

Electricity and Magnetism

Chapter 23

Electric Fields

Coulomb's Law قانون كولومب

تشير المشاهدات إلى وجود نوعين من الشحن في الطبيعة أحدهما موجبة الإشارة والأخرى سالبة الإشارة ، كما دلت المشاهدات على أن الشحنات الكهربائية تتفاعل مع بعض بحيث تتجاذب الشحنات مختلفة الإشارة بينما تتنافر الشحنات متماثلة الإشارة.

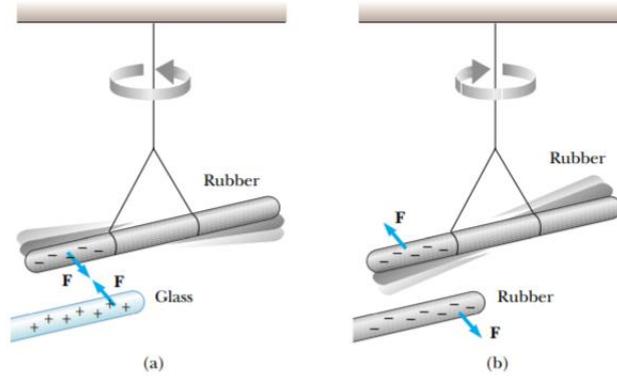


Figure 23.1 (a) A negatively charged rubber rod suspended by a thread is attracted to a positively charged glass rod. (b) A negatively charged rubber rod is repelled by another negatively charged rubber rod.

ولقد ثبت بالتجربة أن القوة الكهربائية F المتبادلة بين شحنتين نقطيتين (point charges) q_1 و q_2 تفصلهما مسافة r تتناسب طردياً مع حاصل ضرب الشحنتين في بعض وعكسياً مع مربع المسافة بينهما أي أن

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (23.1)$$

حيث k ثابت التناسب ويعرف بثابت كولومب.

وفي النظام المتري الذي يعبر فيه عن القوة بوحدة النيوتن (N) وعن الشحنة بوحدة الكولومب (C) وعن المسافة بوحدة المتر (m) فإن

$$k = 8.9875 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$$

أو اختصاراً

$$k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$$

وهو أحد الثوابت الفيزيائية.

تعرف علاقة (23.1) بقانون كولومب في الكهربية، حيث كان هذا الباحث الفرنسي كولومب (1736 – 1806) من أوائل من توصل إلى هذه النتيجة.

ملحوظة: يدل وضع الشحنة بين عارضتين $|q_1||q_2|$ في قانون كولومب على أن الإشارة السالبة لأي من الشحنتين تهمل عند حساب القوة F .

هذا ويمكن التعبير عن ثابت كولومب بدلالة ثابت فيزيائي آخر ϵ_0 يعرف بسماحية أو نفاذية الفراغ للمجال الكهربائي **permittivity of free space**

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

حيث

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$$

إن أصغر وحدة للشحن في الطبيعة هي شحنة الإلكترون أو البروتون وتساوي بوحدة الكولومب

$$|e| = 1.6 \times 10^{-19} C$$

سنعرف وحدة الشحنة (الكولومب C) لاحقاً في Chap 30

أي أن عدد الإلكترونات (أو البروتونات) في شحنة قدرها 1.0 C هو

$$\frac{1}{|e|} = 6.3 \times 10^{18} \text{ الكترون}$$

وهذا رقم ضخم، وللمقارنة فإن ما يكتسبه قضيب من الزجاج عند دلكه بمادة أخرى يقدر بحوالي $10^{-6} C$ أي $1\mu C$.

ومما يحسن ذكره أن كل شحنة تصحب بكتلة، بمعنى أنه لا شحنة بدون كتلة (جسيمة أو جسم)، ويبين الجدول التالي شحن وكتل الجسيمات الثلاث الأساسية التي تتكون منها ذرات المواد.

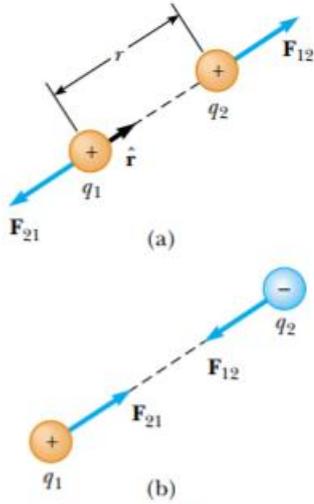
الجسيمة	الشحنة (C)	الكتلة (kg)
الإلكترون	$-1.6021917 \times 10^{-19}$	9.1095×10^{-31}
البروتون	$+1.6021917 \times 10^{-19}$	1.67261×10^{-27}
النيوترون	0	1.67492×10^{-27}

إن من المعلوم أن القوة كمية فيزيائية متجهة. يمكن كتابة قانون كولومب بصيغته المتجهة بالشكل

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

حيث \hat{r} هو متجه وحدة يتجه مثلاً من q_1 نحو q_2 ، و واضح من الشكل أسفله أن $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ و $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$

Vector form of Coulomb's law



Active Figure 23.7 Two point charges separated by a distance r exert a force on each other that is given by Coulomb's law. The force \mathbf{F}_{21} exerted by q_2 on q_1 is equal in magnitude and opposite in direction to the force \mathbf{F}_{12} exerted by q_1 on q_2 . (a) When the charges are of the same sign, the force is repulsive. (b) When the charges are of opposite signs, the force is attractive.

وعندما تقع شحنة q_1 تحت تأثير مجموعة من الشحن ، مثلا q_2 و q_3 و q_4 فإن محصلة القوى الكهربائية عليها حسب قانون كولومب هي المحصلة المتجهة لمجموعة القوى المؤثرة عليها أي أن

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$

مثال: 1 23 أوجد القوة المؤثرة على q_3 في الشكل أسفله حيث

$$a = 0.1m \text{ و } q_2 = -2 \mu\text{C} \text{ و } q_1 = q_3 = 5 \mu\text{C}$$

الحل:

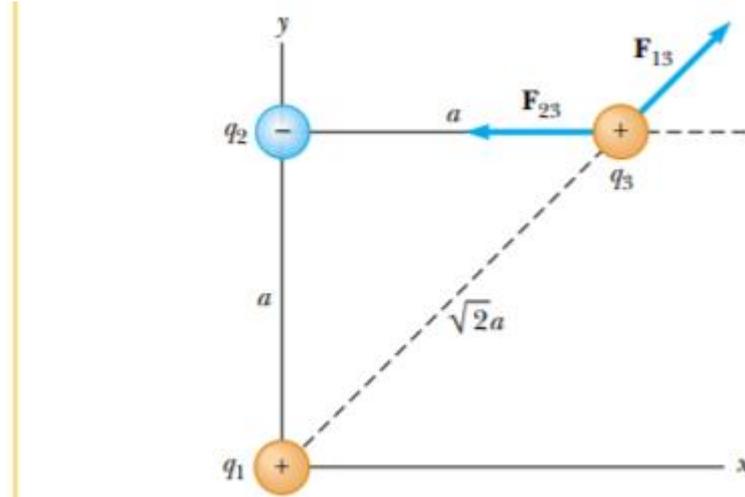


Figure 23.8 (Example 23.2) The force exerted by q_1 on q_3 is F_{13} . The force exerted by q_2 on q_3 is F_{23} . The resultant force F_3 exerted on q_3 is the vector sum $F_{13} + F_{23}$.

تقع الشحنة q_3 تحت تأثير الشحنتين q_1 و q_2 حيث تؤثران عليها بالقوتين المبين اتجاههما في الشكل. لنوجد مقدار هاتين القوتين.

$$F_{32} = k \frac{|q_3| |q_2|}{a^2}$$

$$= \left(9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(5 \times 10^{-6} C) (2 \times 10^{-6} C)}{(0.1m)^2} = 9.0 N$$

واتجاه هذه القوة هو الاتجاه السالب لمحور X

أما الأخرى فهي

$$F_{31} = k \frac{|q_3| |q_1|}{2 \times (a)^2} = 11N$$

F_{31} لها مركبتان متساويتان على محوري X , Y لأنها تعمل زاوية 45° مع محور X

$$F_{31X} = F_{31Y} = F_{31} \cos 45^\circ = 7.9 N$$

لذا فإن مقادير مركبات المحصلة \vec{F}_3 هما

$$F_{3X} = F_{31X} + F_{32} = (7.9 - 9) N = -1.1 N$$

و

$$F_{3Y} = F_{31Y} = 7.9 \text{ N}$$

لذا

$$\vec{F}_3 = (-1.1 \hat{i} + 7.9 \hat{j}) \text{ N}$$

و مقدار \vec{F}_3 هو

$$F_3 = \sqrt{(F_{3X})^2 + (F_{3Y})^2} = 8 \text{ N}$$

وتعمل زاوية θ مع الاتجاه السالب لمحور X قدرها

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_{3Y}}{F_{3X}} \right) = -82.1^\circ$$

أي تعمل زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور X تساوي بالتقريب 98°

مثال: 23 2 تقع ثلاث شحن على محور X ، شحنة موجبة $q_1 = 15 \mu \text{ C}$ على بعد 2 m من نقطة الأصل . و شحنة موجبة $q_2 = 6 \mu \text{ C}$ عند نقطة الأصل. حدد أين توضع شحنة ثالثة q_3 سالبة الإشارة على محور X بحيث تكون في حالة اتزان كهربائي.

الحل

الاتزان الكهربائي يعني أن محصلة القوى الكهربائية على q_3 يجب أن تساوي الصفر. وحيث أن q_3 سالبة الإشارة بينما أن الشحنتين الأخرين موجبة الإشارة فلا بد أن تقع الشحنة الثالثة بين تلك الشحنتين لكي تتعرض لقوتين باتجاهين متعاكسين كما في الشكل أسفله. ليكون بعد q_3 عن q_2 هو x عندئذ سيكون بعدها عن q_1 هو $2-x$. من قانون كولومب وبمساواة تلك القوتين مع بض ليحدث الاتزان نجد

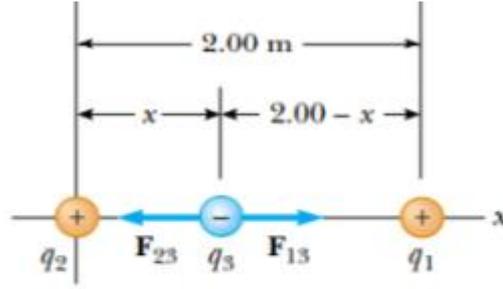


Figure 23.9 (Example 23.3) Three point charges are placed along the \$x\$ axis. If the resultant force acting on \$q_3\$ is zero, the force \$\mathbf{F}_{13}\$ exerted by \$q_1\$ on \$q_3\$ must be equal in magnitude and opposite in direction to the force \$\mathbf{F}_{23}\$ exerted by \$q_2\$ on \$q_3\$.

$$k \frac{|q_3||q_1|}{(2-x)^2} = k \frac{|q_3||q_2|}{x^2}$$

ومن ثم فإن

$$\frac{\sqrt{|q_1|}}{2-x} = \frac{\sqrt{|q_2|}}{x}$$

وبالتعويض عن \$q_1\$ و \$q_2\$ بمقاديرهما نجد $x = 0.77$ m$

مثال 23 3 : قارن بين قوتي التجاذب النيوتوني و الكولومبي بين البروتون والإلكترون في ذرة الهيدروجين معتبراً متوسط المسافة بينهما 5.3×10^{-11} m

الحل :

من قانون كولومب نجد أن القوة الكولومبية (الكهربائية) بين هاتين الجسيمتين

$$F_{el} = k \frac{|e|^2}{r^2} = \left(9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(1.6 \times 10^{-19} C)^2}{(5.3 \times 10^{-11} m)^2}$$

$$= 8.2 \times 10^{-8} N$$

أما قوة التجاذب الكتلي (النيوتوني) فهي حسب قانون الجذب العام لنيوتن

$$F_g = G \frac{m_p m_e}{r^2} = \left(6.7 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right) \times$$

$$\frac{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} = 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}$$

Type equation here. النسبة بين هاتين القوتين هي

$$\frac{F_{el}}{F_g} = 2.3 \times 10^{39}$$

أي أن القوة الكهربائية بين مكونات الذرة المشحونة سواء كانت تجاذباً أم تنافراً أكبر بكثير جداً من قوة التجاذب بينها كتلياً.

المجال (الحقل) الكهربائي The Electric Field

لقد سبق لكم تعريف متجهة مجال جذب الأرض \vec{g} (حول سطح الأرض) بأنها

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0}$$

حيث m_0 كتلة اختبار و \vec{F} القوة التي تجذبها نحو مركز الأرض ، وتصغر \vec{g} بالارتفاع عن سطح الأرض. بنفس الكيفية يمكن تعريف المجال الكهربائي \vec{E} عند أي نقطة في الفضاء بأنه

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (23.3)$$

حيث q_0 شحنة اختبار صغيرة موجبة الإشارة تستخدم للتحسس على وجود مجال كهربائي وعلى شدته وعلى اتجاهه. و \vec{F} هي القوة الكهربائية التي تتأثر بها شحنة الاختبار نتيجة لوجودها في مجال كهربائي.

ويجب التنبيه إلى ان كل جسم أو جسيم يحمل شحنة كهربائية ينتشر حوله مجال كهربائي وأن المجال الكهربائي في العلاقة أعلاه غير متولد من شحنة الاختبار رغم أن لها مجال كهربائي خاص بها. وتتفاعل الاجسام المشحونة عن بعد نتيجة وجود مجالات كهربائية حولها تؤثر على بعضها البعض.

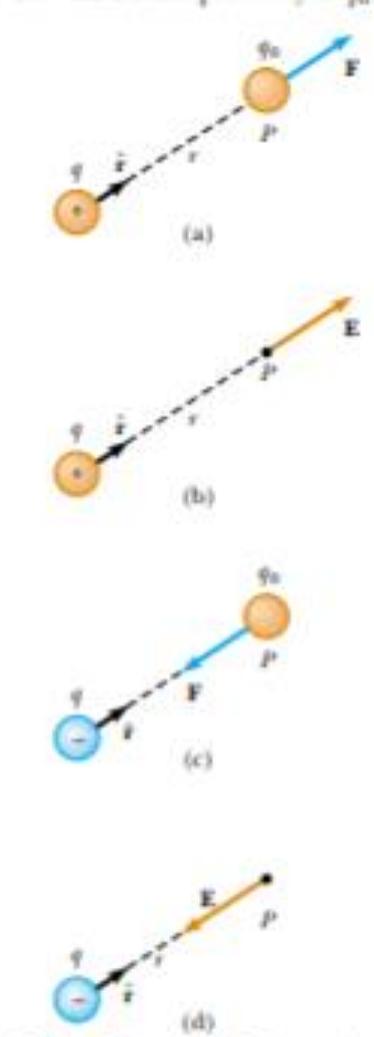
ووحدة المجال حسب العلاقة أعلاه هي $\frac{\text{نيوتن}}{\text{كولومب}}$ أي $\frac{\text{N}}{\text{C}}$ وسيرد لاحقاً وحدة مرادفة

لها. واتجاه المجال \vec{E} عند أي نقطة في الفضاء هو نفس اتجاه \vec{F} المؤثرة على شحنة موجبة الإشارة. ووفقاً للعلاقة أعلاه فإنه عند تعرض شحنة q لمجال كهربائي \vec{E} فإنها تتأثر بقوة كهربائية

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (23.3)^*$$

ومما يجدر ذكره أن المجال الكهربائي يمكن أن يوجد وينتشر في الفراغ ولا يلزم لوجوده وجود وسط مادي كما أن وجوده لا يتوقف على وجود شحنة الاختبار. وتتغير شدة المجال مع البعد عن الجسم المشحون بحسب أبعاد الجسم وشكله وكيفية توزع الشحنة عليه كما سنرى لاحقاً.

المجال الكهربائي حول شحنة نقطية



Active Figure 23.13 A test charge q_0 at point P is a distance r from a point charge q . (a) If q is positive, then the force on the test charge is directed away from q . (b) For the positive source charge, the electric field at P points radially outward from q . (c) If q is negative, then the force on the test charge is directed toward q . (d) For the negative source charge, the electric field at P points radially inward toward q .

 [At the Active Figures link at](#)

تأمل في شحنة نقطية q موجبة الإشارة موضوعة على بعد r من شحنة اختبار q_0 . كما في الشكل أعلاه. حسب قانون كولومب تتأثر شحنة الاختبار بقوة كهربائية

$$\vec{F} = k \frac{q q_0}{r^2} \hat{r}$$

وحيث أن المجال الكهربائي عند موضع شحنة الاختبار يعرف بالعلاقة $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ فإن المجال الكهربائي الناشئ من q عند موقع q_0 هو

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (23.4)$$

ويستفاد من هذه العلاقة أن المجال الكهربائي لشحنة نقطية يتناسب طردياً مع مقدار الشحنة وعكسياً مع مربع البعد عنها.

كما يستفاد من هذه العلاقة ومن الشكل أعلاه أن مجال الشحنة الموجبة يتجه باتجاه الخارج منها والعكس بالنسبة لشحنة سالبة حيث يتجه مجالها نحوها.

ومقدار المجال (شدته) على بعد r من شحنة نقطية q هو

$$E = k \frac{|q|}{r^2}$$

المجال الناشئ من مجموعة شحن نقطية

المجال عند نقطة p في فضاء يوجد به مجموعة شحن نقطية متفرقة

هو المحصلة المتجهة لمجالاتها عند هذه النقطة. $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i$

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_i$$

$$= k \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

مثال 23.4 أوجد القوة الكهربائية المؤثرة على بروتون يتعرض لمجال

كهربائي $2 \times 10^4 \frac{N}{C}$ يتجه بالاتجاه الموجب لمحور X

الحلـ

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

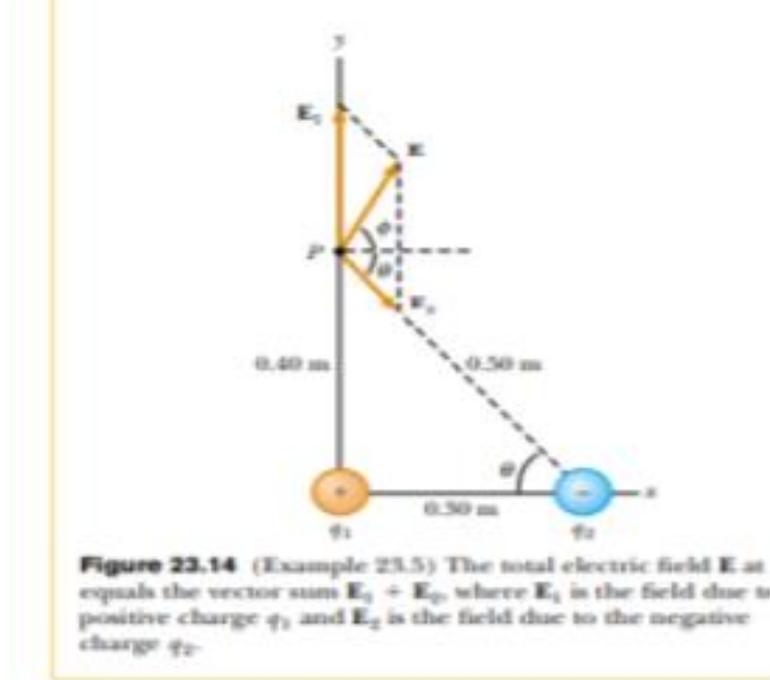
$$= e\vec{E} = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \left(2 \times 10^4 \hat{i} \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) = 3.2 \times 10^{-15} \hat{i} \text{ N}$$

أي أن القوة التي يتعرض لها هذا البروتون لها نفس اتجاه المجال أي الاتجاه الموجب لمحور X .

ملحوظة ثقل البروتون يتجه لأسفل ويساوي $m_p g$ وهذه تولد قوة لأسفل تساوي $1.6 \times 10^{-27} \text{ N}$ وهي صغيرة مقارنة بالقوة الكهربائية أعلاه بحيث يمكن إهمالها.

مثال 23.5

في الشكل أسفله تقع الشحنتان $q_1 = 7 \mu\text{C}$ و $q_2 = -5 \mu\text{C}$ على محور X , أوجد محصلة المجال عند النقطة p الواقعة على محور Y



الحل : المجال عند p هو محصلة المجالين الناشئين من الشحنتين الواقعتين على محور X والمبين اتجاههما على الشكل

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

لتوجد مقدار كل من \vec{E}_1 و \vec{E}_2

$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = \left(9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(7 \times 10^{-6} C)}{(0.4m)^2}$$

$$= 3.94 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

و

$$E_2 = k \frac{|q_2|}{r_2^2} = \dots = 1.8 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

المتجه \vec{E}_1 له مركبة صادية فقط بالاتجاه الموجب لمحور Y . أما المتجه \vec{E}_2 فله مركبة بالاتجاه الموجب لمحور X قدرها

$$E_2 \cos \theta = \frac{3}{5} E_2 = 1.1 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

ومركبة صادية بالاتجاه السالب لمحور Y قدرها

$$- E_2 \sin \theta = - \frac{4}{5} E_2 = -1.4 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

وبالتالي يمكن ان نكتب

$$\vec{E}_1 = 3.9 \times 10^5 \hat{j} \frac{N}{C}$$

و

$$\vec{E}_2 = (1.1 \times 10^5 \hat{i} - 1.4 \times 10^5 \hat{j}) \frac{N}{C}$$

وبذلك فإن محصلة المجال عند p هي

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (1.1 \times 10^5 \hat{i} + 2.5 \times 10^5 \hat{j}) \frac{N}{C}$$

ومقدار \vec{E}_p هو

$$E_p = \sqrt{E_{px}^2 + E_{py}^2} = 2.7 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

و تعمل زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور X قدرها

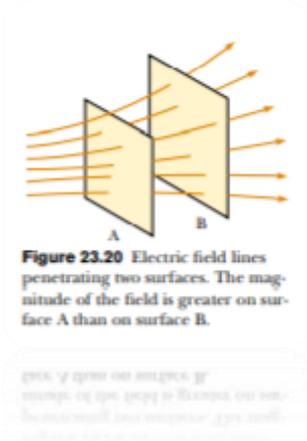
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{E_{py}}{E_{px}} \right) = \dots = 66.2^\circ$$

خطوط (منحنيات أو مسارات) المجال الكهربائي

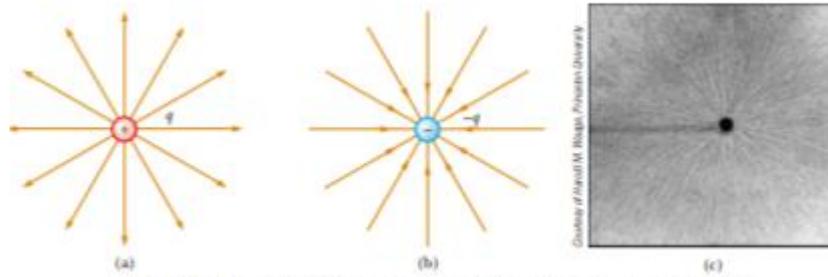
Electric Field Lines

للتقريب للذهن وتصور وجود المجال الكهربائي يمكن تمثيل انتشار المجال الكهربائي في الفضاء بخطوط أو منحنيات وفق ضوابط أو قواعد منها:

- 1 - أن تكون متجهة المجال الكهربائي \vec{E} مماسية للمنحنى عند جميع نقاطه.
- 2 - أن يكون عدد الخطوط التي تخترق وحدة المساحة من أي سطح يتعامد معه المجال متناسبا مع شدة المجال عند هذا الموقع.



