل x في الفترة $(4,6)$ ومتباعدة لكل x ، حيث $x<4$ أو $x>6$. نختبر النهايتين كل على انفراد. عندما $x=4$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة، وعندما $x=6$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ وهي متقاربة. اذن فترة التقارب هي $(4,6]$ كما أن نصف قطر التقارب $r=1$.

تمثيل الدوال بمتسلسلات القوى Power Series Representations of Functions

تحدد متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دالة f نطاقها فترة تقارب المتسلسلة . لكل x في فترة تقارب المتسلسلة نعرف الدالة $f(x)$ بأنها $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$
ويقال في هذه الحالة أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تمثل الدالة f ، أو أن الدالة f مثلت بمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

مثال1

أوجد الدالة الممثلة بمتسلسلة القوى : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$

الحل:

إذا كانت $|x|<1$ ، فمن نظرية المتسلسلة الهندسية المعطاة متقاربة ومجموعها

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-x}$$

وبالتالي
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots = \frac{1}{1-x} \qquad (1)$$

أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ تمثل الدالة $f(x)=\frac{1}{1-x}$ في الفترة $(-1,1)$

يمكن استخدام متسلسلة القوى في (1) للحصول على متسلسلات قوى يمكن تحديد مجموعها. بوضع $-x$ بدلا من x في (1) نحصل على

$$|x|<1,\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (2)$$

بوضع x^2 بدلا من x في (1) نحصل على

$$|x|<1\ ,\ \frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} \qquad (3)$$

إذا وضعنا $-x^2$ عوضا عن x ، ينتج

$$|x|<1\ ,\ \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad (4)$$

مثال2

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $f(x)=\frac{5}{3-7x}$.

الحل:

نكتب $f(x)$ على الصيغة : $f(x)=\frac{5}{3-7x}=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{1-(7/3)x}\right)$

نضع $(7/3)x$ بدلا من x في (1) نحصل على

$$f(x)=\frac{5}{3-7x}=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{1-(7/3)x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3}\left((7/3)x\right)^n \text{ ، } |x|<3/7 .$$

مبرهنة1 (نظرية الاشتقاق لمتسلسلات القوى)

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ متسلسلة قوى ذات نصف قطر تقارب $r>0$. ولتكن $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ لكل x في فترة تقارب المتسلسلة . فإن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_n x^n)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

لكل $|x|<r$. وأكثر من ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$ لها نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

مثال3

اثبت أن $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

الحل:

نعلم أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل x . من نظرية الاشتقاق فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}$ متقاربة لكل x وأن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

نعرف f بأنها $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ لكل x وبما أن $f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!}=1$. نستنتج أن $f(x)=e^x$ لكل x . ومنه

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (*)$$

وهذا يعني أننا أوجدنا صيغة للدالة e^x كمتسلسلة قوى ، كما نوهنا في بداية هذا الفصل.

لاحظ أن (*) تمكننا من التعبير عن العدد e كمجموع لمتسلسلة قوى متقاربة ذات حدود موجبة. أي $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$:

أيضا يمكننا استخدام (*) للحصول على تمثيل لبعض الدوال بمتسلسلات قوى ، نورد بعضا منها

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

بجمع الحدود المتناظرة للمتسلسلتين e^x و e^{-x} نحصل على

$$e^x+e^{-x}=2+2\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^4}{4!}+\cdots+2\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots$$

ومنه نحصل على متسلسلة قوى تمثل الدالة $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^x)$، أي

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

أيضا نستطيع أن نجد متسلسلة قوى تمثل الدالة $\sinh x$ إما باستخدام الصيغة $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$، أو باشتقاق حدود متسلسلة $\cosh x$. فنجد أن: $\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

مثال4

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $f(x)=xe^{-2x}$.

الحل:

نضع $-2x$ بدلا من x في (*) نحصل على: $e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^n}{n!}$

بضرب الطرفين بـ x نحصل على : $xe^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$

مبرهنة 2 (التكامل لمتسلسلات القوى)

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r > 0$. ولتكن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

لكل x في فترة تقارب المتسلسلة. فإن

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

لكل $-r < x < r$. وأكثر من ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ لها نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

تعتبر هذه النظرية أداة قيمة لأنها تمكننا من تمثيل العديد من الدوال بمتسلسلات قوى.

