مبرهنة: ليكن f دالة معرفة على الفترة $[1,+\infty)$ أو جزء منها، و $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية حيث $a_n = f(n)$

(1) إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ فإن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة إلى L

(2) إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن المتتالية $\{a_n\}$ متباعدة و $\lim a_n = +\infty$

(3) إذا كان $\lim f(x) = -\infty$ فإن المتتالية $\{a_n\}$ متباعدة و $\lim a_n = -\infty$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1,\ \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty;\ \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

مثال من 3، 7 ص 124، 247

(١) أثبت أن $\lim n^2=+\infty$

(٢) حدد إذا ما كانت المتتابعة $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ متقاربة أم متباعدة.

(٣) أثبت أن $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

(٤) احسب $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(٥) حدد ما إذا كانت المتتالية $\left\{\frac{5n}{e^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة أم متباعدة.

الحل:

(١) لتكن $f(x)=x^2$ لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ وبما أن $f(n)=n^2$ فإن $\lim n^2=+\infty$

(٢) لتكن $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$، لدينا $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to+\infty}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi$ ($\frac{\pi}{x}\to 0$، $\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\to 1$)
وبالتالي متتابعة $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ متقاربة إلى π.

(٣) لتكن $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x))=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ($\frac{1}{x}\to 0$)
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^1=e$$
فإن $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

(٤) ليكن $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$:
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$
فإن $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$

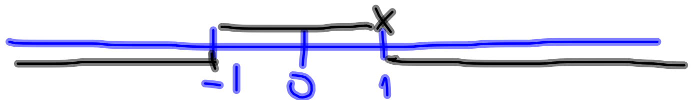
(٥) لتكن $f(x)=\frac{5x}{e^{2x}}$ لدينا:
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2}\frac{2x}{e^{2x}}=0$$
($\frac{2x}{e^{2x}}\to 0$)
فإن المتتالية $\left\{\frac{5n}{e^{2n}}\right\}$ متقاربة إلى 0.

مبرهنة: ليكن $r \in \mathbb{R}$

(١)
$$\lim r^n = \begin{cases} 0 & ; -1 < r < 1 \\ 1 & ; r = 1 \\ +\infty & ; r > 1 \end{cases}$$

$\{r^n\}$ متباعدة إذا كان $r \leq -1$

و $\lim r^n$ غير موجودة إذا كان $r \leq -1$



(٢) $-1 < r < 1 \iff \lim r^n = 0$

(٣) $\{r^n\}$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $-1 < r \leq 1$

تعريف: ليكن $a \in \mathbb{R}$، $r \in \mathbb{R}$

متتالية $\{a.r^n\}$ هندسية.

(٤) المتتالية الهندسية متقاربة إذا وفقط إذا كان $-1 < r \leq 1$

مبرهنة: ليكن $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ كل منهما متتالية حيث
$\lim a_n = L$, $\lim b_n = \ell$ فإن

(1) $\lim(a_n + b_n) = L + \ell$; (2) $\lim(a_n \cdot b_n) = L \cdot \ell$

(3) $\lim c\,a_n = c \cdot L$; (4) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{\ell}$ $(\ell \neq 0)$

(5) إذا كان $\lim a_n = L$ فإن $\lim |a_n| = |L|$

ملحوظة: إذا كان $\lim |a_n| = L$ لا نقدر أن نستنتج $\{a_n\}$ متقاربة أم لا مباشرة.

(6) $\lim |a_n| = 0$ إذا، فقط إذا كان $\lim a_n = 0$

(7) ليكن $a_n \leq x_n \leq b_n$ لكل $n \geq p$
وإذا كان $\lim a_n = \lim b_n = L$ فإن $\lim x_n = L$.

مثال من (١) الى (٣) ص 252 , 253

(١) احسب نهاية المتتابعة $\left\{\frac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(٢) إذا كان $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ فأثبت أن $\lim a_n=0$

(٣) أثبت أن المتتابعة $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n n\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ متقاربة وجد نهايتها

الحل: (١)

$$\lim\frac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}=\lim\frac{n^2\left(3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(5+\frac{4}{n^2}\right)}=\lim\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{5+\frac{4}{n^2}}$$

← لدينا $\lim\frac{1}{n}=0$ فإن: $\lim\frac{\alpha}{n}=\alpha\lim\frac{1}{n}=0$ لكل $\alpha\in\mathbb{R}$.

← لدينا $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ متتابعة جزئية من $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\lim\frac{1}{n}=0$ فإن:

$\lim\frac{1}{n^2}=0$ فإن: $\lim\frac{\alpha}{n^2}=\alpha\lim\frac{1}{n^2}=0$

فإن

$$\lim 3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}=3-\lim\frac{2}{n}+\lim\frac{7}{n^2}=3$$

و

$$\lim 5+\frac{4}{n^2}=5+\lim\frac{4}{n^2}=5$$

فإن

$$\lim\frac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}=\lim\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{5+\frac{4}{n^2}}=\frac{3}{5}$$

(٢) لدينا $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim n\sin\frac{\pi}{n} = \pi$

بان $\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot n\sin\frac{\pi}{n}\right) = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right) = e\cdot\pi = \pi\cdot e$

(٣) طريقة ١: لدينا $|a_n| = \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, $\lim\frac{1}{n} = 0$

بان $\lim|a_n| = 0$, بالتالي $\lim a_n = 0$

طريقة 2: لدينا: $\lim\frac{1}{n} = 0$, $\{(-1)^{n+1}\}$ متتالية محدودة

بان $\lim(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} = 0$ بان $\lim a_n = 0$

مبرهنة: لتكن $\{a_n\}$ متتالية.

(١) إذا كان $\{a_n\}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

(٢) إذا كان $\{a_n\}$ متتالية متناقصة ومحدودة سفليا فهي متقاربة.

(٣) إذا كان $\{a_n\}$ متتالية مطردة ومحدودة فهي متقاربة.

تعريف:

(١) $\{a_n\}$ متزايدة إذا كان $a_n \leq a_{n+1}$ لكل $n \geq 1$

(٢) $\{a_n\}$ متناقصة إذا كان $a_n \geq a_{n+1}$ لكل $n \geq 1$

(٣) $\{a_n\}$ مطردة إذا كان $\{a_n\}$ متزايدة أو متناقصة

(٤) $\{a_n\}$ محدودة من الأعلى إذا كان يوجد $M \in \mathbb{R}$ حيث $a_n \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(٥) $\{a_n\}$ محدودة من الأسفل إذا كان يوجد $m \in \mathbb{R}$ حيث $a_n \geq m$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(٦) $\{a_n\}$ محدودة إذا كان $\{a_n\}$ محدودة من الأعلى وسفليا.

(إذا وفقط إذا كان يوجد $m, M \in \mathbb{R}$ ، $m \leq a_n \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$)