- 3 - تنشأ خطوط المجال من الشحنات الموجبة وتتجه نحو السالبة إن وجدت وإلا اتجهت إلى اللانهاية.



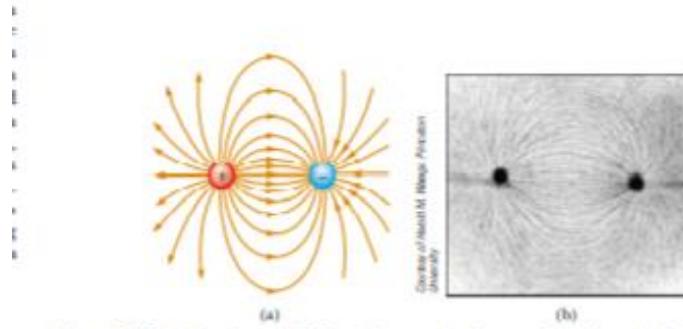
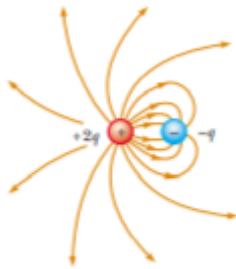


Figure 23.22 (a) The electric field lines for two point charges of equal magnitude and opposite sign (an electric dipole). The number of lines leaving the positive charge

SECTION 23.7 • Motion of Charged Particles in a Uniform Electric Field

4 - عدد الخطوط N الخارجة من شحنة موجبة أو المتجهة نحو شحنة سالبة

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{q_2}{q_1} \quad \text{يتناسب مع مقدار الشحنة أي أن}$$



Active Figure 23.24 The electric field lines for a point charge $+2q$ and a second point charge $-q$. Note that two lines leave $+2q$ for every one that terminates on $-q$.

5 - لا تتقاطع خطوط المجال مهما تزاخمت لأن مماس خط المجال يمثل محصلة المجال.

حركة جسيمات مشحونة في مجال كهربائي منتظم (متجانس)

Motion of Charged Particles in a Uniform Electric Field

تمثل حركة جسيمة مشحونة في مجال كهربائي منتظم (الذي يمثل بخطوط متوازية متساوية المسافة فيما بينها) حركة المقذوفات في مجال جذب الأرض. فعند تعرض شحنة q ذات كتلة m لمجال \vec{E} تخضع لقوة كهربائية $\vec{F} = q\vec{E}$ تتسبب في تحركها بتسارع \vec{a} ، وحسب قانون نيوتن الثاني في الحركة

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

أي أن تسارع الجسيمة المشحونة

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (23.7)$$

ويلاحظ من هذه العلاقة أن تسارع الجسيمة موجبة الشحنة يكون بنفس اتجاه المجال بينما يكون تسارع الجسيمة سالبة الإشارة بعكس اتجاه المجال.

مثال 23.6 ابتدأت جسيمة ذات شحنة موجبة q وكتلة m حركتها من السكون في مجال كهربائي منتظم \vec{E} فقطعت مسافة x . أوجد سرعتها بعد قطع هذه المسافة.

الحل : دعنا نذكر بأن معادلات الحركة بتسارع ثابت في بعد واحد و ليكن x هي :

$$v = v_0 + at$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

يبين الشكل أسفله مجالا كهربائياً منتظماً بين لوحين متوازيين تفصلهما مسافة x يحمل أحدهما شحنة موجبة والآخر شحنة سالبة . كذلك نرى شحنة موجبة تنطلق من السكون من الموجب نحو السالب.

القوة المؤثرة على هذه الشحنة هي

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

الشغل المبذول بقوة المجال لتقطع الجسيمة المسافة x هو

$$W = q\vec{E} \cdot \vec{x} = qEx$$

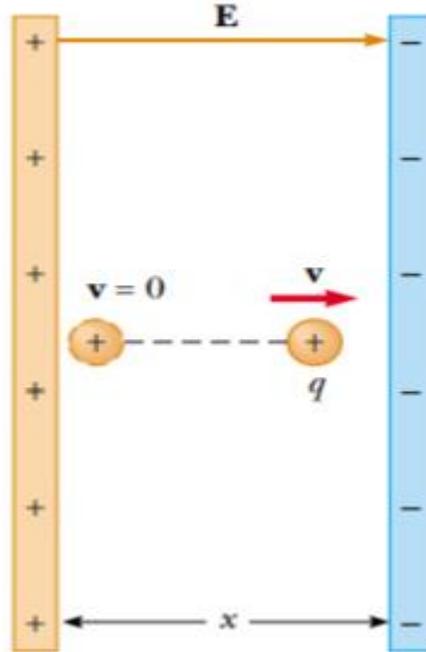


Figure 23.25 (Example 23.10) A positive point charge q in a uniform electric field \mathbf{E} undergoes constant acceleration in the direction of the field.

التغير في الطاقة الحركية للجسيمة بعد قطع المسافة x هو

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

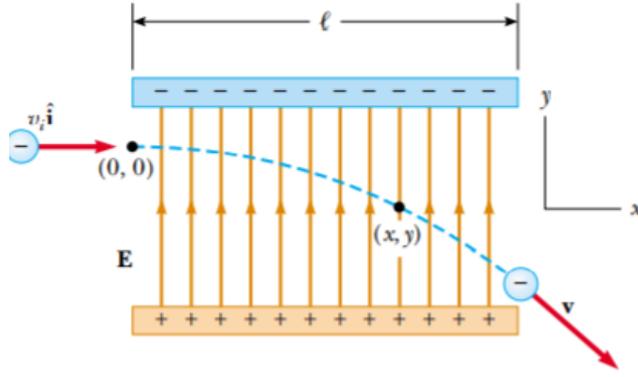
ومن نظرية الشغل والطاقة فإن

$$qEx = \frac{1}{2}mv^2$$

لذا فإن

$$v = \sqrt{\frac{2qEx}{m}}$$

مثال 23.7 قذف الكترون باتجاه أفقي يتعامد مع مجال كهربائي منتظم يتجه لأعلى كما في الشكل أسفله. إذا كانت سرعة الإلكترون الأفقية هي



Active Figure 23.26 An electron is projected horizontally into a uniform electric field produced by two charged plates. The electron undergoes a downward acceleration (opposite E), and its motion is parabolic while it is between the plates.

وشدة المجال 200 N/C وعرض المجال الأفقي $l = 0.1 \text{ m}$ ودخل الإلكترون المجال بالقرب من اللوح السالب. أوجد

ا - تسارع الإلكترون في المجال

الحل - حيث أن الإلكترون سالب الإشارة والمجال يتجه لأعلى لذا فإن القوة الكهربائية المؤثرة على الإلكترون وتسارعه سيكون لأسفل

$$a_y = -\frac{eE}{m} = -\frac{(1.6 \times 10^{-19}) \left(200 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right)}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} = -3.5 \times 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ب - إذا كانت لحظة دخول الإلكترون المجال $t = 0$ فما هو زمن عبور الإلكترون المجال؟

الحل - حيث أن القوة المؤثرة على الإلكترون تتجه لأسفل لذا فإن سرعة الإلكترون الأفقية تبقى ثابتة وهي السرعة الابتدائية التي قذف بها في المجال. أي أن المسافة

$$t = \frac{l}{v_i} = \frac{0.1 \text{ m}}{3 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3.33 \times 10^{-8} \text{ s}$$

ج - إذا كانت الإزاحة الرأسية للإلكترون لحظة دخوله المجال $y_i = 0$ فما هي إزاحته الرأسية عند الخروج من المجال؟

الحل - الإلكترون يتحرك لأسفل بتسارع ثابت لذا

$$y_f = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2} \left(-3.51 \times 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (3.33 \times 10^{-8} \text{ s})^2$$

$$= -0.0195 \text{ m} \equiv -1.95 \text{ cm}$$

وهذا يعني ان المسافة بين اللوحين يجب أن لا تقل عن هذه ليتمكن الالكترون من الخروج من المجال قبل الاصطدام باللوح الموجب.

Chapter 24

Gauss's Law

قانون جاوس

Electric Flux

التدفق (الفيض) الكهربائي

يساعد قانون جاوس على ايجاد صيغة للمجال الكهربائي، بطريقة مبسطة ، حول الشحن التي تتوزع بشكل متماثل على الأجسام الحاملة لها. ويبني هذا القانون على كون القوة الكهربائية الساكنة **electrostatic force** بين الجسيمات المشحونة كما يعبر عنها قانون كولومب تعتمد على قانون التربيع العكسي. ونمهد للوصول إلى صيغة قانون جاوس بدراسة مفهوم التدفق الكهربائي.

يعرف التدفق الكهربائي Φ_E من خلال سطح مساحته A يتعامد مع مجال كهربائي E منتظم بأنه عدد خطوط المجال التي تخترق هذا السطح

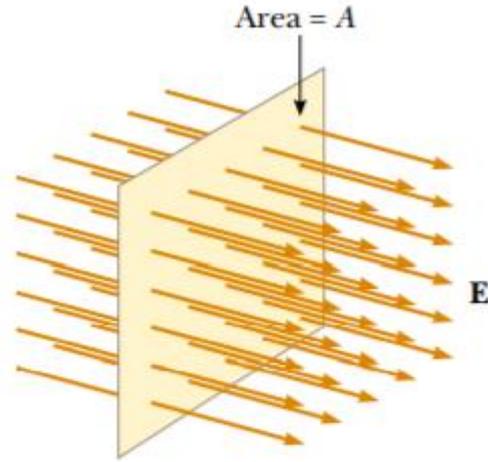


Figure 24.1 Field lines representing a uniform electric field penetrating a plane of area A perpendicular to the field. The electric flux Φ_E through this area is equal to EA .

أي أن

$$\Phi_E = E A \quad (24.1)$$

وبالتالي فإن وحدة التدفق هي $\frac{N.m^2}{C}$. تذكر ان عدد خطوط المجال التي تخترق وحدة المساحة تتناسب مع شدة المجال.

وإذا كان المجال يعمل زاوية θ مع العمودي على السطح

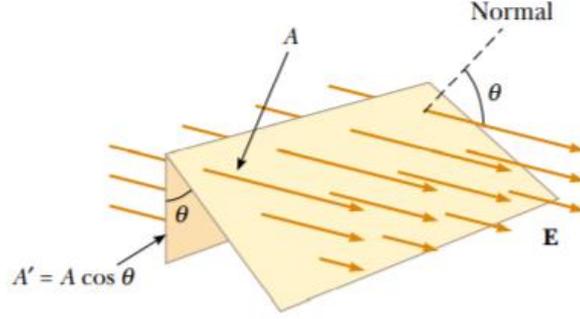


Figure 24.2 Field lines representing a uniform electric field penetrating an area A that is at an angle θ to the field. Because the number of lines that go through the area A' is the same as the number that go through A , the flux through A' is equal to the flux through A and is given by $\Phi_E = EA \cos \theta$.

فإن

$$\Phi_E = E A \cos \theta \quad (24.2)$$

وبالتالي فعند تعامد المجال مع السطح ($\theta = 0$) فإن $\Phi_E = E A$ أي يكون التدفق أكبر ما يمكن ، وعندما يكون المجال مماسياً للسطح ($\theta = \frac{\pi}{2}$) فإن $\Phi_E = 0$ أي ينعدم التدفق من خلال السطح.

وفي الحالة العامة التي لا يكون فيها المجال منتظماً على السطح، يمكن تجزئة السطح إلى عناصر سطحية صغيرة قدر كل منها ΔA وإيجاد المجموع الجبري لعناصر التدفق منها. عنصر التدفق من العنصر السطحي ΔA_i هو

$$\Delta \Phi_{E_i} = E_i \Delta A_i \cos \theta = \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

حيث E_i هي شدة المجال على العنصر السطحي ΔA_i و $\Delta \vec{A}_i$ هو متجه متعامد مع العنصر السطحي ΔA_i . ويكون التدفق الكلي من السطح هو

$$\Phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

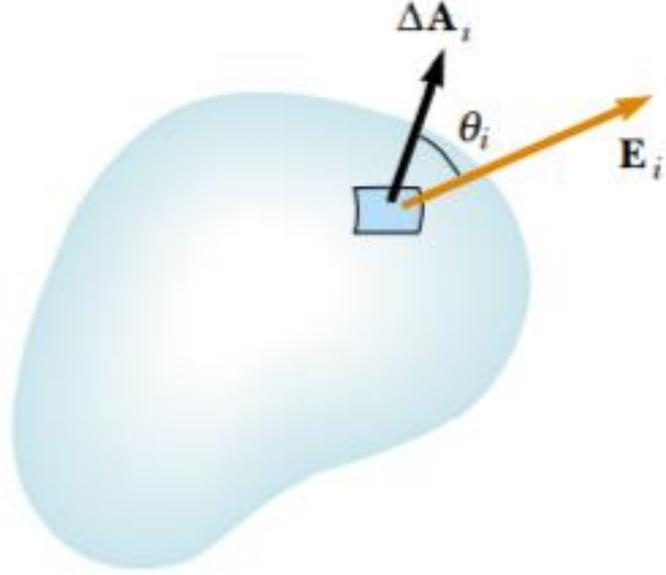


Figure 24.3 A small element of surface area ΔA_i . The electric field makes an angle θ_i with the vector $\Delta \mathbf{A}_i$, defined as being normal to the surface element, and the flux through the element is equal to $E_i \Delta A_i \cos \theta_i$.

وعندما تصغر مساحة العنصر السطحي بحيث تقترب من الصفر يمكن استبدال إشارة الجمع بإشارة تكامل

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (24.3)$$

وهو تكامل على سطح. حيث $d\vec{A}$ هو العمودي على العنصر السطحي dA وإذا كان السطح مغلقاً **closed surface** وهو الذي يقسم الفضاء إلى جزئين أحدهما داخل السطح والآخر خارجه عندئذ فإن التدفق من خلاله يعبر عنه بالصيغة

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (24.4)$$

وسنأخذ اتجاه $d\vec{A}$ العمودي على السطح المغلق بحيث يشير دوماً إلى الخارج، بصرف النظر عن اتجاه المجال. وبناء على ذلك سنجد أن التدفق الخارج من السطح المغلق يكون موجب الإشارة بينما إشارة التدفق المتجه إلى داخل السطح تكون سالبة وذلك بسبب إشارة $\cos \theta$ التي تعتمد على مقدار θ (الزاوية بين العمودي على السطح ومتجهة المجال).

مثال 24.1 وضع مكعب طول ضلعه l بموازية المحاور المتعامدة x و y و z ، وعرض لمجال كهربائي E منتظم يتجه بالاتجاه الموجب لمحور x ، كما في الشكل أسفله . أوجد صافي التدفق من خلال سطح المكعب.

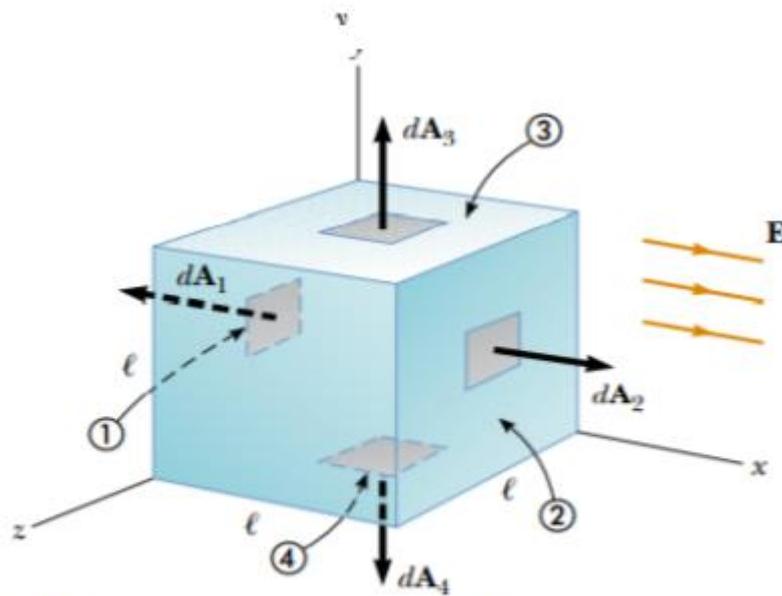


Figure 24.5 (Example 24.2) A closed surface in the shape of cube in a uniform electric field oriented parallel to the x axis. Side ④ is the bottom of the cube, and side ① is opposite side!

الحل بالتأمل في المعطيات والشكل نجد أن المجال يتعامد مع اثنين من أوجه المكعب الستة وهما الوجهين 1 و 2 بينما يوازي الأوجه الأربعة الباقية . التدفق الكلي هو المحصلة الجبرية للتدفق من الأوجه الستة. التدفق من الأوجه الأربعة التي يتماس معها المجال يساوي الصفر لأن المجال يتعامد مع العمودي على أي

منها ، $\vec{E} \perp d\vec{A}$ ، وهو ما يجعل

$$\cos \theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

التدفق من الوجه 1 هو

$$\Phi_1 = \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 = \int E_1 dA_1 \cos \pi = -E \int dA = -E l^2$$

التدفق من الوجه 2 هو

$$\Phi_2 = \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2 = \int E_2 dA_2 \cos 0 = E \int dA = E \ell^2$$

لذلك فإن التدفق الكلي من خلال سطح المكعب هو

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = -E \ell^2 + E \ell^2 = 0$$

وهذه نتيجة متوقعة ذلك أن عدد خطوط المجال التي اخترقت السطح إلى الداخل يساوي عدد خطوط المجال التي اخترقته إلى الخارج

مثال 24.2 وضعت شحنة نقطية موجبة q في مركز سطح كروي نصف قطره r . أوجد التدفق من خلال هذا السطح.

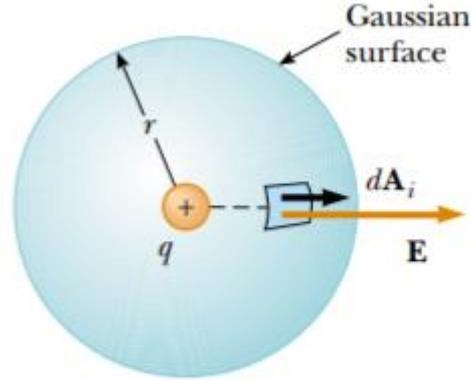


Figure 24.6 A spherical gaussian surface of radius r surrounding a point charge q . When the charge is at the center of the sphere, the electric field is everywhere normal to the surface and constant in magnitude.

الحل — بما أن الشحنة واقعة في مركز السطح الكروي لذا فإن المجال سيكون متعامداً مع السطح وله نفس الشدة عند جميع نقاطه.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = E (4\pi r^2)$$

ولكن على هذا السطح الكروي

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

بالتعويض عن E نجد

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (24.5)$$

وهذه نتيجة مغايرة لما وجد في المثال السابق حيث يتناسب التدفق هنا مع مقدار الشحنة q بينما كان التدفق في المثال السابق يساوي الصفر. فما هو وجه الاختلاف بين الحالتين؟ وجه الاختلاف هو أن مصدر المجال هنا موجود داخل السطح المغلق بينما في المثال السابق مصدر المجال موجود خارج السطح المغلق. وبالتأمل في كلا الحالتين سنجد أن التدفق مستقل عن مساحة السطح ومستقل عن شكل السطح، كما أن استبدال المكعب بسطح كروي أو بأي سطح مغلق مهما كان شكله لا يغير من النتيجة كما أنها لن تتأثر بكون المجال منتظماً أو غير منتظم طالما أن مصدره من خارج السطح المغلق. وفي مثالنا الحالي لن تتغير النتيجة باستبدال هذا السطح الكروي بأخر يختلف عنه في نصف القطر بل لا يلزم أن تكون الشحنة في المركز إنما المهم أن تكون داخل السطح المغلق. كما لا يلزم أن يكون هذا السطح المغلق كروياً بل يمكن أن يأخذ أي شكل فالشرط اللازم لصحة هذه النتيجة أن تكون الشحنة داخل السطح أيّاً كان شكله أو كانت مساحته. وإذا وجدت شحنة أو مجموعة شحن خارج هذا السطح المغلق فلن تؤثر في النتيجة.

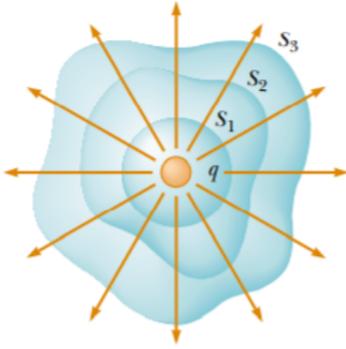


Figure 24.7 Closed surfaces of various shapes surrounding a charge q . The net electric flux is the same through all surfaces.

يمثل الشكل أعلاه مجموعة من السطوح المغلقة S_1 و S_2 و S_3 تضم بداخلها شحنة q . التدفق متساو عبرها.

في الشكل أسفله شحنة q تقع خارج سطح مغلق. التدفق من خلال هذا السطح يساوي الصفر مهما كان شكله أو مساحته لأن عدد خطوط المجال الداخلة يساوي عدد خطوط المجال الخارجة.

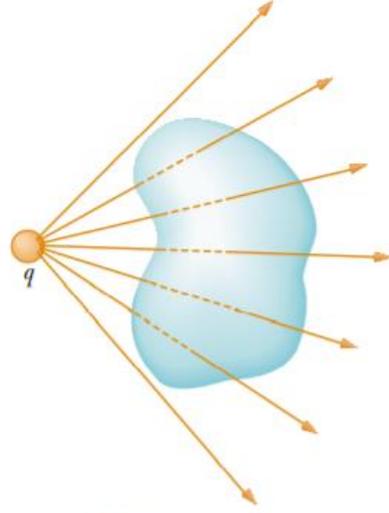


Figure 24.8 A point charge located *outside* a closed surface. The number of lines entering the surface equals the number leaving the surface.

قانون جاوس

يعبر قانون جاوس عن مجمل المفاهيم أعلاه ويكتب بالصيغة

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (24.6)$$

حيث ترمز q_{in} إلى صافي (محصلة) الشحن داخل السطح المغلق.

سنشير من الآن فصاعداً إلى السطح المغلق بـ سطح جاوس. كما نذكر بأن قانون جاوس في الكهربائية هو القانون الأول ضمن أربعة قوانين أساسية في الكهرومغناطيسية وأنه سهل عملية إيجاد المجال الكهربائي لشحنة تتوزع بتمائل جيد على الجسم المشحون.