مثال5

اثبت أن

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

لكل $-1 < x < 1$.

الحل:

نعلم أن $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$

إذا كانت $|t| < 1$ فإن $|t^2| < 1$. وبالتالي يمكننا التعويض بـ t^2 بدلا من t نحصل على

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad \text{لكل } |t| < 1.$$

من نظرية التكامل للمتسلسلات فإن

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{لكل } |x| < 1.$$

يمكن إثبات أن هذه المتسلسلة متقاربة أيضا عندما $x=\pm 1$.

بوضع $x=1$ نحصل على الصيغة التالية لقيمة $\pi/4$

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

مثال6

اثبت أن

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

لكل x ، حيث $|x|<1$.

الحل:

إذا كانت $|x|<1$ فإن

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n]\,dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

لكل x ، حيث $|x|<1$.

مثال7

لتكن g دالة معرفة

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

أوجد متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ التي تمثل الدالة $\int_0^x g(t)\,dt$.

الحل:

نعلم أن $e^t-1=t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots$ فإن $\frac{e^t-1}{t}=1+\frac{t}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{n!}+\cdots$

بما أن متسلسلة القوى هذه لها القيمة 1 عند $t=0$ وبما أن $g(0)=1$ فإن

$$g(t)=1+\frac{t}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{n!}+\cdots$$

لكل t. بتطبيق نظرية التكامل للمتسلسلات، ينتج

$$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n!)}$$

$$= x + \frac{x^2}{2(2!)} + \frac{x^3}{3(3!)} + \cdots + \frac{x^n}{n(n!)} + \cdots$$

وبالتالي فإن متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $\int_0^x g(t)\,dt$ هي $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، حيث $a_n = \frac{1}{n(n!)}$.

متسلسلة تايلور Taylor Series

لقد بينا أن

$$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{لكل} \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{لكل} \quad -1 < x < 1 \qquad (2)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{لكل} \quad -1 < x < 1 \qquad (3)$$

في الحالات الثلاث، نقول أن لدينا متسلسلة قوى تمثل الدالة المعطاة. بشكل أعم إذا كانت f دالة، و I فترة مفتوحة تحتوي 0 ، وكانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لكل x في I

مبرهنة1

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r > 0$. ولتكن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (\mathbf{1})$$

لكل $-r < x < r$. فإن f لها مشتقات من جميع الرتب على الفترة $(-r, r)$، و

$$f^{(n)}(0) = n! a_n \qquad (\mathbf{2})$$

لكل $n \geq 0$. ونتيجة لذلك

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (\mathbf{3})$$

مبرهنة 2

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r > 0$. ولتكن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \qquad (\mathbf{4})$$

لكل $c - r < x < c + r$. فإن f لها مشتقات من جميع الرتب على الفترة $(c-r, c+r)$، و

$$f^{(n)}(c) = n! a_n \qquad (\mathbf{5})$$

لكل $n \geq 0$. ونتيجة لذلك

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad (6)$$

تعريف1:

إذا كانت f دالة لها مشتقات من جميع الرتب عند c. فإن متسلسلة تايلور للدالة f عند c هي متسلسلة القوى

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

لاحظ أنه عندما $c=0$ نحصل على **متسلسلة ماكلورين** كحالة خاصة لمتسلسلة تايلور.

مثال1

لتكن f دالة معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & ; \ x\neq 0 \\ 0 & ; \ x=0 \end{cases}$$

أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة f، واثبت أنها متقاربة لجميع قيم x ولكنها تمثل الدالة فقط عند $x=0$.

الحل:

لإيجاد المشتقة نستخدم تعريف المشتقة

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}}$$

استخدام قاعدة لوبيتال، ينتج أن $f'(0)=0$. بالطريقة نفسها، أي باستخدام تعريف المشتقة وقاعدة لوبيتال نحصل على أن جميع المشتقات تساوي صفرا. أي $f^{(n)}(0)=0$ لكل n. وبالتالي فإن متسلسلة ماكلورين للدالة هي $0+0+0+0+\cdots+0+\cdots$ وهذه المتسلسلة متقاربة للصفر لكل x؛ ولكن، إذا كان $x\neq 0$، فإن $f(x)=e^{-1/x^2}$ و $e^{-1/x^2}\neq 0$.