تطبيقات على استخدام قانون جاوس

عند تطبيق قانون جاوس علينا أن نفكر بعناية كيف نختار سطح جاوس ليسهل علينا إجراء العمليات الحسابية. ذلك أنه عند التطبيق يؤول القانون إلى الصيغة

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos \theta = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

وهذه العلاقة يسهل تطبيقها عند الاختيار الجيد لشكل سطح جاوس وهذا بدوره يعتمد على التصور السليم لكيفية انتشار المجال حول الجسم المشحون. الشكل الجيد لسطح جاوس تكون فيه :

$E = constant$ و $\cos \theta = constant$ عند جميع نقاط السطح حيث θ هي الزاوية بين متجهة المجال ومتجهة العمودي على السطح، و تكون مساحة السطح بالإضافة لذلك مما يسهل حسابه.

مثال 24.3 أوجد صيغة للمجال E على بعد r من شحنة نقطية q موجبة.

الحل نختار سطح جاوس المحيط بالشحنة على هيئة سطح كروي نصف قطره r بحيث تقع الشحنة في مركزه ذلك أن المجال حول الشحنة النقطية شعاعي ويوازي أنصاف أقطار أي سطح كروي تقع الشحنة في مركزه.

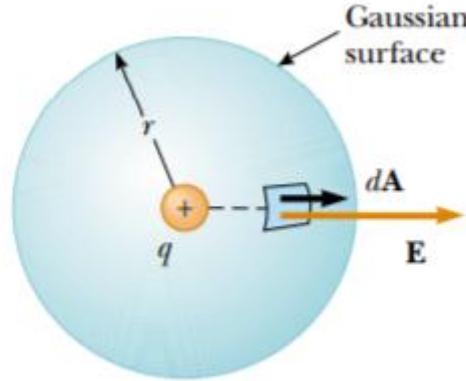


Figure 24.10 (Example 24.4) The point charge q is at the center of the spherical gaussian surface, and \mathbf{E} is parallel to $d\mathbf{A}$ at every point on the surface.

وبهذه الطريقة يكون للمجال نفس المقدار عند جميع نقاط سطح جاوس لتساوي بعدها عن الشحنة ويكون المجال والعمودي على السطح متوازيان ومساحة سطح جاوس تساوي مساحة سطح كروي نصف قطره r ، لذا

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos \theta = E \oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

حيث $q_{in} = q$ و $\oint dA = 4\pi r^2$ و بالتعويض نجد

$$E (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ومنها نجد

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = k \frac{q}{r^2}$$

وهذه هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً باستخدام قانون كولومب حيث k هي ثابت كولومب.

مثال 24.4 تتوزع شحنة Q موجبة بانتظام على حجم كرة مصمته عازلة كهربائياً نصف قطرها a . أوجد المجال في حالتين:

الأولى : خارج الكرة أي على بعد $r > a$ من مركز الكرة

الثانية : داخل الكرة أي على بعد $r < a$ من مركز الكرة

الحل

حيث ان الشحنة كروية الشكل لذا فلا بد أن المجال حولها سيكون شعاعياً أي بموازات أنصاف أقطارها ومن ثم فيحسن أن نأخذ سطح جاوس سطحاً كروياً متمركزاً مع الشحنة الكروية في كلا الحالتين كما في الشكل أسفله.

عند تطبيق قانون جاوس في كلا الحالتين سنجد أن

$\vec{E} \uparrow d\vec{A}$ و من ثم $\theta = 0$ و $\cos\theta = 1$. كذلك فإن مساحة سطح جاوس هي $4\pi r^2$.

في الحالة الأولى الشحنة داخل سطح جاوس هي $q_{in} = Q$

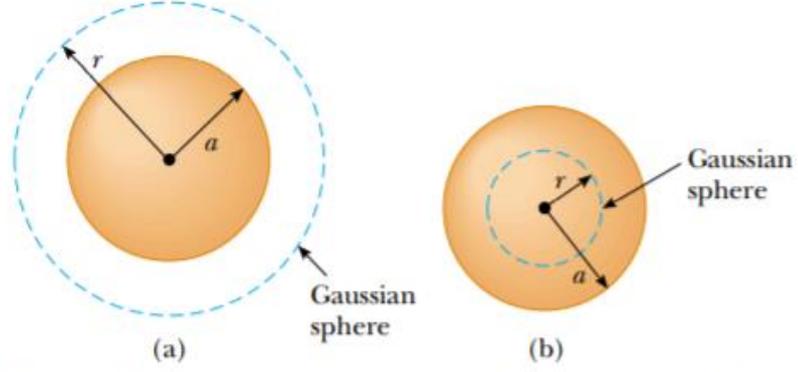


Figure 24.11 (Example 24.5) A uniformly charged insulating sphere of radius a and total charge Q . (a) For points outside the sphere, a large spherical gaussian surface is drawn concentric with the sphere. In diagrams such as this, the dotted line represents the intersection of the gaussian surface with the plane of the page. (b) For points inside the sphere, a spherical gaussian surface smaller than the sphere is drawn.

عندئذ بتطبيق قانون جاوس نجد

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos \theta = E \oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

وبعد التعويض عن كل من q_{in} و $\oint dA$ نجد

$$E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

و

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = k \frac{Q}{r^2}$$

ومن ثم فإن المجال خارج هذه الشحنة الكروية له نفس صيغة المجال حول شحنة نقطية Q موجودة في مركز الكرة.

أما في الحالة الثانية أي عندما تكون النقطة المراد إيجاد المجال عندها واقعة داخل الشحنة وعلى بعد من المركز $r < a$ فإن الشحنة داخل سطح جاوس أي q_{in} ماهي إلا جزء من الشحنة الكلية، أما باقي الشحنة فهو في القشرة الخارجية المحيطة بسطح جاوس الداخلي ولا تأثير لها في المجال لكونها خارج السطح. لإيجاد الشحنة داخل سطح جاوس نستفيد من كون الشحنة الكلية تتوزع بانتظام على حجم الكرة المشحونة بمعنى أن الكثافة الحجمية للشحنة متساو عند جميع نقاط الكرة. وبالتالي فإن نسبة الشحنة داخل سطح جاوس الداخلي ذي نصف القطر r إلى

الشحنة الكلية هو كنسبة الحجم داخل سطح جاوس الداخلي إلى حجم الكرة ذات نصف القطر a

$$\frac{q_{in}}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{r^3}{a^3} \rightarrow q_{in} = \frac{Qr^3}{a^3}$$

وبتطبيق قانون جاوس نجد

$$E (4\pi r^2) = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^3}$$

ومنها نجد

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} r = k \frac{Q}{a^3} r$$

أي أن المجال داخل هذه الشحنة الكروية يتناسب طردياً مع البعد عن مركزها، بخلاف المجال خارجها حيث يتناسب عكسياً مع مربع البعد عن مركزها. انظر الشكل أسفله.

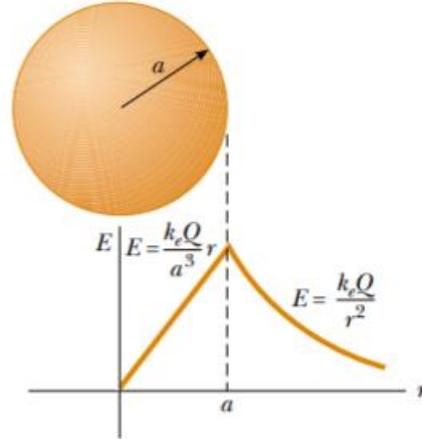


Figure 24.12 (Example 24.5) A plot of E versus r for a uniformly charged insulating sphere. The electric field inside the sphere ($r < a$) varies linearly with r . The field outside the sphere ($r > a$) is the same as that of a point charge Q located at $r = 0$.

مثال 24.5 تتوزع شحنة Q بانتظام على قشرة كروية رقيقة نصف قطرها a . أوجد المجال الكهربائي في حالتين :

الأولى: خارج القشرة المشحونة أي على بعد $r > a$ من مركز القشرة
 الثانية: في التجويف داخل القشرة المشحونة أي على بعد $r < a$ من مركز
 القشرة.

الحل

بالتأمل في الشكل أسفله والمعطيات نجد أن المجال الكهربائي حول هذه القشرة ذات الشحنة الموجبة لا بد وأن يكون شعاعياً ومتجهاً إلى الخارج. لذلك يحسن في الحالة الأولى أخذ سطح جاوس سطحاً كروياً متمركزاً مع القشرة كما في شكل **b**.

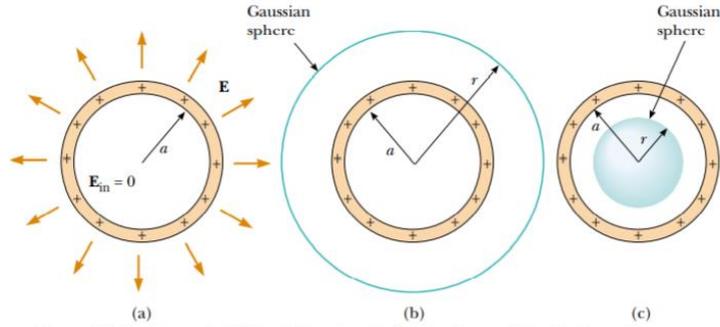


Figure 24.13 (Example 24.6) (a) The electric field inside a uniformly charged spherical shell is zero. The field outside is the same as that due to a point charge Q located at the center of the shell. (b) Gaussian surface for $r > a$. (c) Gaussian surface for $r < a$.

الآن بتطبيق قانون جاوس ومعرفة أن الشحنة داخل سطح جاوس هي Q نجد استناداً إلى ما تم شرحه في المثال السابق أن

$$E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

وهذا يعطي

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

أي نفس صيغة المجال حول شحنة نقطية.

في الحالة الثانية أي داخل التجويف نجد من تماثل الشكل أن أنسب شكل لسطح جاوس هو سطح كروي متمركز مع القشرة كما في شكل **c**. الآن بتطبيق قانون جاوس وملاحظة عدم وجود شحنة داخل سطح جاوس نجد

$$E (4\pi r^2) = \frac{0}{\epsilon_0} = 0$$

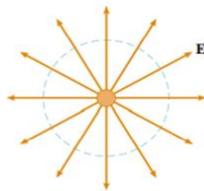
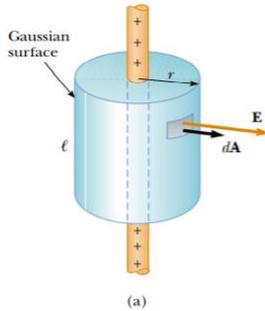
وحيث أن مساحة سطح جاوس بالضرورة لا تساوي الصفر فلا بد أن

$$E = 0$$

أي لا يوجد مجال داخل التجويف وإن كان محاطاً بشحنة، وهي نتيجة عامة ولا تعتمد على شكل التجويف.

مثال 24.6 تتوزع شحنة بانتظام على خط شحنات لانهايي الطول. كثافة الشحنة الطولية على هذا الخط هي $\lambda \left(\frac{C}{m}\right)$. أوجد شدة المجال على بعد r من هذا الخط

الحل بالتأمل في المعطيات والشكل نجد أن المجال الكهربائي حول خط الشحنات لا بد وأن يكون شعاعياً متعامداً مع الخط عند جميع نقاطه. ومن ثم يحسن أخذ سطح جاوس على هيئة سطح علبة اسطوانية طولها ℓ ونصف قطرها r يمر خط الشحنات من محورها عندئذ سيكون المجال متعامداً مع الجزء الأسطواني من مساحة العلبة ومماسياً لغطاءيها. أي أن التدفق الكهربائي من خلال سطح جاوس سيكون من القشرة الأسطوانية للعلبة فقط.



لتكن شدة المجال على القشرة الأسطوانية هي E ، وبما أن مساحتها $2\pi r\ell$ والشحنة بداخل سطح جاوس $q_{in} = \lambda\ell$ عندئذ بتطبيق قانون جاوس نجد

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos \theta = E \oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$E (2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} = 2k \frac{\lambda}{r} \quad (24.7)$$

لاحظ أن المجال في هذه الحالة ، أي حول خط شحنات طويل جداً ، يتناسب طردياً مع الكثافة الطولية للشحنة وعكسياً مع البعد عنها وليس مع مربع البعد كما في الأمثلة السابقة.

مثال 24.7 أوجد المجال حول صفيحة شحنات عازلة لانهاية الأبعاد علماً بأن الكثافة السطحية للشحنة عليها تساوي σ (C/ m²) .

الحل

بالتأمل في المعطيات والشكل نجد أن المجال E سيكون منتظماً ومتعامداً على

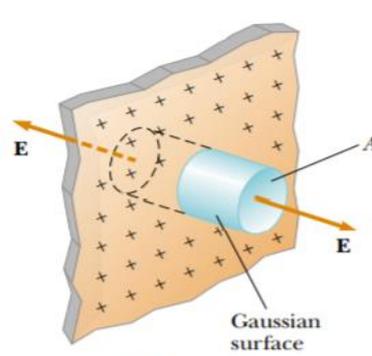


Figure 24.15 (Example 24.8) A cylindrical gaussian surface penetrating an infinite plane of charge. The flux is EA through each end of the gaussian surface and zero through its curved surface.

جهتي الصفيحة (اليمنى واليسرى مثلا) لذا يحسن أخذ سطح جاوس عبارة عن سطح علبة ولتكن اسطوانية الشكل تتعامد مع الصفيحة وتخرقها. ليكن مساحة غطاء العلبة هو A عندئذ سيكون المجال متعامداً مع الغطاءين وموازيًا للقشرة الأسطوانية. أي أن التدفق الكلي من خلال سطح جاوس سيكون هو التدفق من الغطاءين فقط أي $2(EA)$ ، أما الشحنة داخل سطح جاوس فهي $q_{in} = \sigma A$

وبتطبيق قانون جاوس نجد

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E (2A) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

و

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \quad (24.8)$$

أي أن المجال بالقرب من صفيحة شحنات ذات مساحة كبيرة جداً مقدار ثابت يتناسب طردياً مع كثافة الشحنة السطحية ولكنه مستقل عن البعد من الصفيحة.

س : ماهي شدة المجال E بين لوحين متوازيين كبيرين يحمل أحدهما شحنة كثافتها السطحية σ + والأخر شحنة كثافتها السطحية σ -

ج : ستكون خطوط المجال بين اللوحين تتجه من الموجب نحو السالب فقط والمجال خارج اللوحين مهملًا. وبناء على ذلك ستكون شدة المجال بين اللوحين ضعف المقدار أعلاه ، أي أن

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

خصائص الموصلات الكهربائية عندما تكون في حالة اتزان كهربائي

تمتاز الموصلات بوجود الكترونات حرة ضعيفة الارتباط بنواة الذرة وتتمكن من الحركة بسهولة باتجاه معين عند تعرض المادة لمجال كهربائي أي يسري فيها تيار كهربائي. ويعد الموصل المعزول عن غيره من الأجسام الموصلة و إن كان مشحوناً أو معرضاً لمجال كهربائي ، يعد في حالة ركود أو اتزان كهربائي. وتكون فيه حركة الالكترونات الحرة عشوائية. وللموصل المتزن كهربائياً خصائص منها:

1 - لا يوجد مجال داخله سواء كان مصمتاً أو مجوفاً أو مشحوناً أو معرضاً لمجال كهربائي خارجي. يمثل الشكل أسفله شريحة من مادة موصلة تتعرض لمجال كهربائي خارجي. عندما يحدث التعرض للمجال تتفاعل معه بعض الالكترونات الحرة وتتأثر بقوة كهربائية تجعلها تتحرك عكس اتجاه المجال مما يتسبب في تكون شحنة سالبة على الجانب الأيسر من الشريحة وتكون شحنة موجبة مساوية لها على الجانب الأيمن. تسمى تلك بالشحنات المستحثة **induced charges** . نتيجة لذلك ينشأ داخل الشريحة مجال كهربائي معاكس للمجال الخارجي ومساو له في المقدار

مما يؤدي إلى انعدام المجال داخل الشريحة. لاحظ أن الشريحة ما زالت متعادلة الشحنة أي غير مشحونة.

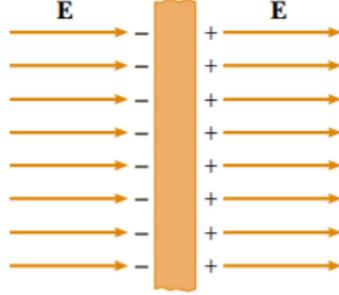


Figure 24.16 A conducting slab in an external electric field \mathbf{E} . The charges induced on the two surfaces of the slab produce an electric field that opposes the external field, giving a resultant field of zero inside the slab.

2 - إذا كان الموصل مشحوناً فإن شحنته تستقر على سطحه الخارجي فقط، ولا يوجد داخله شحنة ولا يوجد مجال. ذلك أن وجود شحنة داخله يتسبب في وجود مجال في الداخل وهو ما يولد حركة موجة للإلكترونات الحرة وهو ما يتنافى مع حالة الركود أو الاتزان الكهربائي.

3 - يتعامد المجال الكهربائي على سطحه عند جميع نقاطه. ذلك أن عدم التعامد يتسبب في وجود مركبة للمجال مماسية لسطح الموصل تتسبب في حركة إلكترونات التوصيل على السطح وهو ما يتنافى مع الاتزان الكهربائي.

4 - تكون كثافة الشحنة السطحية على الأجزاء المدببة أو الحادة من سطح الموصل (ذات نصف قطر تقوس صغير) أكبر من كثافتها على الأجزاء المفلطحة أو المستوية من السطح. وهذا ما سنثبت به بسهولة بعد دراسة مفهوم الجهد الكهربائي لاحقاً.

5 - شدة المجال على سطح الموصل المشحون تتناسب طردياً مع كثافة الشحنة

السطحية وتساوي $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. ويمكن إثبات ذلك بتطبيق قانون جاوس على جزء من سطح موصل معزول ومشحون كما في الشكل أسفله آخذين بالاعتبار ما ورد من خصائص أعلاه.

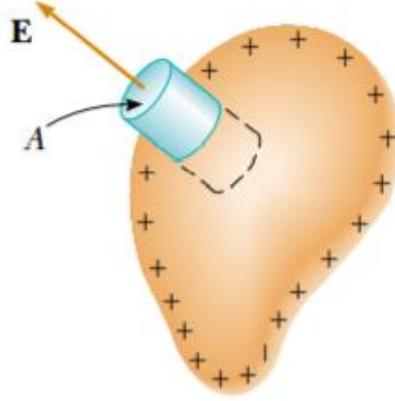


Figure 24.18 A gaussian surface in the shape of a small cylinder is used to calculate the electric field just outside a charged conductor. The flux through the gaussian surface is EA . Remember that \mathbf{E} is zero inside the conductor.

في هذا الموصل المشحون المعزول تستقر الشحنة على السطح الخارجي غير أنها قد لا تتوزع بانتظام على السطح نتيجة لاختلاف تقوس أجزاءه. المجال معدوم داخل الموصل ويتعامد مع السطح عند جميع نقاطه. نأخذ سطح جاوس عبارة عن سطح علبة أسطوانية مساحة غطائها A تتعامد مع السطح وتخترقه إلى الداخل. إذا كانت كثافة الشحنة السطحية عند هذا الموضع هي σ عندئذ فإن الشحنة دخل سطح جاوس هي $A\sigma = q_{in}$ و محصلة التدفق هي EA لأنه لا يوجد تدفق من الغطاء الداخلي لانعدام المجال في الداخل ولا يوجد تدفق من القشرة الاسطوانية لكون المجال مماسياً لها في الخارج ومنعدماً في الداخل. لذا نجد من قانون جاوس

$$EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

ومنه فإن المجال في الخارج بالقرب من سطح هذا الموصل المشحون هو

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Chapter 25

Electric Potential

الجهد الكهربائي

تمهيد تعد القوة الكهربائية الساكنة كما تعطى بقانون كولوم قوة محافظة شأنها شأن قوة جذب الأرض والقوة المرنة في النابض (الزنبرك) ، وعليه يمكن وصف ظاهرة الكهربائية الساكنة من خلال طاقة وضع كهربائية. وهذه الأخيرة تمكن من تعريف كمية فيزيائية قياسية تعرف بالجهد الكهربائي تعتمد على الموقع. و يعد التعامل مع الجهد الكهربائي عند دراسة الكهربائية الساكنة أسهل من التعامل مع المجال الكهربائي لكونه كمية متجهة. وفي الحياة العملية فإن ما يهم معرفته هو فرق الجهد الكهربائي بين موقعين أو نقطتين في دارة كهربائية وهو ما يقيسه جهاز الفولتميتر.

فرق الجهد الكهربائي والجهد الكهربائي

Electric Potential Difference and Electric Potential

لقد رأينا سابقاً أنه عند تعرض شحنة نقطية q لمجال كهربائي \vec{E} تتأثر بقوة كهربائية $\vec{F} = q\vec{E}$ وعندما تتحرك هذه الشحنة عنصر إزاحة $d\vec{s}$ بفعل قوة المجال فإن عنصر الشغل المبذول

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

وحيث ان الشغل الذي تبذله قوة محافظة = سالب التغير في طاقة الوضع ، عندئذ بالرمز لطاقة الوضع الكهربائية بالرمز U يمكن أن نكتب

$$dU = -q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

وعند تحريك شحنة q من موقع A إلى موقع B في فضاء يوجد فيه مجال فإن التغير في طاقة الوضع الكهربائية لهذه الشحنة هو

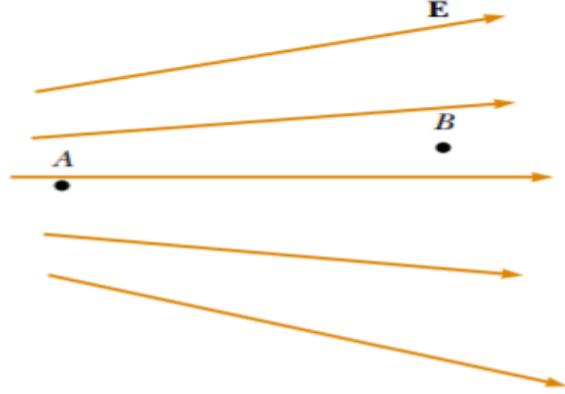


Figure 25.1 (Quick Quiz 25.1)
Two points in an electric field.

$$\Delta U = U_B - U_A = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (25.1)$$

يُعرّف الجهد الكهربائي ورمزه V عند أي نقطة في الفضاء بأنه طاقة وضع وحدة الشحنة عند هذه النقطة

$$V = \frac{U}{q} \quad (25.2)$$

وبذلك يكون فرق الجهد الكهربائي ΔV بين أي نقطتين أو موقعين A و B هو

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (25.3)$$

ومن هذه العلاقة الهامة نجد أن التغير في طاقة الوضع الكهربائية لشحنة q عندما تتحرك بين موقعين بينهما فرق جهد ΔV هو

$$\Delta U = q \Delta V \quad (25.4)$$

وتعتمد إشارة ΔU على إشارة كل من q و ΔV حيث يمكن لإشارة أي منهما أن تكون موجبة أو سالبة. ومن علاقتي 2 و 4 نجد أن وحدة الجهد ووحدة فرق الجهد الكهربائي هي جول / كولومب

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$$

كذلك فإن علاقة 3 تمدنا بوحدة إضافية للمجال الكهربائي E وهي فولط | متر
وبذلك فإن

$$1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m}$$

أي أن المجال الكهربائي ما هو إلا معدل التغير في الجهد مع المسافة.

وحدة طاقة الإلكترون – فولط (eV)

هي وحدة طاقة صغيرة جداً مقارنة بوحدة الجول ويشيع استخدامها في الفيزياء الذرية والنووية. وتُعرف وحدة الإلكترون – فولط بأنها الطاقة التي يكتسبها أو يفقدها الكترون (أو بروتون) عندما يتحرك بين موقعين بينهما فرق جهد قدره واحد فولط. وبوحدة الجول فإن

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C.V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (25.5)$$

فمثلاً عندما يسرع الكترون من السكون في فرق جهد 10 kV تصبح طاقته 10 keV ولو كان الجهد المسرع 1.0 MV لأصبحت طاقته 1.0 MeV وهما ما يعادلان بوحدة الجول $1.6 \times 10^{-15} \text{ J}$ و $1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$ على التوالي

فرق الجهد في مجال كهربائي منتظم (متجانس)

Potential Difference in a Uniform Electric Field

في الشكل أسفله (a) مجال كهربائي منتظم يتجه بالاتجاه السالب لمحور y .
النقطتان A و B يفصل بينهما مسافة d بموازية المجال. لإيجاد فرق الجهد بين تلك النقطتين نطبق علاقة (25.3) حيث نجد

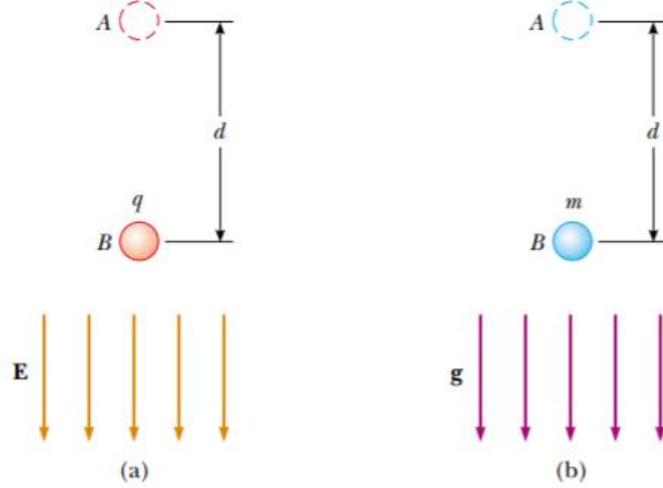


Figure 25.2 (a) When the electric field \mathbf{E} is directed downward, point B is at a lower electric potential than point A . When a positive test charge moves from point A to point B , the charge–field system loses electric potential energy. (b) When an object of mass m moves downward in the direction of the gravitational field \mathbf{g} , the object–field system loses gravitational potential energy.

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= - \int_A^B E ds \cos 0 = -E \int_A^B ds = -Ed$$

حيث $d\vec{s}$ عنصر إزاحة صغير من المسافة بين النقطتين. أي أن

$$\Delta V = V_B - V_A = -Ed \quad (25.6)$$

تدل الإشارة السالبة على أن جهد النقطة B أقل من جهد النقطة A أي أن المجال يتجه باتجاه تناقص الجهد. و بناء على ما سبق نجد أنه عند تحرك شحنة موجبة q باتجاه المجال فإن طاقة وضعها الكهربائية تنخفض ، ذلك أن

$$\Delta U = U_B - U_A = q \Delta V = -qEd \quad (25.7)$$

أي أن $U_B < U_A$.

و يحدث العكس من ذلك لو كانت الشحنة سالبة، فإنها لو تركت حرة لتحركت من B إلى A لكي تنخفض طاقة وضعها. أما نقلها من A إلى B فإنه يزيد من طاقة وضعها. قارن بين ما يحدث لشحنة موجبة عندما تتحرك بحرية في مجال كهربائي بما يحدث لكتلة m تتحرك بحرية في مجال جذب الأرض حيث تؤدي حركتها إلى انخفاض طاقة وضعها على حساب زيادة طاقتها الحركية ، انظر شكل b أعلاه.

لنتأمل الآن في وضع أعم من السابق. ففي الشكل أسفله الخط الواصل بين A و B يميل بزاوية θ على اتجاه المجال المنتظم. بتطبيق علاقة (25.3) لإيجاد فرق الجهد بين تلك النقطتين نجد

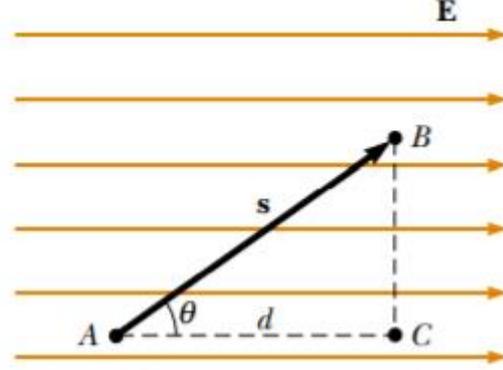


Figure 25.3 A uniform electric field directed along the positive x axis. Point B is at a lower electric potential than point A . Points B and C are at the same electric potential.

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s}$$

$$= -E s \cos \theta = -Ed$$

حيث d هي مسقط s باتجاه المجال E .

و بالرجوع للشكل أعلاه نجد أن فرق الجهد بين الموقعين A و C هو

$$V_C - V_A = -Ed$$

أي أن جهد C هو نفسه جهد B

ويكون التغير في طاقة الوضع لشحنة موجبة q عند تحركها من A إلى B هو

$$\Delta U = -qE s \cos \theta = -qEd$$

وفي الحقيقة فإن جميع النقاط الواقعة في مستوى يتعامد مع مجال كهربائي سيكون

لها نفس الجهد حتى وإن كان المجال غير منتظم. مثل هذا المستوى يسمى سطح تساوي جهد Equipotential surface. وفي الشكل أعلاه كل مستوى يتعامد مع المجال فهو سطح تساوي جهد وله جهد خاص به ويتناقص الجهد باتجاه المجال ، وإذا كان المجال منتظماً فإن سطوح تساوي الجهد تكون مستويات متوازية ومتعامدة مع المجال. ولا يستطيع المجال تحريك أي شحنة على سطح تساوي الجهد.

للمقارنة فإن أي مستوى أفقي حول سطح الأرض فهو سطح تساوي جهد نسبة لمجال جذب الأرض ، و يتطلب تحريك أي جسم عليه قوة أخرى غير تلك الناتجة من قوة جذب الأرض، فجاذبية الأرض لا تستطيع تحريك الأجسام أفقياً.

مثال (25.1) وصلت بطارية فرق الجهد بين قطبيها $12 V$ بلوحيين موصلين متوازيين تفصلهما مسافة 0.3 cm . أوجد شدة المجال بين اللوحيين.

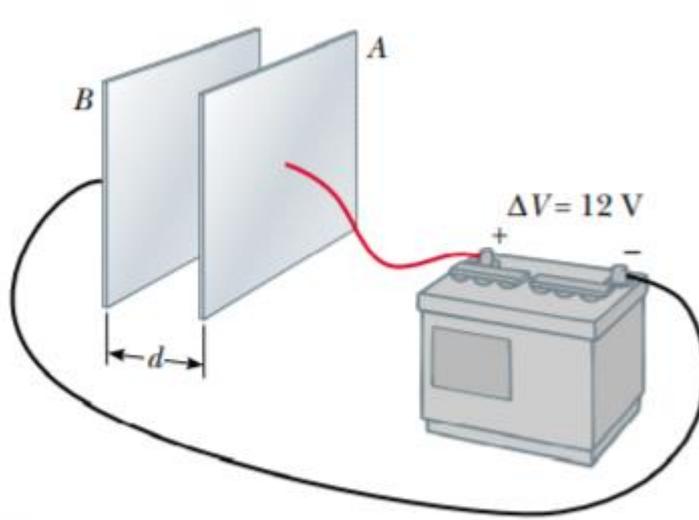


Figure 25.5 (Example 25.1) A 12-V battery connected to two parallel plates. The electric field between the plates has a magnitude given by the potential difference ΔV divided by the plate separation d .

الحل

عند توصيل اللوحيين بالبطارية يكتسب اللوح الموصل بالقطب الموجب شحنة موجبة و اللوح الموصل بالقطب السالب شحنة سالبة. ويتكون بين اللوحيين فرق جهد مساو لجهد البطارية وينشأ مجال كهربائي ينطلق من اللوح الموجب نحو السالب. عندما تكون المسافة بين اللوحيين صغيرة مقارنة بأبعاد اللوحيين يمكن اعتبار المجال منتظماً بين اللوحيين ، وعليه فمن العلاقة $V_B - V_A = -Ed$ نجد

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12V}{0.3 \times 10^{-2}m} = 4.0 \times 10^3 \frac{V}{m}$$

مثال (25.2) اطلق بروتون من السكون في مجال كهربائي شدته 8×10^4 V/m فتسارع من A نحو B التي تبعد عنها مسافة 0.5 m باتجاه المجال. احسب سرعة البروتون عند B .

الحل

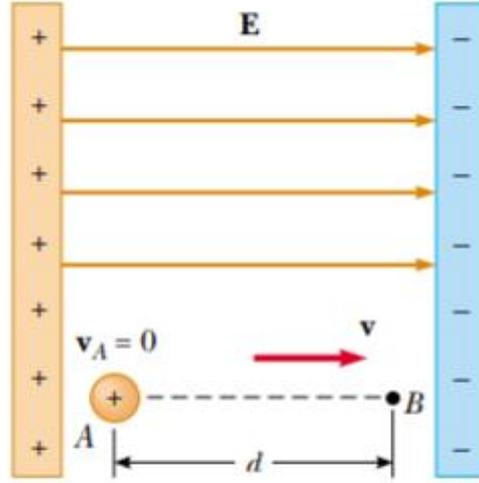


Figure 25.6 (Example 25.2) A proton accelerates from A to B in the direction of the electric field.

عند تحرك البروتون من A إلى B تنخفض طاقة وضعه. ومن قانون حفظ الطاقة الميكانيكية لا بد وأن تزداد الطاقة الحركية بنفس المقدار. أي أن

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} m v^2 - 0 \right) + e \Delta V = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{-2e \Delta V}{m_p}} = \sqrt{\frac{-2e(-Ed)}{m_p}} = \sqrt{\frac{2eEd}{m_p}} = \dots$$

$$= 2.8 \times 10^6 \frac{m}{s}$$

الجهد الكهربائي حول شحنة نقطية

لنتأمل في الشكل التالي ولنوجد فرق الجهد بين النقطتين A و B الواقعتين في مجال الشحنة النقطية الموجبة q .

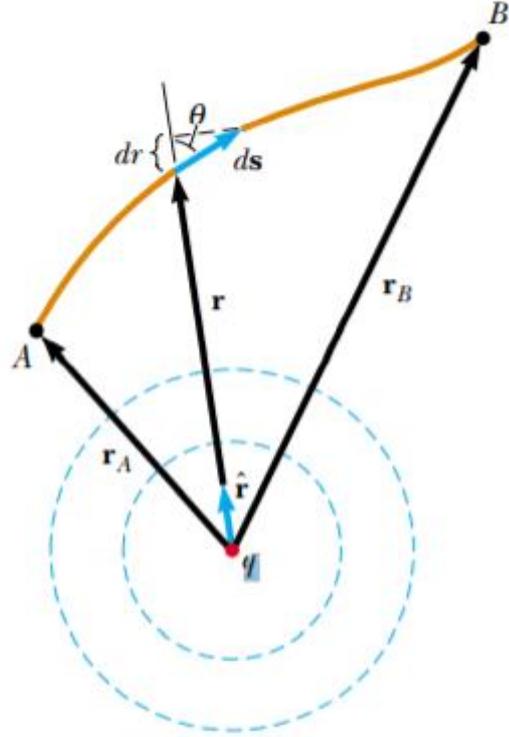


Figure 25.7 The potential difference between points A and B due to a point charge q depends *only* on the initial and final radial coordinates r_A and r_B . The two dashed circles represent intersections of spherical equipotential surfaces with the page.

من علاقة (25.3) نجد

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

حيث $\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$. لذا فإن

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

ولكن

$$\hat{r} \cdot d\vec{s} = ds \cos \theta = dr$$

و بالتعويض نجد

$$V_B - V_A = -kq \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left. \frac{kq}{r} \right|_{r_A}^{r_B} = kq \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (25.10)$$

تبين هذه العلاقة أن فرق الجهد بين A و B في الشكل أعلاه مستقل عن شكل المسار الذي يصل بينهما و إنما يعتمد على إحداثيات النقطتين فقط.

الآن بجعل النقطة A تقع في اللانهاية يصبح كل من $\frac{1}{r_A}$ و V_A ، كما هو المعتاد ، يساوي الصفر لذا وبعد حذف القرينة B نجد أن الجهد الكهربائي على بعد r من أي شحنة نقطية q هو

$$V = k \frac{q}{r} \quad (25.11)$$

وتدل هذه الصيغة على أن إشارة الجهد تعتمد على إشارة الشحنة فهو موجب حول الشحنة الموجبة وسالب حول الشحنة السالبة.

س1 ما هو شكل سطوح تساوي الجهد حول شحنة نقطية؟

ج1 حيث أن المجال الكهربائي شعاعي حول الشحنة وحيث أن سطح تساوي الجهد لا بد وأن يكون متعامداً مع المجال لذا فإن سطوح تساوي الجهد في هذه الحالة لا بد وأن تكون سطوحاً كروية متمركزة مع الشحنة (أي تقع الشحنة في مركزها).

س2 ما هو الجهد الكهربائي عند نقطة تقع في مجال مجموعة من شحن نقطية؟

ج2 هو المحصلة الجبرية لمجموعة الجهود المتولدة منها فرادى عند تلك النقطة.

$$V_p = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

$$V_p = k \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (25.12)$$

مثال 25.3 وجد أن شدة المجال على بعد r من شحنة نقطية q هو $E = 6 \times 10^2 \frac{V}{m}$ بينما الجهد هو $V = 10 V$. أوجد مقدار كل من r و q

الحل

$$V = k \frac{q}{r} \quad \text{و} \quad E = k \frac{q}{r^2} \quad \text{ومن ذلك نجد} \quad V = Er \quad \text{و}$$

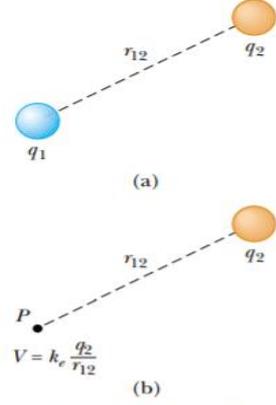
$$r = \frac{V}{E} = \frac{10V}{6 \times 10^2 V/m} = 0.017m$$

وبالتعويض عن r في علاقة الجهد نجد

$$q = \frac{Vr}{k} = \frac{(10V)(0.017m)}{9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}} = 0.0185 \times 10^{-9} = 18.5 pC$$

طاقة وضع شحنتين نقطيتين موجودتين حول بعض

دعنا ندرس طاقة وضع نظام مكون من جسيمتين مشحونتين حول بعض. ليكن V_2 هو الجهد الكهربائي الناشئ من الشحنة q_2 عند النقطة p شكل b . الشغل اللازم بذله بقوة خارجية لإحضار شحنة q_1 من اللانهاية بدون تسارع إلى النقطة p هو



Active Figure 25.10 (a) If two point charges are separated by a distance r_{12} , the potential energy of the pair of charges is given by $k_e q_1 q_2 / r_{12}$. (b) If charge q_1 is removed, a potential $k_e q_2 / r_{12}$ exists at point P due to charge q_2 .

$$q_1 V_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

ذلك أن الجهد في اللانهاية يساوي الصفر

يؤدي هذا الشغل إلى ضخ طاقة في النظام المكون من الشحنتين ويظهر على هيئة طاقة وضع U لهما عندما تكونان على بعد r_{12} من بعض ، شكل **a** . أي أنه يمكن التعبير عن طاقة الوضع هذه بالصيغة

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (25.13)$$

لاحظ أن إشارة U تكون موجبة عندما تكون الشحنتان متماثلتي الإشارة ، وهذا يتسق مع حقيقة أنه يلزم بذل شغل موجب بقوة خارجية لتقريب الشحنتين من بعض لوجود تنافر بينهما. بينما لو كانت الشحنتان مختلفتي الإشارة لكانت U سالبة الإشارة مما يستلزم بذل شغل سالب على النظام ضد قوة التجاذب بين الشحنتين عند اقترابهما من بعض بدون تسارع أي يكون اتجاه هذه القوة عكس اتجاه الإزاحة لمنع تسارع q_1 نحو q_2 . يمثل شكل **b** المشهد قبل وصول q_1 إلى النقطة **p** .

وإذا كان النظام مكوناً من أكثر من شحنتين يمكن الحصول على طاقة الوضع للنظام بحساب U لكل زوج من الشحنتات و إيجاد المحصلة الجبرية لها. فمثلا طاقة وضع ثلاث شحن حول بعض هي

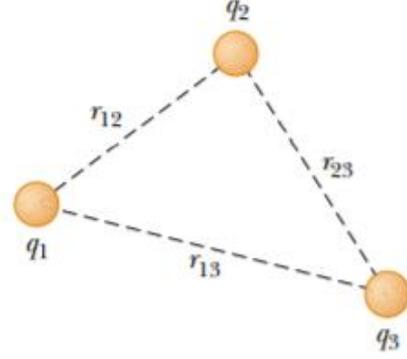


Figure 25.11 Three point charges are fixed at the positions shown. The potential energy of this system of charges is given by Equation 25.14.

$$U = k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \quad (25.14)$$

يمثل الحد الأول الشغل اللازم لإحضار q_1 من اللانهاية بدون تسارع لتصبح على بعد r_{12} من q_2 أما الحدان الثاني والثالث فهما للشغل اللازم لإحضار q_3 من اللانهاية دون تسارع إلى موقعها في الشكل أعلاه.

مثال 25.4 تأمل في الشكل التالي ثم

أ - أوجد الجهد عند النقطة p .

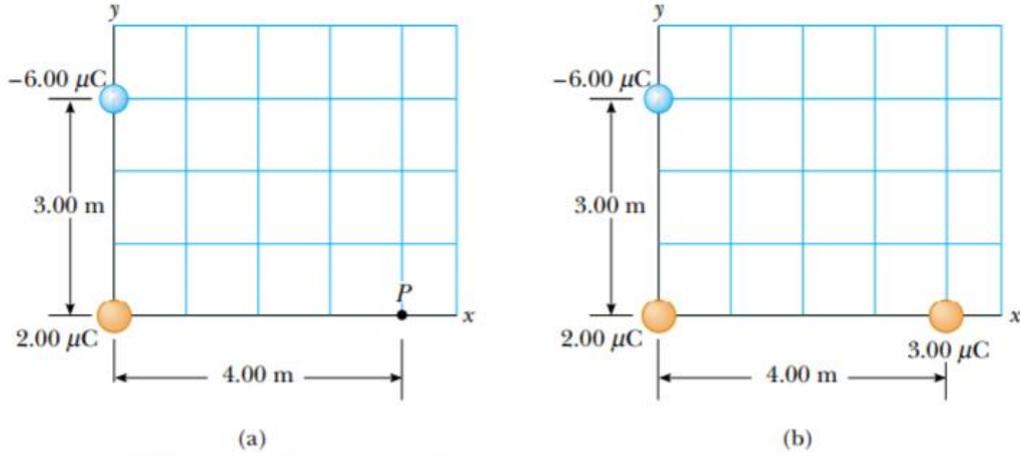


Figure 25.12 (Example 25.3) (a) The electric potential at P due to the two charges q_1 and q_2 is the algebraic sum of the potentials due to the individual charges. (b) A third charge $q_3 = 3.00 \mu\text{C}$ is brought from infinity to a position near the other charges.

الحل الجهد عند p هو المجموع الجبري للجهدين V_1 و V_2 الناشئين من الشحنتين $q_1 = 2.0 \mu\text{C}$ و $q_2 = -6 \mu\text{C}$

$$V_p = V_1 + V_2 = k \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) =$$

$$\left(9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \left(\frac{2 \times 10^{-6} \text{C}}{4\text{m}} + \frac{-6 \times 10^{-6} \text{C}}{5\text{m}} \right) \\ = -6.29 \times 10^3 \text{V}$$

ب أوجد التغير في طاقة وضع النظام عندما تصل شحنة ثالثة $q_3 = 3 \mu\text{C}$ من اللانهاية حتى النقطة p . انظر شكل b

الحل لتكن طاقة الوضع الابتدائية $U_i = 0$ عندما كانت q_3 في اللانهاية. عندئذ ستكون طاقة الوضع النهائية بعد وصول q_3 إلى p هي $U_f = q_3 V_p$. لذلك فإن التغير في طاقة الوضع سيكون

$$\Delta U = U_f - U_i = q_3 V_p - 0 \\ = (3 \times 10^{-6} \text{C})(-6.29 \times 10^3 \text{V}) \\ = -1.89 \times 10^{-2} \text{J}$$

أي أن طاقة وضع النظام المكون من الشحن الثلاث نتيجة انضمام q_3 إليه قد انخفضت بهذا المقدار وعلينا بذل شغل موجب بقوة خارجية لو أردنا إعادة q_3 إلى وضعها السابق في اللانهاية.

مثال 25.5 أثبت أن كثافة الشحنة السطحية على الأجزاء المدببة (ذات قطر تقوس صغير) من سطح موصل مشحون في حالة اتزان كهربائي تكون أكبر من الكثافة على الأجزاء المفلطحة (ذات نصف قطر تقوس كبير).

ملحوظة: سبقت الإشارة إلى هذه الحقيقة ، دون برهان ، عند مناقشة خصائص الموصلات في حالة الاتزان الكهربائي (chap 24).

الحل نتأمل في الشكل أسفله المكون من كرتين موصلتين مختلفتي نصف القطر مشحونتين و متصلتين كهربائياً مع بعض وفي حالة اتزان كهربائي. كما هو معلوم ، ستستقر شحنة كل منهما على سطحها الخارجي وسيكون المجال عمودياً على السطح على كل منهما. و هذا يقتضي بناء على علاقة (25.3) أن يكون فرق الجهد بين أي نقطتين على السطح لكل منهما يساوي الصفر أي أن سطح كل منهما هو سطح تساوي جهد. الجهد على سطح كرة مشحونة نصف قطرها r وشحنتها q هو $V = k q/r$ وحيث أن الكرتين في حالة اتصال واتزان كهربائي فلا بد أن لهما نفس الجهد ، وعليه فإن

$$\frac{kq_1}{r_1} = \frac{kq_2}{r_2}$$

وبحذف k نجد

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

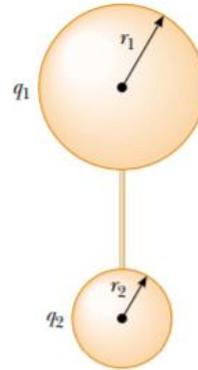


Figure 25.25 (Example 25.9) Two charged spherical conductors connected by a conducting wire. The spheres are at the same electric potential V .