النظرية التالية تعطينا الشرط الضروري والكافي لوجود متسلسلة تايلور تمثل الدالة.

مبرهنة 3 (تايلور)

لتكن f دالة بحيث أن f ومشتقاتها من جميع الرتب موجودة على فترة مفتوحة $(c-r,c+r)$.

فإن f تمثل بمتسلسلة تايلور

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

لكل x بحيث أن $|x-c|<r$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{n+1!}(x-c)^{n+1}=0$$

حيث z_x تقع بين c و x.

مثال2

اثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots + \frac{x^2}{n!} + x + 1 = e^x$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

الحل:

إذا كانت $f(x)=e^x$ فإن $f^{(n)}(x)=e^x$ لكل x، وبالتالي $f^{(n)}(0)=1$ لكل n. لذلك ومن (3) فإن متسلسلة ماكلورين هي

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

نثبت الآن أن هذه المتسلسلة تتقارب من e^x لكل x. أي يجب إثبات أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x. هناك ثلاث حالات: $x>0$ و $x<0$ و $x=0$.

إذا كان $x>0$ ، فإن $0<z_x<x$ ، وبالتالي $e^{z_x}<e^x$.

لذلك

$$0 < \frac{e^{z_x}}{(n+1)!} x^{n+1} < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ينتج أن $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ ، وبالتالي $\lim_{n\to\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$

من خلال نظرية الحصر، ينتج أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{z_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

إذا كان $x<0$ ، فإن $x<z_x<0$ ، وبالتالي $0<e^{z_x}<1$. نتيجة لذلك

$$0 < \left|R_n(x)\right| = \left|\frac{e^{z_x}}{(n+1)!} x^{n+1}\right| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = 0$ ، نستنتج أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

أخيرا إذا كان $x=0$ ، فإن المتسلسلة لها المجموع 1، وهو e^0. أي أن المتسلسلة تتقارب من الدالة e^x لكل $x \in \mathbb{R}$.

مثال3

اثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \cdots + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^3}{3!} - x = \sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

الحل:

لتكن $f(x)=\sin x$ فإن مشتقات f تتكرر في مجموعات رباعية:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f^{(1)}(x) = \cos x & f^{(1)}(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) = -\sin x & f^{(2)}(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\
f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(5)}(0) = 1 \\
f^{(6)}(x) = -\sin x & f^{(6)}(0) = 0 \\
f^{(7)}(x) = -\cos x & f^{(7)}(0) = -1 \\
f^{(8)}(x) = \sin x & f^{(8)}(0) = 0
\end{array}
$$

وهكذا، تتضمن المشتقات الزوجية دالة $\sin x$ بينما تتضمن المشتقات الفردية دالة $\cos x$. بالتحديد لكل عدد صحيح غير سالب k، $f^{2k}(x) = (-1)^k \sin x$ و $f^{2k+1}(x) = (-1)^k \cos x$

وبالتالي $f^{2k}(0) = 0$ و $f^{2k+1}(0) = (-1)^k$

وبما أن $f^{2k}(0) = 0$ ، فإن جميع معاملات قوى x الزوجية في متسلسلة ماكلورين للدالة $\sin x$ تساوي صفرا. لذلك نحذف القوى الزوجية ونكتب متسلسلة تايلور للدالة $\sin x$ كما يلي:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ولإثبات أن متسلسلة ماكلورين تتقارب من $\sin x$ لكل x، نثبت أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ لكل x. نستنتج أن $\left|f^{2n+1}(z_x)\right| \le 1$، بغض النظر عن العدد الصحيح n أو الأعداد x و z_x ،

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ينتج أن $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ وبالتالي $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ لكل x. من المبرهنة فإن متسلسلة ماكلورين لدالة sin تتقارب من $\sin x$ لكل x. بنفس أسلوب يمكن إثبات أن

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

مثال4

أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\sin x$ عند $\pi/6$. ثم اثبت أنها تتقارب من $\sin x$ لكل x.