من ناحية أخرى فإن شدتي المجال على سطحي كل من الكرتين هما

$$E_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} \quad \text{و} \quad E_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} \quad \text{وهذا يعطينا}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2}$$

و بالتعويض عن $\frac{q_1}{q_2}$ بما تساويه أعلاه نجد

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_1 r_2^2}{r_2 r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

وحيث أن $r_1 > r_2$ لذا لا بد وأن $E_2 > E_1$ أي أن المجال بالقرب من سطح الكرة الكبيرة أقل من المجال قرب سطح الكرة الصغيرة. وحيث أن المجال قرب السطح يتناسب طردياً مع كثافة الشحنة السطحية $(E = \frac{\sigma}{\epsilon_0})$ لذا لا بد وأن كثافة الشحنة السطحية على الكرة الصغيرة أكبر منها على سطح الكرة الكبيرة. وهو المطلوب إثباته.

Chapter 26

Capacitance and Dielectrics

السعة و العوازل



مقدمة : السعة **capacitance** هي الصفة الفيزيائية الملازمة لأداة كهربائية تسمى المكثف **capacitor** ويرمز له في الدارات الكهربائية بالرمز **||** . تستخدم هذه الأداة لتخزين الشحنة الكهربائية ثم تفريغها بكيفيات مختلفة تناسب مختلف الأغراض في الدارات الكهربائية والإلكترونية. والمكثف هو أول أدوات ثلاث ستمر معنا في هذا المقرر، لا يخلو منها غالباً أي جهاز كهربائي. الأداة الأخرى هما المقاوم **resistor** و سيمر معنا في **chapter 27** والملف **inductor** و سيمر معنا في **chapter 32** . وتصنع المكثفات بأشكال وأحجام مختلفة، انظر الشكل أعلاه.

Definition of capacitance

تعريف سعة المكثف

عند ربط موصلين معزولين كهربائياً عن بعض ، كما في الشكل أسفله ، بنهايتي بطارية

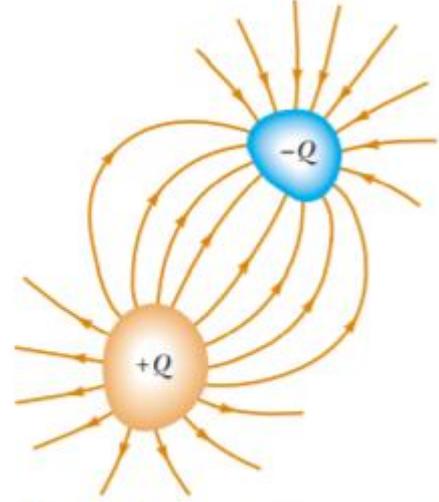


Figure 26.1 A capacitor consists of two conductors. When the capacitor is charged, the conductors carry charges of equal magnitude and opposite sign.

يكتسب الموصل المربوط بالنهاية الموجبة للبطارية شحنة موجبة $+Q$ بينما يكتسب الموصل المربوط بالنهاية السالبة للبطارية شحنة سالبة $-Q$ مساوية للموجبة في المقدار ويتولد بينهما فرق جهد ΔV . لقد دلت التجارب على وجود تناسب طردي بين الشحنة المتراكمة على أحد الموصلين وفرق الجهد بينهما. يشكل هذان الموصلان أداة تعرف بالمكثف. وعند فصل الموصلين عن البطارية يحتفظان بشحنتيهما لمدة طويلة. تُعرّف سعة المكثف ويرمز لها بالرمز C بأنها النسبة بين الشحنة الموجبة المتراكمة (المخزنة) على الموصل موجب الشحنة وبين فرق الجهد بين الموصلين، وهي نسبة ثابتة للمكثف الواحد تعتمد على أبعاده فقط ، أي أن :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (26.1)$$

وهي دوماً كمية موجبة لأن كلا من Q و ΔV تؤخذ موجبة. و وحدة السعة كما هو واضح من هذه العلاقة هي كولومبا فولط أي (C/V) وتسمى فاراد ويرمز له بالرمز F أي أن

$$1F = 1 \frac{C}{V}$$

وفي الحياة العملية تعد هذه الوحدة كبيرة جداً مقارنة بسعة المكثفات التي تستخدم في المعدات والأجهزة الكهربائية، لذا يشيع استخدام أجزاء صغيرة منها مثل:

$$1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F}$$

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$$

$$1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$$

$$1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$$

و بالتأمل في الشكل أسفله نجد أنه لمكثف متوازي اللوحين عند ربط اللوح الأيمن بالطرف السالب لبطارية يتولد في سلك التوصيل مجال كهربائي يتجه نحو البطارية مما يسبب حركة لإلكترونات التوصيل عكس اتجاه المجال فيشحن الجانب الأيمن للمكثف بشحنة سالبة. ويحدث العكس بالنسبة للجانب الأيسر من المكثف حيث تنتقل الإلكترونات من اللوح نحو البطارية فيصبح اللوح موجب الشحنة. تقف

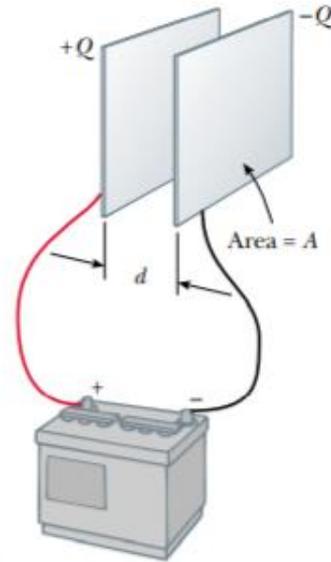


Figure 26.2 A parallel-plate capacitor consists of two parallel conducting plates, each of area A , separated by a distance d . When the capacitor is charged by connecting the plates to the terminals of a battery, the plates carry equal amounts of charge. One plate carries positive charge, and the other carries negative charge.

حركة الإلكترونات عند حدوث الاتزان الكهربائي أي عندما يتلاشى فرق الجهد بين اللوح وقطب البطارية.

كيفية إيجاد صيغة لسعة مكثف

تعتمد سعة المكثف على أبعاده فقط وذلك ما سيتبين لنا من الأمثلة التالية. وتعتمد طريقة إيجاد صيغة لسعة مكثف على ملاحظة وجود رابط بين المجال وفرق الجهد كما تعبر عنه علاقة (25.3) . ويوجد مجال وفرق جهد بين نهايتي كل مكثف مشحون.

مثال 26.1 أوجد صيغة لسعة كرة ذات نصف قطر a وتحمل على سطحها شحنة $+Q$

الحل يمكن تخيل أن هذه الكرة محاطة بكرة أخرى متمركزة معها وذات نصف قطر كبير جداً (لانهايي) وتحمل شحنة $-Q$. عندئذ الجهد على سطح الكرة الخارجية يساوي الصفر لأنه يقع في اللانهاية بينما الجهد على سطح الكرة الداخلية هو $V = kQ/a$ وبذلك يكون فرق الجهد بين سطحي الكرتين المشحونتين هو $\Delta V = kQ/a$. الآن من تعريف السعة نجد

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{k \frac{Q}{a}} = 4\pi\epsilon_0 a \quad (26.2)$$

أي أن سعة هذه الكرة تعتمد على نصف قطرها فقط (أي على أبعادها)

تطبيق : احسب سعة كرة نصف قطرها 15 cm

من العلاقة أعلاه نجد

$$C = 4\pi\epsilon_0 a = 4\pi \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \right) (0.15 \text{ m}) \\ = 16.68 \times 10^{-12} = 16.68 \text{ pF}$$

مثال 26.2 أوجد صيغة لسعة مكثف متوازي اللوحين مساحة لوحه A وشحنته Q ويفصل بين لوحيه فراغ عرضه d .

الحل بالرجوع إلى الشكل 26.2 و بفرض أن المسافة بين اللوحين صغيرة جداً فإن المجال بين اللوحين يمكن اعتباره منتظماً ومن ثم سيكون فرق الجهد بين اللوحين هو $\Delta V = Ed$ مع اهمال الإشارة السالبة. من ناحية أخرى فإن

حيث $E = \sigma / \epsilon_0$ أي كثافة الشحنة السطحية على اللوح و منه نجد
 أن $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ وبالتعويض عن E في علاقة فرق الجهد تصبح

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

وبالتعويض في علاقة تعريف السعة نجد أنه للمكثف متوازي اللوحين فإن

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (26.3)$$

وهذه دالة في الأبعاد فقط لأنها تعتمد على مساحة اللوح وعلى المسافة بين اللوحين.

ولمكثف أسطواني ارتفاعه l و نصف قطر اسطوانته الخارجية b واسطوانته الداخلية a يمكن إثبات أن

$$C = \frac{l}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (26.4)$$

ولمكثف كروي الشكل نصف قطره الداخلية a والخارجية b يمكن إثبات أن

$$C = \frac{ab}{k(b-a)} \quad (26.5)$$

لاحظ أنه في كل من هذه العلاقات فإن السعة تعتمد على الأبعاد فقط ولا تعتمد على مقدار الشحنة أو مقدار فرق الجهد أي أن تغيير شحنة المكثف أو تغيير فرق الجهد المطبق عليه لا يؤثر على سعته، حيث إذا زاد أحد هذين المقدارين أو نقص زاد الآخر أو نقص معه بنفس النسبة فتظل النسبة بينهما ثابتة ($C = \frac{Q}{\Delta V}$) لا تتغير إلا بتغيير شكل المكثف أو أبعاده.

مثال 26.3 احسب سعة مكثف متوازي اللوحين يفصل بين لوحيه الفراغ ، إذا كانت المسافة بينهما 1.00 mm ومساحة اللوح $2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

الحل للمكثف متوازي اللوحين

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \right) \left(\frac{2.0 \times 10^{-4} m^2}{1.00 \times 10^{-3} m} \right) =$$

$$1.77 \times 10^{-12} F = 1.77 pF$$

مثال 26.4 أوجد طول ضلع مكثف متوازي اللوحين مربع الشكل إذا كانت المسافة بين لوحيه في الفراغ $1.0 mm$ وسعته $1.0 F$

الحل

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_0 \frac{l^2}{d}$$

حيث l طول ضلع المربع

$$l^2 = \frac{Cd}{\epsilon_0} \rightarrow l = \sqrt{\frac{Cd}{\epsilon_0}} = \dots = 1.063 \times 10^4 m$$

أي أن l طول ضلع مكثف بهذه المواصفات يجب أن لا يقل عن $10.63 km$
س: ما الذي يستفاد من هذه النتيجة؟

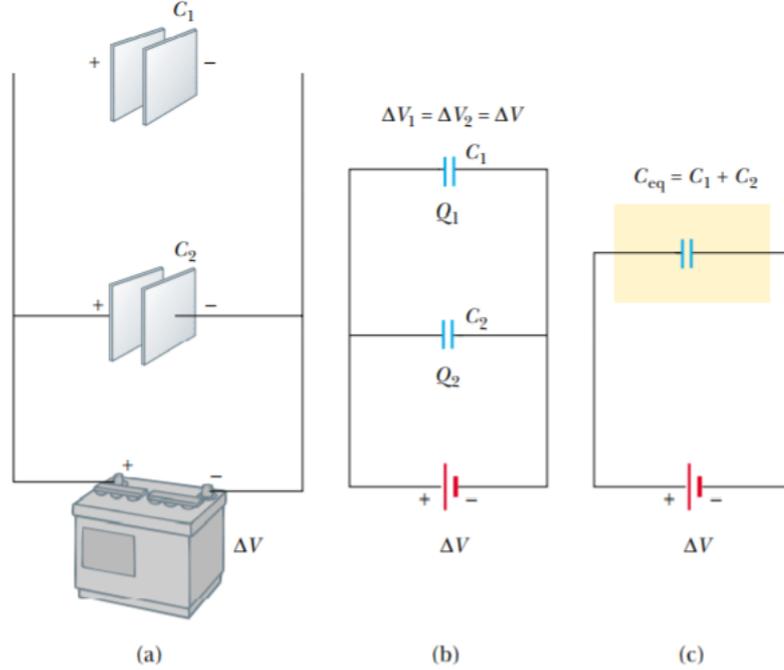
ربط المكثفات مع بعض والسعة المكافئة

combination of capacitors

يمكن ربط (توصيل) مجموعة مكثفات مع بعض إما على التوازي وإما على التوالي. يمكن استبدال أي مجموعة بمكثف واحد فقط تغني سعته عن سعاتها مجتمعة وتعرف بالسعة المكافئة ويرمز لها بالرمز C_{eq} وتؤدي نفس الدور الذي تؤديه المجموعة إذا كان الجهد المطبق عليها هو نفس الجهد المطبق على المجموعة.

أولاً: الربط على التوازي Parallel Combination

المكثفان C_1 و C_2 موصلان في الشكل التالي على التوازي مع بعض وموصلان بمصدر شاحن فرق الجهد بين نهايتيه ΔV . سيكون فرق الجهد متساو عبر المكثفين ومساو لجهد المصدر الشاحن



Active Figure 26.9 (a) A parallel combination of two capacitors in an electric circuit in which the potential difference across the battery terminals is ΔV . (b) The circuit diagram for the parallel combination. (c) The equivalent capacitance is $C_{eq} = C_1 + C_2$.

أي أن

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

الشحنة التي يستمدتها كل مكثف من المصدر هي

$$Q_1 = C_1 \Delta V_1 \quad \text{و} \quad Q_2 = C_2 \Delta V_2$$

ويكون مجموع الشحنة المستمدة من المصدر هو مجموع الشحنتين

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V$$

ولو أريد استبدال المكثفين في الدارة بمكثف مكافئ لهما لوجب أن تكون شحنته هي Q عندما يطبق عليه فرق جهد ΔV ومن ثم فمن تعريف السعة يجب أن تكون السعة المكافئة

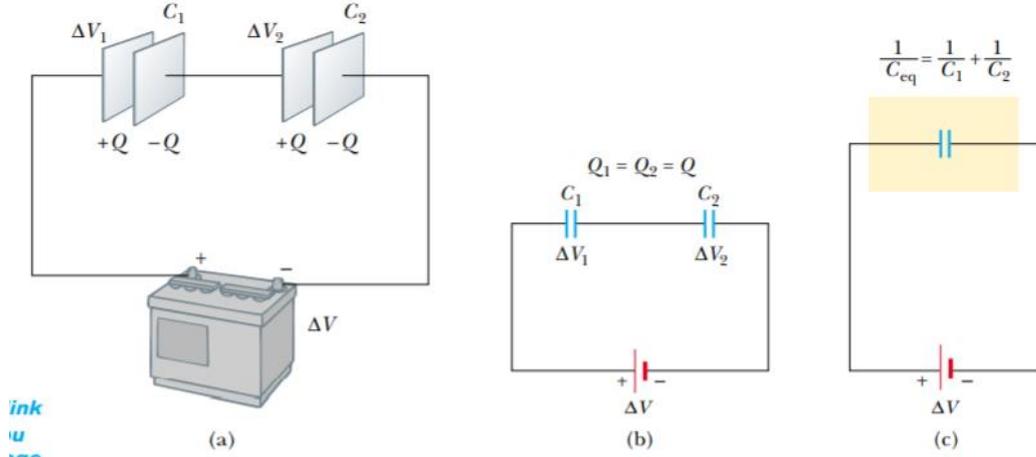
$$C_{eq} = (C_1 + C_2)$$

أي مجموع السعتين. وبالتعميم فعند ربط مجموعة مكثفات على التوازي فإن السعة المكافئة لها هي

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (26.6)$$

ثانياً الربط على التوالي Series combination

المكثفان C_1 و C_2 في الشكل التالي موصلان على التوالي مع مصدر ΔV .



ink
u
ige
nces
s
itors.
r

Active Figure 26.10 (a) A series combination of two capacitors. The charges on the two capacitors are the same. (b) The circuit diagram for the series combination. (c) The equivalent capacitance can be calculated from the relationship

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Activate W

عند ربط المكثفين بهذه الكيفية مع مصدر شاحن تنتقل بعض الإلكترونات من اللوح الأيسر لـ C_1 إلى اللوح الأيمن من C_2 مما يكسب الأول منهما شحنة موجبة $+Q$ والآخر شحنة سالبة $-Q$ ، و نتيجة لذلك ستطرد شحنة $-Q$ من اللوح الأيسر من C_2 نحو اللوح الأيمن من C_1 مما يكسب الأول منهما شحنة موجبة $+Q$ و الآخر شحنة سالبة $-Q$. من أجل ذلك تكون الشحنة على أي من مكثفين موصلين على التوالي متساوية وتساوي Q المستمدة من المصدر.

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

من ناحية أخرى فإن فرق الجهد عبر المصدر قد توزع على المكثفين

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Type equation here.

وحيث ان Q هي شحنة المكثف المكافئ لذا من تعريف السعة نجد أن

$$\frac{\Delta V}{Q} = \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

وبالتعميم نجد أنه عند ربط مجموعة مكثفات على التوالي فإن مقلوب السعة المكافئة هو

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (26.7)$$

مثال 26.5 ادرس الدارة في الشكل التالي ثم أوجد السعة المكافئة بين النقطتين a و b علماً بأن الأرقام على الشكل تدل على السعة بوحدة الميكرو فاراد.

الحل

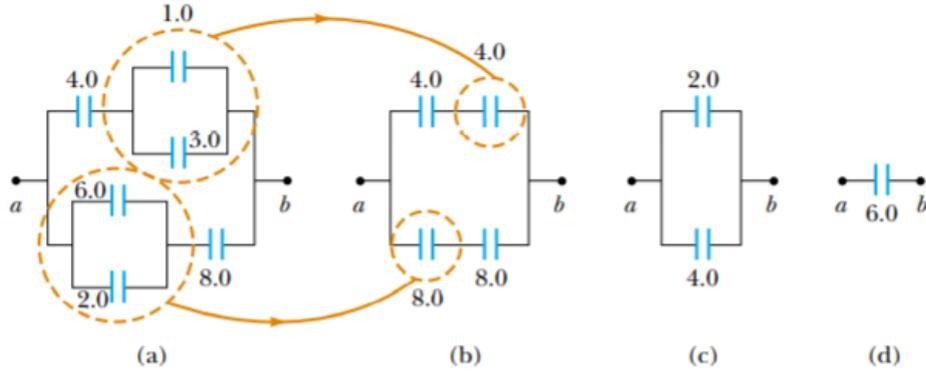


Figure 26.11 (Example 26.4) To find the equivalent capacitance of the capacitors in part (a), we reduce the various combinations in steps as indicated in parts (b), (c), and (d), using the series and parallel rules described in the text.

يلاحظ على الشكل a أن بعض المكثفات موصلة على التوازي بينما أخرى على التوالي. فالمكثفان 1 و 3 على التوازي، كذلك 2 و 6 على التوازي. شكل b اختصار لشكل a عوض فيه عن المجموعتين التي على التوازي بالمكافئة لكل منهما. في شكل b في الفرع العلوي 4 و 4 موصلة على التوالي كذلك في الفرع السفلي 8 و 8 على التوالي. بتطبيق قاعدة التوصيل على التوالي لإيجاد السعة المكافئة $\left(\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$ نحصل على شكل c ، المكثفان في

شكل c موصلان على التوازي لذا فإن السعة المكافئة بين النقطتين a, b هي $6\mu F$

الطاقة المخزنة في مكثف مشحون

أثناء شحن مكثف تزداد شحنته ويزداد معها بشكل طردي فرق الجهد بين نهايتيه كما في الشكل أسفله. لذا عندما يكون فرق الجهد بين نهايتي المكثف هو ΔV فإن نقل عنصر شحنة dq من إحدى نهايتيه للأخرى يتطلب بذل عنصر شغل

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

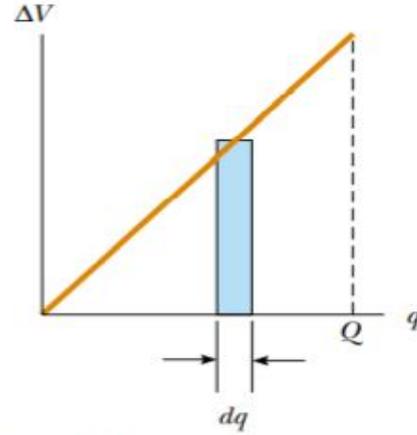


Figure 26.12 A plot of potential difference versus charge for a capacitor is a straight line having a slope $1/C$. The work required to move charge dq through the potential difference ΔV existing at the time across the capacitor plates is given approximately by the area of the shaded rectangle. The total work required to charge the capacitor to a final charge Q is the triangular area under the straight line, $W = \frac{1}{2} Q \Delta V$. (Don't forget that $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$; hence, the unit for the triangular area is the joule.)

ويكون الشغل الكلي اللازم لشحن المكثف من 0 حتى Q هو

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

هذا الشغل يتحول إلى طاقة وضع كهربائية U تخزن في المكثف. أي أن

$U = \frac{Q^2}{2C}$. و بالاستفادة من تعريف السعة ($C = \frac{Q}{\Delta V}$) نجد أنه يمكن أن نكتب

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (26.8)$$

أي ان الطاقة المخزنة في مكثف مشحون تتناسب طردياً مع مربع شحنته أو مربع فرق الجهد عبره.

وحيث أن المكثف المشحون لا بد أن يتولد مجال كهربائي E بين نهايتيه ، لذا إضافة إلى ما سبق فإنه يمكن التعبير عن U بدلالة المجال . لنأمل في مكثف متوازي اللوحين مشحون مساحة لوحه A والمسافة بينهما d ويشغل ما بين اللوحين بالهواء (الفراغ تجاوزاً) عندئذ فإن سعته هي $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ وفرق الجهد بين نهايتيه $\Delta V = Ed$ لذا فمن العلاقة $U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$ وبعد التعويض عن C وعن ΔV نجد

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} (E^2 d^2) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (Ad) E^2 \quad (26.9)$$

وحيث أن Ad تمثل حجم الحيز بين لوحي المكثف وهو مشغول بالمجال لذا بالقسمة على Ad نحصل على ما يعرف بكثافة الطاقة لوحة الحجم

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (26.10)$$

ووحدة u هي $\frac{J}{m^3}$ أي جول m^3 . (سيرد معنا لاحقاً chap 32 الصيغة المماثلة لتلك و الخاصة بالمجال المغناطيسي). وهكذا نجد أن الطاقة المخزنة في مكثف مشحون تتناسب مع مربع شدة المجال داخله. وهذه النتيجة تصدق على جميع الأوضاع فحيثما يوجد مجال كهربائي فهناك طاقة مصاحبة له تتناسب مع مربع شدته.

مثال 26. 6 في الشكل التالي شحن مكثفان C_1 و C_2 حيث $(C_1 > C_2)$ إلى نفس فرق الجهد ΔV_i . فصل المكثفان عن المصدر الشاحن ثم ربطا مع بعض بحيث يتصل سالب C_2 مع موجب C_1 وموجب C_2 مع سالب C_1 وذلك بعد قفل القاطعتين S_1 و S_2 . أوجد :

أ - فرق الجهد ΔV_f بين a و b بعد ربط المكثفين مع بعض.

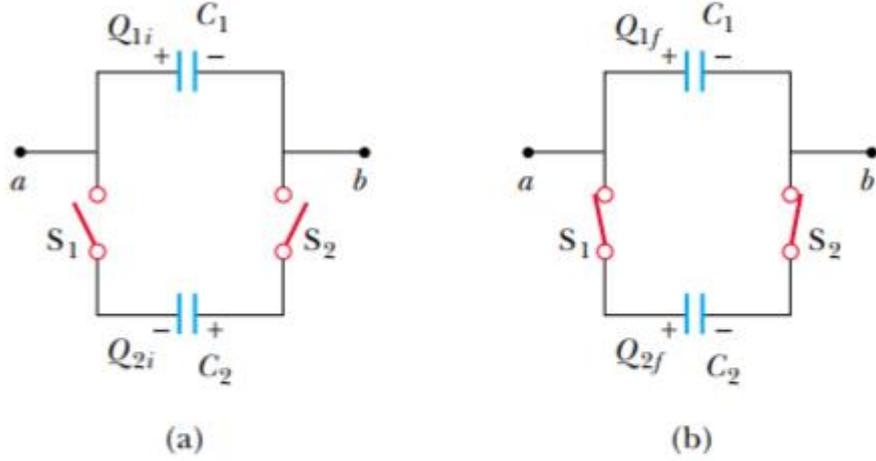


Figure 26.13 (Example 26.5) (a) Two capacitors are charged to the same initial potential difference and connected together with plates of opposite sign to be in contact when the switches are closed. (b) When the switches are closed, the charges redistribute.

الحل شحنة المكثفين في الجهة اليسرى قبل التوصيل مع بعض هي

وبعد التوصيل مع بعض يتم دمج للشحنتين في الجهة اليسرى وكذلك دمج للشحنتين في الجهة اليمنى. بحيث تكون الشحنة الكلية على الجانب الأيسر بعد التوصيل هي

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 - C_2) \Delta V_i$$

بعد التوصيل أصبح المكثفان موصلين على التوازي لذا فإن السعة المكافئة لهما هي مجموع سعتيهما. أي $C_{eq} = C_1 + C_2$ ومن ثم فإن فرق الجهد بينهما سيصبح

$$\Delta V_f = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right) \Delta V_i$$

ب أوجد الطاقة المخزنة في المكثفين قبل وبعد الربط مع بعض

الحل

الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثفين قبل الربط مع بعض هي مجموع الطاقة المخزنة في المكثفين

$$U_i = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V_i)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\Delta V_i)^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) (\Delta V_i)^2$$

وبعد الربط مع بعض فإن الطاقة المخزنة هي أيضاً مجموع طاقتيهما بعد ملاحظة تغير فرق الجهد. أي أن

$$U_f = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V_f)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\Delta V_f)^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) (\Delta V_f)^2$$

$$= \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2 (\Delta V_i)^2 = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2 U_i$$

وبذلك نجد

$$\frac{U_f}{U_i} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2$$

وحيث أن ما بين القوسين في الجهة اليمنى أقل من الواحد (كسر) فهذا يعني أن $U_i > U_f$ أي أنه حدث فقد للطاقة نتيجة لعملية ربط المكثفين مع بعض.

علل لهذا الفقد في الطاقة ؟

يمكن تعليل ذلك بأنه أثناء الربط وإعادة توزيع الشحن سرت تيارات كهربائية في أسلاك التوصيل مما أدى إلى تولد حرارة فيها لوجود مقاومة كهربائية في الأسلاك وهذه الطاقة الحرارية فقدت بالإشعاع.

تأثير مادة العزل على المكثف Capacitor with Dielectrics

المادة العازلة **dielectric** هي مادة غير موصلة كهربائياً مثل المطاط والزجاج والخشب الجاف والميكا والورق. لقد لوحظ أنه عند شحن مكثف سعته C_0 حتى تصبح شحنته Q_0 وفرق الجهد بين نهايتيه ΔV_0 أنه إذا كان يفصل بين نهايتيه الفراغ أو الهواء تجاوزاً فإنه بعد فصله من المصدر الشاحن ثم إدخال مادة عازلة بين نهايتيه فإن فرق الجهد بين نهايتيه ينخفض ، مع بقاء شحنته دون تغيير، إلى مقدار ΔV يعتمد على نوع المادة العازلة. بحيث تصبح

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{K}$$

انظر الشكل أسفله

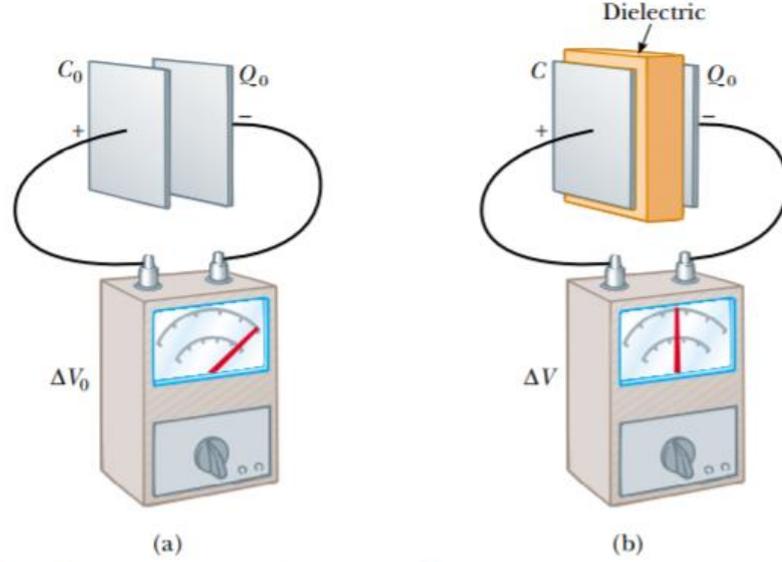


Figure 26.15 A charged capacitor (a) before and (b) after insertion of a dielectric between the plates. The charge on the plates remains unchanged, but the potential difference decreases from ΔV_0 to $\Delta V = \Delta V_0/\kappa$. Thus, the capacitance increases from C_0 to κC_0 .

يعرف K بثابت عزل المادة العازلة حيث $1 \leq K$ ، ويختلف من مادة عازلة لأخرى . وحيث أن شحنة المكثف لم تتغير فإن سعته قد زادت بالضرورة إلى مقدار جديد

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\Delta V_0/K} = K \frac{Q_0}{\Delta V_0}$$

$$C = K C_0 \quad (26.11)$$

بناء على ذلك فلو كان المكثف متوازي اللوحين فإن ادخال مادة عازلة بين لوحيه يجعل سعته تصبح

$$C = K \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (26.12)$$

أي تتضاعف سعته بمقدار ثابت عزل المادة العازلة.

هذا وللمادة العازلة خاصية أخرى مهمة في الحياة العملية تعرف بقوة أو شدة العزل **Dielectric strength** وتعني أكبر مجال كهربائي E_{max} (ومن ثم

أكبر فرق جهد ΔV_{max}) يسمح لها بالتعرض له قبل أن ينهار عزلها ويحدث تسرب أو تفريغ للشحنة من خلالها ، انظر الشكل أسفله. لذا يجب أن يكتب على كل مكثف عند تصنيعه كل من سعته C وأكبر جهد ΔV_{max} يمكن تطبيقه عليه.



Figure 26.16 Dielectric breakdown in air. Sparks are produced when the high voltage between the wires causes the electric field to exceed the dielectric strength of air.

ويمكن تلخيص فوائد وجود مادة عازلة في المكثف في الآتي:

- 1 - زيادة سعة المكثف.
 - 2 - زيادة فرق الجهد الممكن تطبيقه.
 - 3 - ضمان عدم تلامس نهايتي المكثف عند محاولة تقريبيهما من بعض (أي تصغير d بهدف زيادة السعة).
- ويبين الجدول التالي مقادير كل من K و E_{max} لبعض العوازل عند درجة حرارة الغرفة.

Table 26.1

Approximate Dielectric Constants and Dielectric Strengths of Various Materials at Room Temperature		
Material	Dielectric Constant κ	Dielectric Strength ^a (10^6 V/m)
Air (dry)	1.000 59	3
Bakelite	4.9	24
Fused quartz	3.78	8
Mylar	3.2	7
Neoprene rubber	6.7	12
Nylon	3.4	14
Paper	3.7	16
Paraffin-impregnated paper	3.5	11
Polystyrene	2.56	24
Polyvinyl chloride	3.4	40
Porcelain	6	12
Pyrex glass	5.6	14
Silicone oil	2.5	15
Strontium titanate	233	8
Teflon	2.1	60
Vacuum	1.000 00	—
Water	80	—

^a The dielectric strength equals the maximum electric field that can exist in a dielectric without electrical breakdown. Note that these values depend strongly on the presence of impurities and flaws in the materials.

مثال 26.7 أوجد سعة مكثف متوازي اللوحين مساحة لوحه 6 cm^2 ويملاً الحيز بين لوحيه بورق سمكه 1.0 mm

الحل

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = 3.7 \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right) \left(\frac{6 \times 10^{-4} \text{m}^2}{1 \times 10^{-3} \text{m}} \right)$$

$$= 19.6 \text{ pF}$$

س : ماهي أكبر شحنة يمكن استيعابها في المكثف أعلاه؟

ج : أكبر شحنة هي تلك التي يحصل عليها عند تطبيق أكبر فرق جهد حيث

$$\Delta V_{max} = E_{max} d$$

$$E_{max} = \left(16 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right)$$

ومن الجدول أعلاه نجد للورق

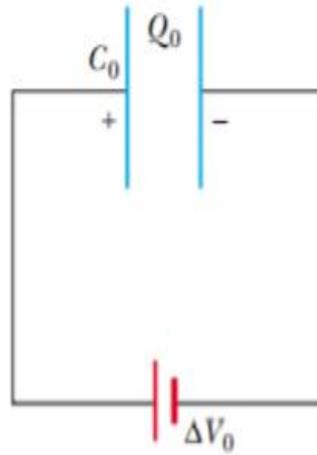
وبالتالي

$$\Delta V_{max} = \left(16 \times 10^6 \frac{V}{m} \right) (1.0 \times 10^{-3} m) = 16 \times 10^3 V$$

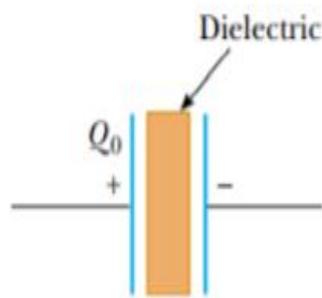
و

$$Q_{max} = C \Delta V_{max} = \dots = 0.31 \mu C$$

مثال 26.8 شحن مكثف متوازي اللوحين بشحنة Q_0 ثم فصل عن المصدر الشاحن وأدخل بين لوحيه مادة ثابت عزلها K . أوجد الطاقة المخزنة في المكثف قبل وبعد إدخال المادة العازلة.



(a)



(b)

Figure 26.20 (Example 26.7) (a) A battery charges up a parallel-plate capacitor. (b) The battery is removed and a slab of dielectric material is inserted between the plates.

الحل الطاقة المخزنة في المكثف قبل إدخال المادة العازلة هي

$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0}$$

بعد إدخال المادة العازلة أصبحت السعة $C = KC_0$ وبذلك تصبح الطاقة المخزنة هي

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2KC_0} = \frac{U_0}{K}$$

وحيث أن $K > 1$ لذا لا بد أن $U < U_0$ أي حدث فقد للطاقة جراء إدخال المادة العازلة.

س : علل لفقد الطاقة ؟

ج : تدل التجربة على أنه عند تقريب المادة العازلة من لوح المكثف المشحون تتكون على جوانبها شحنات مستحثة وبالتالي تنجذب كهربائياً إلى داخل المجال بين اللوحين . الشغل المبذول بقوة المجال الموجود بين اللوحين تم على حساب الطاقة المخزنة.

Chapter 27

Current and resistance

التيار والمقاومة

مقدمة: انحصر اهتمامنا فيما مضى من المنهج على ظاهرة الكهرباء الساكنة **electrostatic** وخصائصها. وفي هذا الفصل والذي يليه سنتناول الكهرباء التيارية المتضمنة حركة الشحنات الكهربائية وبعض خصائص التيار الكهربائي ومقاومة المواد لمرور التيار فيها، والطاقة الكهربائية المصاحبة لذلك.

تعريف التيار الكهربائي

ينشأ التيار الكهربائي من حركة شحنات متماثلة الإشارة باتجاه معين. لنأمل في الشكل أسفله الذي يمثل حركة جسيمات موجبة الإشارة باتجاه يتعامد مع مقطع

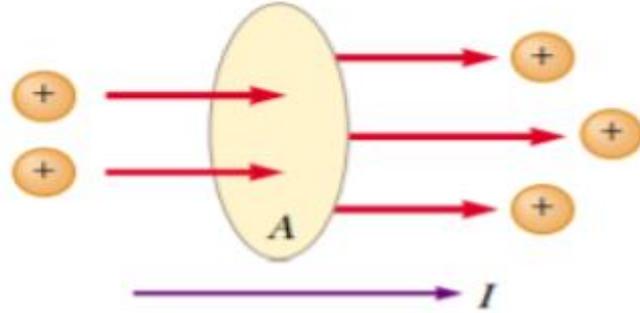


Figure 27.1 Charges in motion through an area A . The time rate at which charge flows through the area is defined as the current I . The direction of the current is the direction in which positive charges flow when free to do so.

ناقل مساحته A . يُعرّف التيار الكهربائي ورمزه I بأنه معدل عبور الشحنات مع الزمن لهذه المساحة أي أن متوسط التيار

$$I_{av} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (27.1)$$

و إذا كانت مدة مراقبة حركة الشحنات صغيرة جداً فإن التيار اللحظي هو

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (27.2)$$

ووحدة التيار هي الأمبير ورمزه A لذلك من العلاقات أعلاه فإن

$$1A = 1 \frac{C}{s} \quad (27.3)$$

وسيمر معنا لاحقاً في chapter 30 تعريف لكل من وحدة التيار (الأمبير) ووحدة الشحنة (الكولومب)

إن من المعتاد أن يؤخذ اتجاه التيار في أي دائرة كهربائية على أنه اتجاه حركة شحنات موجبة الإشارة كما في الشكل أعلاه. وفي أسلاك التوصيل الفلزية فإن الشحنات التي تتحرك حقيقة هي الإلكترونات وهي ذات شحنة سالبة لذا فإن اتجاه التيار في هذه الأسلاك هو عكس اتجاه حركة الإلكترونات فيها. تسمى الجسيمات المشحونة التي تولد بحركتها التيار الكهربائي تسمى ناقلات الشحنة $charge carriers$ سواء كانت موجبة الإشارة أم سالبة الإشارة. ولا تتحرك ناقلات الشحنة إلا مع وجود قوة كهربائية ناشئة من وجود مجال كهربائي ووجود فرق جهد بين أي نقطتين على امتداد الناقل ، ولا يعتبر الناقل في هذه الحالة في حالة اتزان أو ركود كهربائي وهي الحالة التي مرت معنا في chapter 24 حيث أشير فيها إلى انعدام المجال داخل الناقل إذا كان في حالة اتزان كهربائي.

نظرة مجهرية للتيار الكهربائي

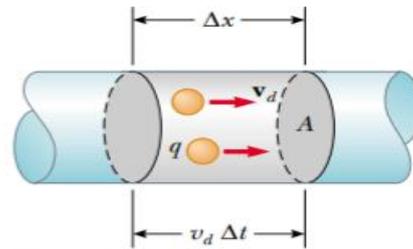


Figure 27.2 A section of a uniform conductor of cross-sectional area A . The mobile charge carriers move with a speed v_d , and the displacement they experience in the x direction in a time interval Δt is $\Delta x = v_d \Delta t$. If we choose Δt to be the time interval during which the charges are displaced, on the average, by the length of the cylinder, the number of carriers in the section of length Δx is $nAv_d \Delta t$, where n is the number of carriers per unit volume.

Activate Windows

يمكن التعبير عن التيار الكهربائي I من منظور مجهري تفصيلي وذلك بالتأمل في الشكل أعلاه.

إذا كان الناقل منتظم المقطع وكانت مساحة مقطعه هي A فإن حجم عنصر طولي منه قدره Δx هو $\Delta x A$ وإذا كان عدد ناقلات الشحنة في وحدة الحجم من هذا الناقل هو n فإن عددها في هذا العنصر الحجمي هو $n\Delta x A$ وإذا كانت شحنة ناقل الشحنة هي q فإن كمية الشحنة في هذا العنصر الحجمي هي $\Delta Q = nq\Delta x A$. ليكن متوسط سرعة حركة ناقلات الشحنة هو v_d وهو ما يعرف بسرعة الاندفاع أو الانسياب **drift velocity** ، عندئذ فإن عبور الشحنات للمسافة Δx يلزم له زمن Δt بحيث تكون $\Delta x = v_d \Delta t$ ومن ثم فإن $\Delta Q = nqv_d \Delta t A$. الآن بالقسمة على Δt نحصل على متوسط التيار

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_d A \quad (27.4)$$

ومما تحسن الإشارة إليه أنه في غياب المجال الكهربائي فإن حركة الكثرونات التوصيل داخل الموصل تكون عشوائية وتعاني من التصادمات مع الذرات بحيث يكون متوسط سرعة حركتها يساوي الصفر. أما في حالة وجود مجال كهربائي فرغم وجود التصادمات إلا أن الإلكترونات تتحرك باتجاه يعاكس اتجاه المجال. انظر الشكل أسفله.

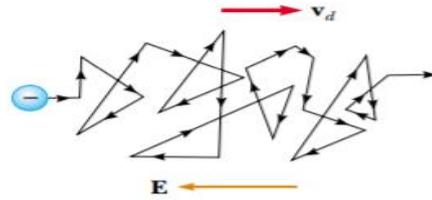


Figure 27.3 A schematic representation of the zigzag motion of an electron in a conductor. The changes in direction are the result of collisions between the electron and atoms in the conductor. Note that the net motion of the electron is opposite the direction of the electric field. Because of the acceleration of the charge carriers due to the electric force, the paths are actually parabolic. However, the drift speed is much smaller than the average speed, so the parabolic shape is not visible on this scale.

مثال 27.1 يمر تيار 10 A في سلك نحاس مساحة مقطعه $3.3 \times 10^{-6} m^2$

أوجد سرعة اندفاع الكترولونات التوصيل v_d في هذا السلك علماً بأن كثافة النحاس هي 8.92 g/cm^3 وأن الوزن الذري للنحاس هو 63.5 g/mol وأن كل ذرة نحاس تسهم بإلكترون توصيل واحد.

الحل

من العلاقة $I = nqv_dA$ نجد

$$v_d = \frac{I}{nqA}$$

حيث كل من A و q و I معلوم المقدار. أما n فعلينا إيجادها. يلاحظ أنه ذكر في المعطيات أن كل ذرة نحاس تسهم بإلكترون توصيل واحد. لذا فإن n هي نفس عدد ذرات النحاس في وحدة الحجم أي في متر مكعب واحد.

حجم مول من النحاس هو

$$V = \frac{M}{\rho}$$

حيث M هي كتلة مول من النحاس أي 63.5 g و ρ كثافة النحاس وتساوي 8.92 g/cm^3 .

لذا فإن

$$V = \frac{63.5 \text{ g}}{8.92 \text{ g/cm}^3} = 7.12 \text{ cm}^3$$

وحيث أن المول من النحاس يحوي عدد أفوجادرو من الذرات أي 6.02×10^{23} ذرة لذا فإن عدد ذرات النحاس في وحدة الحجم هو

$$n = \frac{6.02 \times 10^{23}}{7.12 \text{ cm}^3} = 8.5 \times 10^{22} \frac{\text{atom}}{\text{cm}^3} =$$

$$8.5 \times 10^{22} \frac{\text{atom}}{\text{cm}^3} \times \frac{10^6 \text{ cm}^3}{\text{m}^3} = 8.5 \times 10^{28} \frac{\text{atom}}{\text{m}^3}$$

ومنه نجد أن

$$v_d = \frac{I}{nqA}$$

$$= \frac{10 \frac{C}{s}}{8.5 \times 10^{28} \frac{elec}{m^3} \times 1.6 \times 10^{-19} C \times 3.3 \times 10^{-6} m^2}$$

$$= 2.23 \times 10^{-4} \frac{m}{s} \equiv 0.8 \frac{m}{h}$$

تدل هذه النتيجة على بطء حركة الإلكترونات المتسببة في وجود التيارات الكهربائية في النواقل.

المقاومة وقانون أوم Resistance and Ohm`s law

لنتأمل في جزء طوله l من ناقل مستقيم منتظم المقطع مساحة مقطعه A يسري فيه تيار I نتيجة وجود مجال E داخل الناقل مصاحب لفرق جهد $\Delta V = V_b - V_a$ بين نهايتي هذه القطعة من الناقل ، انظر الشكل أسفله.

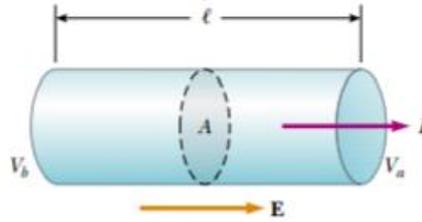


Figure 27.5 A uniform conductor of length l and cross-sectional area A . A potential difference $\Delta V = V_b - V_a$ maintained across the conductor sets up an electric field E , and this field produces a current I that is proportional to the potential difference.

تُعرّف كثافة التيار J في ناقل بأنها

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d \quad (27.5)$$

و وحدة كثافة التيار هي أمبير 1 م² . وهذه العلاقة صحيحة عندما يكون التيار منتظماً على مساحة الناقل ومتعامداً معها.

لقد وجد تجريبياً أن كثافة التيار J تتناسب طردياً مع شدة المجال E لكثير من المواد بحيث يمكن أن نكتب

$$J = \sigma E \quad (27.6)$$

تعبّر σ عن ثابت التناسب وتعرف فيزيائياً بالتوصيلية الكهربائية **conductivity**، ويختلف مقدارها من مادة لأخرى. تعرف علاقة **6** بقانون أوم، ويقال عن كل مادة تنطبق عليها هذه العلاقة أنها مادة أومية مثل الفلزات. المواد التي لا تنطبق عليها هذه العلاقة توصف بأنها غير أومية مثل السيلكون والجرمانيوم. ورغم أهمية قانون أوم في الحياة العملية إلا أنه لا يعد من القوانين الأساسية في الفيزياء لأنه لا يتصف بالشمولية فهو ينطبق على بعض المواد دون بعض.