الحل:

لتكن $f(x) = \sin x$. هنا نرغب كتابة $f(x)$ كما في المبرهنة 3، حيث $c = \pi/6$. مشتقات f هي:

$f(x) = \sin x$ $\qquad$ $f(\pi/6) = \frac{1}{2}$

$f^{(1)}(x) = \cos x$ $\qquad$ $f^{(1)}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f^{(2)}(x) = -\sin x$ $\qquad$ $f^{(2)}(\pi/6) = \frac{-1}{2}$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$ $\qquad$ $f^{(3)}(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f^{(4)}(x) = \sin x$ $\qquad$ $f^{(4)}(\pi/6) = \frac{1}{2}$

هذا النمط يتكرر رباعيا وبشكل غير منته. وبالتالي فإن متسلسلة تايلور لدالة $\sin x$ هي:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) - \frac{1}{2(2!)}(x - \pi/6)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3!)}(x - \pi/6)^3 + \dots$$

الحد النوني u_n لهذه المتسلسلة هو:

$$u_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} \dfrac{1}{2(n)!}(x-\pi/6)^n & ;\ n=0,2,4,6,\dots \\ (-1)^{(n-1)/2} \dfrac{\sqrt{3}}{2(n)!}(x-\pi/6)^n & ;\ n=1,3,5,7,\dots \end{cases}$$

لإثبات أن هذه المتسلسلة تتقارب من $\sin x$ لكل x، نثبت أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

بما أن $f^{(4)}(x) = f(x)$، نستنتج أن

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!}(x - \pi/6)^{n+1} \right| \le \frac{|x - \pi/6|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ينتج أن $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x - \pi/6|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ وبالتالي $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ لكل x. من المبرهنة فإن متسلسلة تايلور لدالة $\sin$ تتقارب من $\sin x$ لكل x.

من المبرهنة فإن الدالة f لها متسلسلة ماكلورين $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

شريطة أن تكون مشتقاتها موجودة عند 0 وبالتالي معرفة على فترة مفتوحة تحتوي 0. بما أن $\ln x$ غير معرفة على فترة مفتوحة تحتوي 0، فإن $\ln x$ لا يوجد لها متسلسلة ماكلورين على الصيغة المعطاة بالمعادلة .

لقد أثبتنا أن $\ln(1+x) = \sum_{0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ لكل $-1 < x < 1$

إذا كان $0 < x < 2$، فإن $-1 < x - 1 < 1$، لذلك نجد أن

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$$ لكل $0 < x < 2$.

وبذلك نكون قد أوجدنا متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ كقوى في $(x-1)$.

مثال5

أوجد متسلسلة تايلور للدالة e^x عند c.

الحل:

نكتب e^{x} على الصيغة $e^{x}=e^{c}e^{x-c}$، وبالتالي

$$e^{x}=e^{c}\left[1+(x-c)+\frac{(x-c)^{2}}{n!}+\cdots+\frac{(x-c)^{n}}{n!}+\cdots\right]=e^{c}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-c)^{n}}{n!}\right]$$

مثال6

أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ عند c ($c>0$).

الحل:

نكتب
$$\ln x=\ln[c+(x-c)]=\ln c+\ln\left(1+\frac{x-c}{c}\right)$$

لقدأثبتنا سابقا أن : $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}x^{n+1}$ لكل $-1<x<1$

ومنه :
$$\ln\left(1+\frac{x-c}{c}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)c^{n+1}}(x-c)^{n+1}$$

وبالتالي :
$$\ln x=\ln c+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)c^{n+1}}(x-c)^{n+1}$$

وهذه المتسلسلة تمثل $\ln x$ لكل $0<x\le 2c$.

فترة التقارب	متسلسلة ماكلورين
$(-\infty,\infty)$ $(-\infty,\infty)$ $(-\infty,\infty)$ $(-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,\infty)$	$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}x^{2n}$ $\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n}}{n+1}x^{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}x^{n+1}$ $\tan^{-1}x=x-\frac{x^{3}}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+1}$ $\cosh x=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\sinh x=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$