هناك صيغة أخرى مشهورة لقانون أوم وهي التي نستعملها في حياتنا العملية وتربط بين فرق الجهد والتيار والمقاومة، ويمكن استنتاجها من العلاقات أعلاه.

$$\Delta V = V_b - V_a = El \quad \text{أن chapter 25}$$

(مع إهمال الإشارة السالبة) حيث l هي المسافة بين نقطتين على امتداد المجال المنتظم، لذا فمن صيغة قانون أوم أعلاه نجد

$$J = \sigma \frac{\Delta V}{l}$$

$$\text{ولكن } J = \frac{I}{A} \quad \text{لذا} \quad \frac{I}{A} = \sigma \frac{\Delta V}{l} \quad \text{و منها نجد}$$

$$\Delta V = \left(\frac{l}{\sigma A} \right) I = R I$$

تعبّر R عن المقاومة الأومية للناقل **ohmic resistance** وواضح أنها تعتمد على أبعاده فهي تتناسب طردياً مع طوله وعكسياً مع مساحة مقطعه. وهكذا نصل إلى الصيغة العملية لقانون أوم:

$$R = \frac{\Delta V}{I} \quad (27.7)$$

ووحدة R هي فولط | أمبير. تسمى هذه الوحدة بالأوم ورمزه Ω أي أن

$$1 \Omega = 1 \frac{V}{A} \quad (27.8)$$

يعبر مقلوب التوصيلية عما يعرف بالمقاومة النوعية للمادة **resistivity** ويرمز لها بالرمز ρ لذا:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (27.9)$$

وبذلك نجد أن مقاومة الناقل يمكن التعبير عنها بالعلاقة الهامة التالية

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (27.10)$$

ومنها فإن وحدة المقاومة النوعية ρ هي $\Omega \cdot m$. وتمثل المقاومة النوعية مقاومة قطعة من ناقل أومي طوله $1m$ ومساحة مقطعه m^2

ولا تخلو دائرة كهربائية من مجموعة من المقاومات **resistors** للتحكم في التيارات وفروق الجهد. وتصنع بأشكال وأحجام مختلفة. ومن المقاومات ما يعرف بالمقاوم الكربوني ويصنع على هيئة اسطوانية الشكل يرسم عليها حلقات ذات ألوان مختلفة وفي نهايتي الأسطوانة سلكان موصلان ليتم من خلالهما ربطها ببقية أجزاء الدارة. هذه الحلقات عبارة عن شفرة **code** تدل على مقدار المقاومة. انظر الأشكال التالية



An assortment of resistors used in electrical circuits.

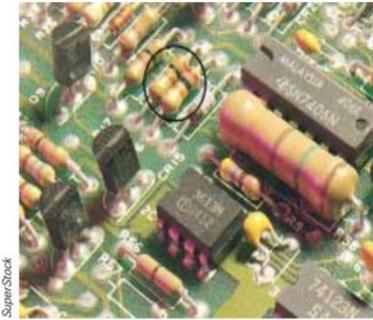


Figure 27.6 The colored bands on a resistor represent a code for determining resistance. The first two colors give the first two digits in the resistance value. The third color represents the power of ten for the multiplier of the resistance value. The last color is the tolerance of the resistance value. As an example, the four colors on the circled resistors are red (= 2), black (= 0), orange (= 10^3), and gold (= 5%), and so the resistance value is $20 \times 10^3 \Omega = 20 \text{ k}\Omega$ with a tolerance value of 5% = 1 k Ω . (The values for the colors are from Table 27.2.)

Table 27.2

Color Coding for Resistors			
Color	Number	Multiplier	Tolerance
Black	0	1	
Brown	1	10^1	
Red	2	10^2	
Orange	3	10^3	
Yellow	4	10^4	
Green	5	10^5	
Blue	6	10^6	
Violet	7	10^7	
Gray	8	10^8	
White	9	10^9	
Gold		10^{-1}	5%
Silver		10^{-2}	10%
Colorless			20%

يمكن من الجدول في الشكل أعلاه حل الشفرة وإيجاد مقدار المقاومة بناء على لون الحلقات وطريقة صفها. في أبسط أنواع هذا النوع من المقاومات توجد أربع حلقات ملونة ، ثلاث منها قريبة من بعض والرابعة بعيدة عنها بعض الشيء. لكل لون رقم يقابله كما في الجدول.

مثال : 27.2 ليكن صف الحلقات (تتابعها) من اليسار نحو اليمين هو أحمر أسود برتقالي ثم ذهبي عندئذ يكون مقدار المقاومة هو

$$20 \times 10^3 \Omega = 20 \text{ k}\Omega$$

وتدل الحلقة الرابعة الذهبية على أن هذه المقاومة قد تزيد أو تنقص بمقدار 5% أي مقدار $1 \text{ k}\Omega$

أي أنه عند حل الشفرة نبتدئ من اليسار ثم ندون الرقم المقابل للون الحلقة الأولى ونكتب على يمينه الرقم الذي يدل عليه لون الحلقة الثانية ثم نضرب في الرقم عشرة مرفوعاً للرقم (الأس) الذي يدل عليه لون الحلقة الثالثة.

تغير المقاومة مع تغير درجة الحرارة

تتغير المقاومة مع تغير درجة الحرارة. وقد دلت التجربة على أنه إذا كان التغير غير كبير في درجة الحرارة فإن التغير في المقاومة النوعية يمكن التعبير عنه بالعلاقة

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad (27.18)$$

حيث ρ مقدار المقاومة النوعية عند درجة الحرارة T و ρ_0 مقدارها عند درجة الحرارة المرجعية T_0 و α معامل تغير المقاومة مع التغير في درجة الحرارة **temperature coefficient of resistivity** . ومن العلاقة أعلاه نجد

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \quad (27.19)$$

وحيث أن المقاومة R تتناسب مع ρ لذا فإن تغير المقاومة مع درجة الحرارة يمكن أن يكتب بالصيغة

$$R = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (27.20)$$

و من ثم

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{\Delta R}{\Delta T} \quad (27.20) *$$

ويبين الجدول التالي مقادير ρ و α لبعض المواد عند درجة حرارة الغرفة.

Resistivities and Temperature Coefficients of Resistivity for Various Materials		
Material	Resistivity ^a ($\Omega \cdot m$)	Temperature Coefficient ^b $\alpha [(\text{°C})^{-1}]$
Silver	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Copper	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Gold	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
Aluminum	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Tungsten	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Iron	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Platinum	11×10^{-8}	3.92×10^{-3}
Lead	22×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Nichrome ^c	1.50×10^{-6}	0.4×10^{-3}
Carbon	3.5×10^{-5}	-0.5×10^{-3}
Germanium	0.46	-48×10^{-3}
Silicon	640	-75×10^{-3}
Glass	10^{10} to 10^{14}	
Hard rubber	$\sim 10^{13}$	
Sulfur	10^{15}	
Quartz (fused)	75×10^{16}	

^a All values at 20°C.

^b See Section 27.4.

^c A nickel–chromium alloy commonly used in heating elements.

تدل الإشارة السالبة لـ α لبعض المواد على أن مقاومتها تنخفض بالتسخين.

مثال 27.3 قارن بين مقاومة قطعة من زجاج مقاومتها النوعية

ومقاومة قطعة الألمنيوم مماثلة لها في الأبعاد. $\rho = 10^{10} \Omega \cdot m$

الحل حيث أن $R = \rho \frac{l}{A}$ لذا فإن

$$\frac{R_g}{R_{Al}} = \frac{\rho_g \frac{l}{A}}{\rho_{Al} \frac{l}{A}} = \frac{\rho_g}{\rho_{Al}} = \frac{10^{10} \Omega \cdot m}{2.82 \times 10^{-8} \Omega \cdot m} = 3.35 \times 10^{17}$$

لاحظ الفرق الهائل بين مقاومة العازل (الزجاج) مقارنة بمقاومة الموصل (الألمنيوم).

مثال 27.4 أ) احسب مقاومة وحدة الطول من سلك نيكروم نصف قطره
. 0.32mm

الحل حيث أن $R = \rho \frac{l}{A}$ فإن مقاومة وحدة الطول هي $\frac{R}{l} = \frac{\rho}{A}$ و
من الجدول السابق نجد للنيكروم $\rho = 1.5 \times 10^{-6} \Omega.m$ ، أما مساحة المقطع
فمن المعطيات

$$A = \pi r^2 = \pi(0.32 \times 10^{-3} m)^2 = 3.22 \times 10^{-7} m^2$$

ومنه نجد مقاومة وحدة الطول من هذا السلك

$$\frac{R}{l} = \frac{\rho}{A} = \frac{1.5 \times 10^{-6} \Omega m}{3.22 \times 10^{-7} m^2} = 4.66 \frac{\Omega}{m}$$

ب) إذا طبق فرق جهد قدره 10 V لكل متر من هذا السلك فكم يكون
التيار؟

الحل

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{10V}{4.66 \frac{\Omega}{m}} = 2.15 A$$

س1 : ماهي كثافة التيار في السلك أعلاه؟

ج1 :

$$J = \frac{I}{A} = \frac{2.15 A}{3.22 \times 10^{-7} m^2} = 6.7 \times 10^6 \frac{A}{m^2}$$

س2 : ماهي شدة المجال داخل السلك؟

ج2 :

$$J = \sigma E \rightarrow \rightarrow E = \frac{J}{\sigma} = \rho J$$

$$= (1.5 \times 10^{-6} \Omega.m) (6.7 \times 10^6 \frac{A}{m^2}) = 10 \frac{V}{m}$$

مثال 27.5 يتكون الكابل المحوري coaxial cable من موصلين اسطوانيين الشكل أحدهما يعرف بالقلب والآخر عبارة عن قشرة اسطوانية تحيط بالقلب ويفصل بينهما مادة عازلة ويسري التيار فيهما على امتداد المحور. هذا النوع من الموصلات يستخدم بكثرة و يؤدي تسرب الشحنات بشكل شعاعي بين القلب والأسطوانة المحيطة به عبر المادة العازلة إلى فقد في الطاقة المنقولة. إذا كانت المادة العازلة في كابل محوري تتكون من السيلكون حيث من الجدول أعلاه $\rho = 640 \Omega.m$ وكان نصف قطر القلب $a = 0.5 \text{ cm}$ بينما نصف قطر الأسطوانة الخارجية $b = 1.75 \text{ cm}$ فما هي مقاومة المادة العازلة لتسرب الشحنات في قطعة من الكابل طولها $L = 15 \text{ cm}$ ؟

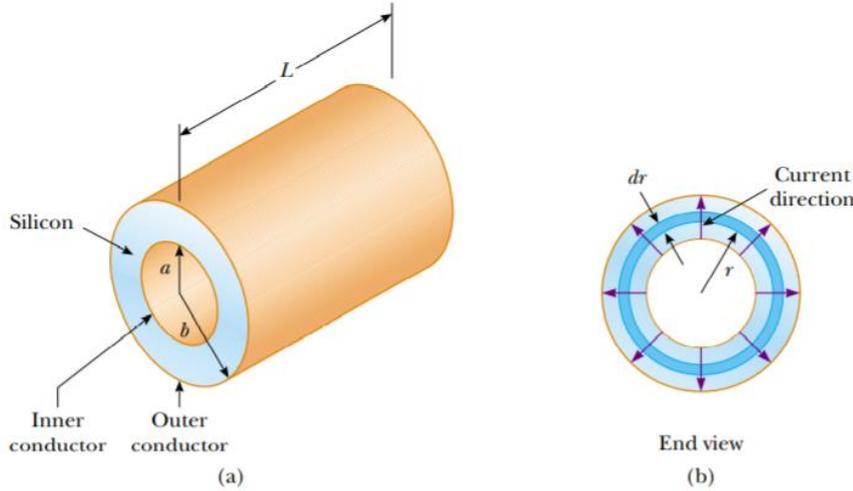


Figure 27.8 (Example 27.4) A coaxial cable. (a) Silicon fills the gap between the two conductors. (b) End view, showing current leakage.

الحل - لتأمل في قشرة رقيقة من المادة العازلة متمركزة مع الأسطوانتين وليكن سمكها dr وتبعد عن القلب مسافة r . مساحة القشرة هي

$A = 2\pi rL$. ستسهم هذه الشريحة في مقاومة التيار الشعاعي بعنصر مقاومة

$$dR = \rho dr / A = \rho dr / 2\pi rL = (\rho / 2\pi L) (dr / r)$$

وستكون مقاومة شريحة يمتد سمكها من a إلى b وطولها 15 cm هي

$$R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= \frac{640\Omega.m}{2\pi(0.15m)} \ln\left(\frac{1.75m}{0.5m}\right) = 851\Omega$$

مثال 27.6 إذا كانت مقاومة ترمومتر بلاتيني 50Ω عند درجة حرارة 20°C ثم أصبحت 76.8Ω عند غمره في مصهور عنصر الأنيوم فما هي درجة حرارة مصهور الأنيوم؟

الحل

من العلاقة

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{\Delta R}{\Delta T}$$

نجد

$$\Delta T = \frac{\Delta R}{\alpha R_0}$$

و بالتعويض من الجدول أعلاه عن α للبلاتين نجد

$$T - T_0 = \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = \frac{76.8\Omega - 50\Omega}{[3.92 \times 10^{-3} (\text{C}^0)^{-1}](50\Omega)} = 137\text{C}^0$$

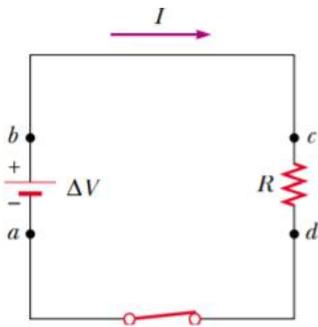
$$T = 137^\circ\text{C} + 20^\circ\text{C} = 157^\circ\text{C}$$

Electrical Power

القدرة الكهربائية

يتم في الدارات الكهربائية نقل طاقة من المصدر إلى الأداة أو الجهاز الذي يُغذى بالتيار الكهربائي. تُعبّر القدرة الكهربائية عن معدل إنتاج الطاقة الكهربائية من مصادرها أو معدل استهلاك الأجهزة للطاقة بالنسبة للزمن.

لنتأمل في الشكل أسفله



Active Figure 27.13 A circuit consisting of a resistor of resistance R and a battery having a potential difference ΔV across its terminals. Positive charge flows in the clockwise direction.

عندما تنتقل شحنة ΔQ من a إلى b عبر البطارية (مصدر انتاج الطاقة) تزداد طاقة وضعها الكهربائية بالمقدار $\Delta U = \Delta Q \Delta V$ على حساب انخفاض في طاقة الوضع الكيميائية للبطارية بنفس المقدار. و عندما تعبر الشحنة من c إلى d عبر المقاومة R (الحمل أو الجهاز الذي يُغذى بالطاقة) تفقد الشحنة ما اكتسبته من طاقة و يعاد ضخ طاقة لها من جديد عند مرورها من المصدر. تظهر الطاقة المستهلكة في الحمل على هيئة صنوف من الطاقة مثل الطاقة الحركية أو الضوئية أو الحرارية أو وغالباً ما يصاحب كل صنف منها فاقد حراري يشعه الجهاز نتيجة لارتفاع درجة حرارته (كلما انخفضت الطاقة الحرارية المفقودة كلما زادت كفاءة الجهاز) . وتكون الطاقة الحرارية المستهلكة في أسلاك التوصيل الجيدة في الدارات الكهربائية عادة صغيرة ومهملة.

إذا كان الزمن اللازم لعبور الشحنة ΔQ عبر الحمل R هو Δt فإن معدل استهلاك الحمل (المقاومة R) للطاقة هو

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Delta V = I \Delta V$$

حيث I هو تيار الدارة. يسمى معدل انتاج الطاقة أو استهلاكها بالقدرة **Power** ويرمز له عادة بالرمز P ووحدته هي الواط W

$$1W = 1J/s \quad \text{أي أن}$$

لذا يمكن أن نكتب

$$P = I \Delta V \quad (27.21)$$

وحيث أنه من قانون أوم ($\Delta V = IR$) لذا فإن القدرة يمكن أن تكتب بالصيغة

$$P = I \Delta V = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad (27.22)$$

وهذه علاقة بسيطة لكنها في غاية الأهمية بالنسبة لدارات التيار المستمر أي دارات الـ **d.c.** (أي التي يكون فيها المصدر بطارية أو ما يماثلها)

مثال 27.7 يتكون سخان كهربائي من سلك نيكروم مقاومته 8Ω . ويعمل على فرق جهد $120 V$. احسب تيار السخان وقدرته؟

الحل

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{120 V}{8 \Omega} = 15.0 A$$

و

$$P = I^2 R = (15.0 A)^2 (8 \Omega) = 1.8 \times 10^3 W \\ \equiv 1.8 kW$$

مثالـ 27.8 مدون على مصباح كهربائي الأرقام $120 V$, $75 W$. احسب تيار المصباح ومقاومته؟

الحلـ

الأرقام على المصباح تدل على أن جهد التشغيل هو $\Delta V = 120 V$ وقدرة المصباح $75 W$ لذا

$$I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{75 W}{120 V} = 0.625 A$$

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{120 V}{0.625 A} = 192 \Omega$$

تكلفة استهلاك الطاقة الكهربائية ووحدة الـ ك و س kWh

تستهلك جميع الأدوات والأجهزة الكهربائية طاقة عند تشغيلها. وتباع الطاقة الكهربائية للمستهلك وفق سعر معين تحدده الدولة لوحدة طاقة تسمى الكيلواط ساعة (ك و س) أو (kWh). وهذه الوحدة هي كمية الطاقة التي يستهلكها جهاز قدرته واحد كيلو واط عندما يعمل لمدة ساعة واحدة. وتقابل بوحدة الجول المقدار

$$1kWh = (10^3 W)(3600 s) = 3.6 \times 10^6 J$$

و لترشيد استخدام الطاقة الكهربائية فإن سعر الكيلوواط ساعة قد يزداد مع زيادة المستهلك للطاقة (نظام الشرائح) بغية الضغط على المستهلك لتقليل استهلاكه للطاقة الكهربائية ومن ثم توفير الطاقة اللازمة لتشغيل مولدات الطاقة الكهربائية والتي في معظمها تعتمد على مصادر الطاقة غير المتجددة (مشتقات البترول والغاز الطبيعي وهي حالياً مرتفعة الثمن ومعرضة للنضوب)

مثال 27.9 احسب تكلفة تشغيل مكيف فريون قدرته 5kW عندما يشتغل لمدة 12 ساعة يومياً ولمدة شهر (30 يوم) إذا كان سعر وحدة الـ ك و س هو 26 هللة.

الحل - مدة التشغيل بالساعة هي

$$(12 \text{ h}) (30) = 360 \text{ h}$$

كمية الطاقة المستهلكة بوحدة الـ ك و س هي

$$(5\text{kW})(360\text{h}) = 1800 \text{ kWh}$$

تكلفة التشغيل

$$\left(\text{SR} \frac{0.26}{\text{kWh}} \right) (1800 \text{ kWh}) = \text{SR } 468$$

فائدة :

تعد أجهزة التكييف المنزلية الفريون أكبر مستهلك للطاقة في فترة الصيف حيث ترتفع درجات الحرارة. وتختلف هذه المكيفات في قدراتها الاستهلاكية. وفي محلات بيع تلك الأجهزة يصنفونها حسب قدرتها بوحدة مثل : مكيف 14 أو 18 أو 24 أو 30 وحدة إلى غير ذلك من الأرقام . فماذا تعني هذه الأرقام؟

تشير هذه الأرقام إلى وحدة حرارية بريطانية تعرف بـ BTU حيث كل

1BTU تقابل أو تساوي 1055 جول وبذلك تكون

$$\frac{1\text{BTU}}{\text{h}} = \frac{1055\text{J}}{3600 \text{ s}} = 0.293 \text{ W}$$

والأرقام أعلاه مثل 14 أو 18 أو 24 تعني عدد الوحدات بالآلف. لذلك فإن ما يقابلها بوحدة الكيلو واط هو :

$$14 \text{ kBTU} / \text{h} = 4.102 \text{ kW}$$

$$18 \text{ kBTU} / \text{h} = 5.274 \text{ kW}$$

$$24 \text{ kBTU} / \text{h} = 7.033 \text{ kW}$$

$$30 \text{ kBTU} / \text{h} = 8.790 \text{ kW}$$

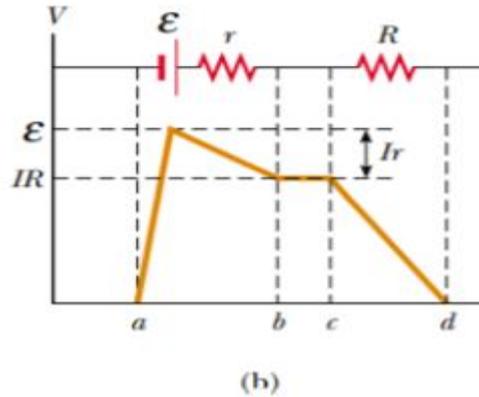
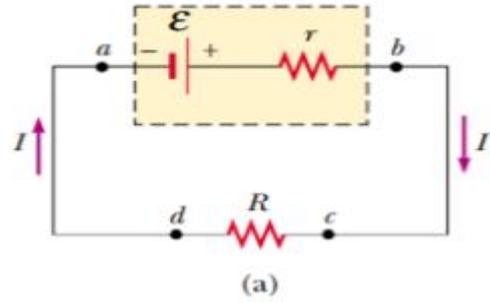
$$40 \text{ kBTU} / \text{h} = 11.72 \text{ kW}$$

Chapter 28

Direct Current Circuits دارات التيار المستمر

Electromotive Force القوة الدافعة الكهربائية

دارة التيار المستمر (DC) هي الدارة التي مصدر الجهد فيها ثابت لا يتغير مع الزمن مثل البطارية وأشباهها ويرمز للمصدر فيها بالرمز \mathcal{E} . المصدر المثالي للجهد ليس له مقاومة داخلية أو في الأقل تكون صغيرة ومهملة. أما المصدر الفعلي أو الحقيقي فلا يخلو من مقاومة داخلية، وإن كانت عادة صغيرة مقارنة بمقاومة الحمل، لكنها غير مهملة. يرمز للمقاومة الداخلية عادة بالرمز r ، أما المقاومة الخارجية أو ما يعرف بمقاومة الحمل فيرمز لها بالرمز R . يسمى فرق الجهد عبر نهايتي المصدر عندما تكون الدارة مفتوحة ولا يسري تيار فيها بالقوة الدافعة الكهربائية للمصدر \mathcal{E} أو اختصاراً \mathcal{E} .



Active Figure 28.2 (a) Circuit diagram of a source of emf \mathcal{E} (in this case, a battery), of internal resistance r , connected to an external resistor of resistance R .



يؤدي وجود مقاومة داخلية للمصدر إلى خفض الجهد قليلاً عبر نهايته عن القيمة ϵ عند قفل الدارة ومرور تيار I فيها. كما يؤدي وجود المقاومة الداخلية إلى استهلاك جزء من الطاقة المستمدة من المصدر داخل المصدر نفسه (وهذه تعتبر طاقة مهدرة لا يستفاد منها) مما يؤدي غالباً إلى ارتفاع بسيط في درجة حرارته عند توصيله بالحمل ومرور تيار فيه.

ومما يحسن التنبيه عليه هو أن الموقع الفعلي للمقاومة r هو داخل المصدر وقد وضعت، ظاهرياً، خارجه على التوالي مع مقاومة الحمل R لتسهيل عملية اقتفاء تغيرات الجهد عبر الدارة المغلقة. يبين شكل b التغير في الجهد الكهربائي عند الانطلاق باتجاه عكس اتجاه الطواف حول الكعبة بدءاً من النقطة a حتى f . سنعتبر في هذه الدارة وفي غيرها مما سيأتي أن مقاومة الأسلاك مهمة. التغير في الجهد بين a و b يمثل ϵ القوة الدافعة الكهربائية للمصدر (الجهد الذي نجده عادة مكتوباً على البطارية). الانخفاض في الجهد بين c و d ناشئ من مرور التيار I في المقاومة الداخلية. الانخفاض في الجهد بين e و f ناشئ من مرور التيار في R مقاومة الحمل.

يسمى فرق الجهد عبر مقاومة الحمل R ، وهو ما يقيسه حقيقة جهاز الفولتميتر عند ربطه بين نهايتي المصدر، عندما تكون الدارة مغلقة ويسري فيها تيار I يسمى بالفأطية الطرفية terminal voltage. وحسب قانون أوم فإن التغير في الجهد

عبر R أي الفأطية الطرفية هو $\Delta V = IR$. بناء على ما سبق نجد

$$\Delta V = \epsilon - Ir \quad (28.1)$$

$$IR = \epsilon - Ir \quad \text{أو}$$

$$\epsilon = IR + Ir \quad \text{و} \quad (28.2)$$

و من ثم فإن تيار الدارة

$$I = \frac{\epsilon}{R + r} \quad (28.3)$$

وبضرب طرفي علاقة (28.2) في التيار I نجد

$$I\epsilon = I^2R + I^2r \quad (28.4)$$

أي أن القدرة المستمدة من المصدر لا تستهلك كلها في الحمل بل يفقد جزء منها في المقاومة الداخلية للمصدر.

مثال 28.1 ربطت بطارية قوتها الدافعة الكهربائية 12 V ومقاومتها الداخلية $0.050\ \Omega$ بمقاومة خارجية $3.0\ \Omega$ أوجد

أ - تيار الدارة والفلتية الطرفية؟

الحل التيار

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{12\text{ V}}{(3.0 + 0.050)\ \Omega} = 3.934\text{ A}$$

والفلتية الطرفية ΔV هي

$$\Delta V = IR = \varepsilon - Ir = 12\text{ V} - (3.93\text{ A})(0.050\ \Omega) = 11.8\text{ V}$$

ب - القدرة المستهلكة في الحمل والقدرة المفقودة في البطارية والقدرة المستمدة من البطارية؟

الحل

$$P_R = I^2 R = (3.93\text{ A})^2 (3.0\ \Omega) = 46.3\text{ W}$$

$$P_r = I^2 r = (3.93\text{ A})^2 (0.05\ \Omega) = 0.772\text{ W}$$

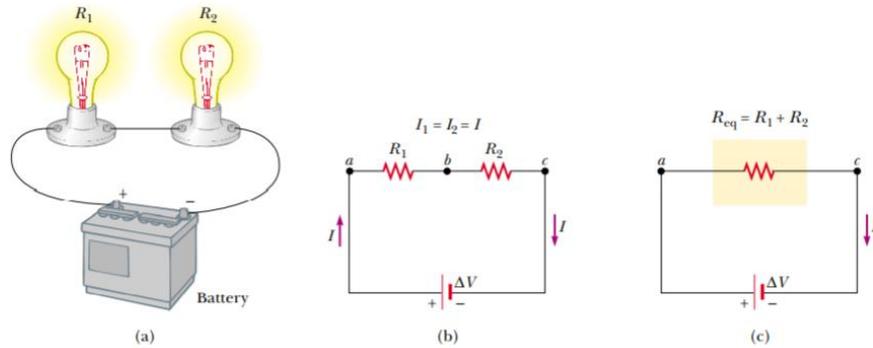
$$P_s = I \varepsilon = (3.93\text{ A})(12\text{ V}) = 47.1\text{ W}$$

ربط المقاومات مع بعض وإيجاد المقاومة المكافئة

series combination

أولا الربط على التوالي

في الشكل التالي المقاومتان R_1 و R_2 موصلتان على التوالي مع بعض ومع مصدر له فرق جهد بين نهايته ΔV .



At the Active Figures link <http://www.pse6.com>, you adjust the battery voltage

Active Figure 28.4 (a) A series connection of two lightbulbs with resistances R_1 and R_2 . (b) Circuit diagram for the two-resistor circuit. The current in R_1 is the same as that in R_2 . (c) The resistors replaced with a single resistor having an equivalent resistance $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$.

Acti
Go to

يلاحظ أن التيار المار في المقاومتين متساو ويساوي تيار الدارة I ، أما جهد المصدر فقد توزع على المقاومتين بحسب مقدار كل منهما.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = IR_1 + IR_2 = I (R_1 + R_2)$$

المقاومة المكافئة لهاتين المقاومتين هي تلك التي عند توصيلها بهذا المصدر يمر بها نفس التيار I

$$\Delta V = I R_{eq}$$

وهكذا نجد في هذه الحالة أن

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

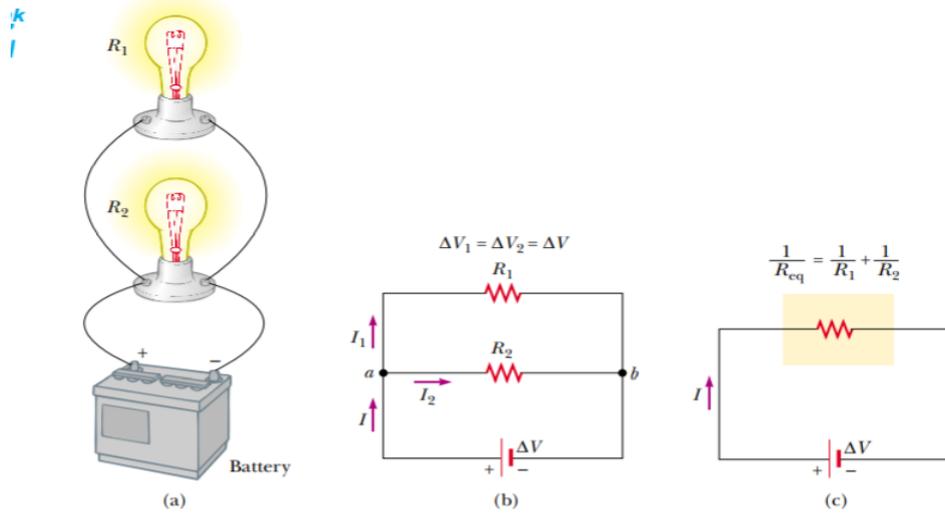
وبالتعميم فعند توصيل مجموعة مقاومات على التوالي فإن المكافئة لها هي مجموعها

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (28.6)$$

أي أن المكافئة أكبر من أكبر واحدة في المجموعة.

ثانياً: الربط على التوازي Parallel combination

في الشكل التالي المقاومتان R_1 و R_2 موصلتان على التوازي مع بعض ومع مصدر له فرق جهد بين نهايته ΔV .



Active Figure 28.6 (a) A parallel connection of two lightbulbs with resistances R_1 and R_2 . (b) Circuit diagram for the two-resistor circuit. The potential difference across R_1 is the same as that across R_2 . (c) The resistors replaced with a single resistor having an equivalent resistance given by Equation 28.7.

Activate W

واضح من الشكل أن فرق الجهد متساو عبر المقاومتين ويساوي ΔV للمصدر. أما تيار الدارة فقد توزع بين المقاومتين بحيث

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2}$$

المقاومة المكافئة R_{eq} لهاتين المقاومتين هي تلك التي إذا وصلت بنفس المصدر ΔV مر فيها تيار I ، لذا

$$\frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2}$$

وبحذف ΔV نجد مقلوب المقاومة المكافئة للمقاومتين في حالة الربط على التوازي

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

وبالتعميم فعند ربط مجموعة مقاومات على التوازي فإن مقلوب المكافئة لها هو مجموع مقلوباتها

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (28.8)$$

وبناء على ذلك فإن المقاومة المكافئة في هذه الحالة ستكون أصغر من أصغر مقاومة في المجموعة.

مثال 28.2 ادرس الشكل التالي ثم :

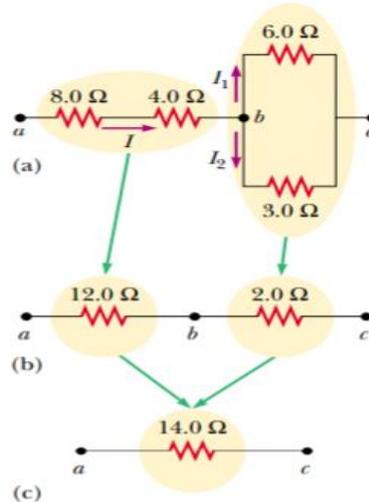


Figure 28.9 (Example 28.4) The original network of resistors is reduced to a single equivalent resistance.

أ - اوجد المكافئة بين a و c

الحل واضح من الشكل أن المقاومتين بين **a** و **b** موصلتان على التوالي فالمكافئة لهما هي مجموعهما أي 12Ω أما بين **b** و **c** فعلى التوازي لذا

$$\frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \rightarrow R_{bc} = 2\Omega$$

من الشكل **b** نرى أن المقاومتين 12Ω و 2Ω موصلتان على التوالي لذا فإن المكافئة بين **a** و **c** هي $R_{ac} = 14\Omega$ كما في شكل **c** هي 14Ω

ب - أوجد التيار الذي يمر في كل مقاومة عند ربط **a** و **c** في شكل **a** بمصدر $42V$

الحل التيار المار في المقاومة المكافئة للجميع

$$I = \frac{\Delta V}{R_{ac}} = \frac{42V}{14\Omega} = 3A$$

وهذا هو نفسه التيار الذي يمر في كل واحدة من المقاومتين 8Ω و 4Ω لأنهما موصلتان على التوالي . هذا التيار يتوزع بين المقاومتين الموصلتين على التوازي 6Ω و 3Ω بنسبة عكسية . و حيث أن احدهما ضعف الأخرى فسيمر حسب قانون أوم في الصغرى ضعف ما يمر في الكبرى لتساوي فرق الجهد عبر المقاومتين. أي أن تيار المقاومة 6Ω هو $1A$ بينما تيار المقاومة 3Ω هو $2A$.

مثال 28.3 ادرس شكل **a** التالي ثم:

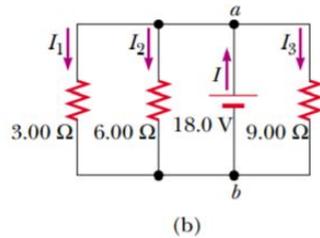
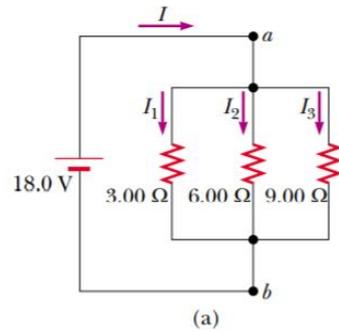


Figure 28.11 (Example 28.6) (a) Three resistors connected in parallel. The voltage across each resistor is $18.0V$. (b) Another circuit with three resistors and a battery. Is this equivalent to the circuit in part (a) of the figure?

أ - أوجد تيار كل مقاومة ؟

الحل المقومات الثلاث موصلة على التوازي لذا فرق الجهد متساو عليها ويساوي جهد المصدر. من قانون أوم:

$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{18 V}{3\Omega} = 6 A$$

$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{18 V}{6\Omega} = 3 A$$

$$I_3 = \frac{\Delta V}{R_3} = \frac{18 V}{9\Omega} = 2 A$$

أي أن التيار الكلي I للدارة هو $11 A$

ب أوجد القدرة المستهلكة في كل مقاومة والقدرة المستمدة من المصدر؟

الحل من العلاقة $p = I^2 R$ نجد

$$P_3 = \dots = 108 W$$

$$P_6 = \dots = 54 W$$

$$P_9 = \dots = 36 W$$

من هذه النتائج يتضح أنه عند التوصيل على التوازي فإن المقاومة الأصغر هي المستهلك الأكبر للطاقة بينما سيحدث العكس لو كانت موصلة على التوالي

القدرة المستمدة من المصدر هي مجموع القدرات الثلاث أي $198 W$

ج - أوجد المقاومة المكافئة ؟

الحل من علاقة التوصيل على التوازي

$$1 / R_{eq} = 1 / R_1 + 1 / R_2 + 1 / R_3$$

نجد

$$R_{eq} = 18 / 11 \Omega = 1.64 \Omega$$

لاحظ أن القدرة المستمدة من المصدر يمكن حسابها بطريقتين أخريين: من العلاقة $P = I \varepsilon$ أو من العلاقة $P = I^2 R_{eq}$ وستعطيان نفس النتيجة أعلاه أي

. $198 W$

س : هل شكل b يماثل شكل a ؟

ج : نعم يماثله لأن المقاومات لا زالت على التوازي والجهد عليها لم يتغير فهو جهد المصدر.

قاعدتا كيرشوف Kirchhoff 's Rules

تساعد هاتان القاعدتان المنسوبتان للعالم الألماني كيرشوف على إيجاد بعض المجاهيل في الدارات البسيطة.

القاعدة الأولى: تشتهر باسم قاعدة التقاطع **Junction Rule** وتبنى على مبدأ حفظ الشحنة. وتنص على أن مجموع التيارات الداخلة إلى تقاطع لا بد أن يساوي مجموع التيارات الخارجة منه (مجموع الشحنات الواصلة = مجموع الشحنات المغادرة). فالشحنات لا تُنتج في التقاطع ولا تستهلك فيه.

$$\sum I_{in} = \sum I_{out}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

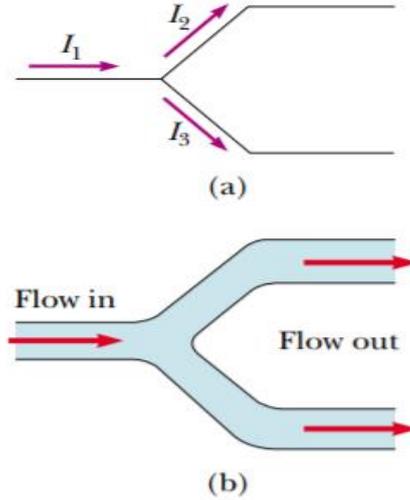


Figure 28.14 (a) Kirchhoff's junction rule. Conservation of charge requires that all charges entering a junction must leave that junction. Therefore, $I_1 = I_2 + I_3$. (b) A mechanical analog of the junction rule: the amount of water flowing out of the branches on the right must equal the amount flowing into the single branch on the left.

القاعدة الثانية: تشتهر باسم قاعدة المسار المغلق Closed Loop

وتبنى على مبدأ حفظ الطاقة وتنص على أن المجموع الجبري لفروقات الجهد عبر مسار مغلق يساوي الصفر.

$$\sum_i \Delta V_i = 0$$

ولتحديد إشارة فرق الجهد هل هي موجبة أم سالبة عبر كل عنصر من عناصر المسار المغلق ، علينا لتحديد فرق الجهد عند المرور بمقاومة أن نراعي اتجاه كل من التيار في المقاومة واتجاه المسار . أما تحديد إشارة فرق الجهد عبر المصدر فتعتمد على اتجاه المسار وهل هو ينقلنا من الطرف السالب للمصدر نحو الموجب أم العكس. يبين الشكل التالي الإرشادات اللازم اتباعها لتحديد إشارة فرق الجهد. ملحوظة: اتجاه المسار المغلق مفترض أنه في الأشكال أسفله من اليسار نحو اليمين.

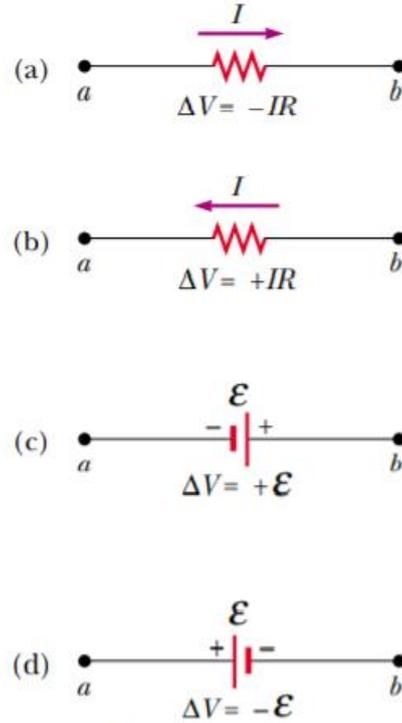


Figure 28.15 Rules for determining the potential differences across a resistor and a battery. (The battery is assumed to have no internal resistance.) Each circuit element is traversed from left to right.

مثال 28.4 ادرس الشكل التالي ثم أوجد التيار I

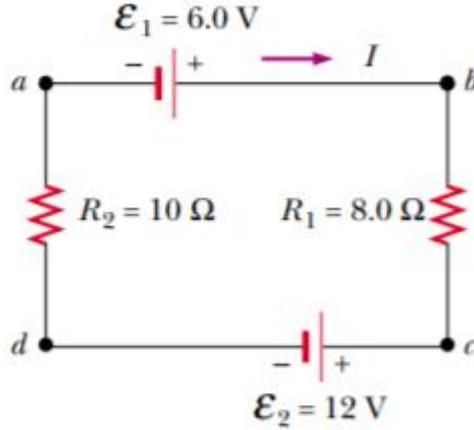


Figure 28.16 (Example 28.8) A series circuit containing two batteries and two resistors, where the polarities of the batteries are in opposition.

الحل يلاحظ أولاً أنه لا يوجد نقطة تقاطع في هذه الدارة فليس لدينا إلا تيار واحد. لكن لدينا مسار مغلق، لذا من قاعدة المسار المغلق *closed loop* وبأخذ اتجاه المسار من اليسار نحو اليمين بالنسبة للفرع العلوي من الشكل، نجد

$$\sum_i \Delta V_i = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1 - IR_1 - \varepsilon_2 - IR_2 = 0$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I(R_1 + R_2)$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{6V - 12V}{10\Omega + 8\Omega} = -\frac{6V}{18\Omega} = -\frac{1}{3} A$$

تدل الإشارة السالبة للتيار على أن الاتجاه الفعلي له عكس المقترح في الشكل. وبذلك فإن البطارية ذات الـ $6V$ تستمد طاقة من الدارة أي واقعة تحت الشحن.

ولو حسبنا القدرة المستهلكة في المقاومتين لوجدناها أقل من القدرة المستمدة من المصدر ε_2 . الفرق هو ما أعطي لـ ε_1

س: لو عكسنا اتجاه المسار المغلق هل تتغير النتيجة؟

ج: لا . أثبت ذلك؟

س: لو عكسنا اتجاه المصدر ε_2 هل تتغير النتيجة؟

ج: نعم . أثبت ذلك؟

مثال 28.5 أوجد التيارات I_1 و I_2 و I_3 في الشكل التالي؟

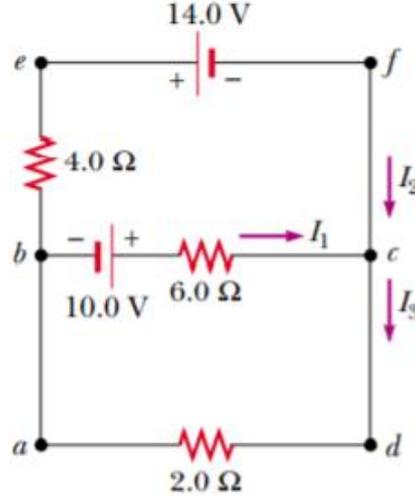


Figure 28.17 (Example 28.9) A circuit containing different branches.

الحل عند نقطة التقاطع c

$$(1) \quad I_3 = I_1 + I_2$$

وبتطبيق قاعدة المسار المغلق على المسارين $befcb$ و $abcd$ آخذين اتجاه المسار في كلا المسارين عكس الطواف حول الكعبة نحصل على الآتي:

$$(2) \quad abcd \quad 10.0V - (6.0 \Omega)I_1 - (2.0 \Omega)I_3 = 0$$

$$(3) \quad befcb \quad -14.0V + (6.0 \Omega)I_1 - 10.0V - (4.0 \Omega)I_2 = 0$$

وهكذا حصلنا على ثلاث معادلات مستقلة وهي كافية لإيجاد المجاهيل الثلاثة.
بالتعويض عن I_3 من (1) في (2) نجد

$$10.0V - (6.0 \Omega)I_1 - (2.0 \Omega)(I_1 + I_2) = 0$$

$$(4) \quad 10.0V = (8.0 \Omega) I_1 + (2.0 \Omega) I_2$$

و بقسمة كل حد في (3) على 2 وإعادة الترتيب نجد

$$(5) \quad -12.0V = -(3.0 \Omega) I_1 + (2.0 \Omega) I_2$$

وبطرح (5) من (4) تخنفي I_2 ومن ثم نجد

$$22.0 V = (11.0 \Omega)I_1$$

و

$$I_1 = 2.0 A$$

وبالتعويض عن I_1 في (5) نجد

$$(2.0 \Omega) I_2 = (3.0 \Omega) I_1 - 12.0V$$

$$= (3.0 \Omega)(2.0 A) - 12.0V = -6.0 V$$

و

$$I_2 = -3.0 A$$

و بالتعويض في (1) عن I_1 و I_2 نجد

$$I_3 = -1.0 A$$

تدل الإشارات السالبة على أن الاتجاه الفعلي للتيارات I_2 و I_3 عكس المقترح على الشكل.

س : هل ستتغير النتيجة لو عكسنا اتجاه المسارات أي جعلناه باتجاه الطواف حول الكعبة؟

ج :

مثال 28.6 الدارة في الشكل التالي في حالة استقرار كهربائي.

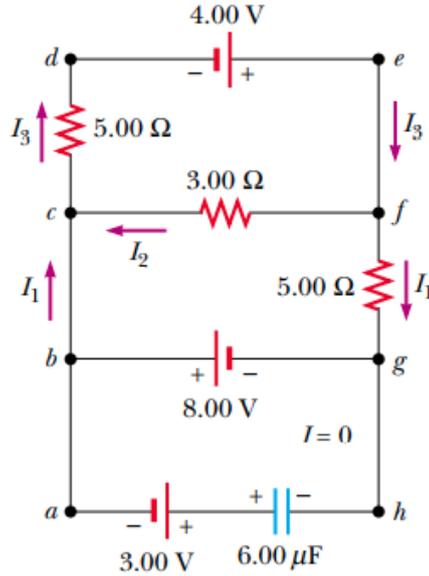


Figure 28.18 (Example 28.10) A multiloop circuit. Kirchhoff's loop rule can be applied to *any* closed loop, including the one containing the capacitor.

أ - أوجد التيارات I_1 و I_2 و I_3

الحل - إن كون الدارة في حالة استقرار كهربائي يعني أن المكثف الموجود في الفرع السفلي قد اكتمل شحنه ومن ثم فلا يوجد تيار في هذا الفرع من الدارة.

لإيجاد التيارات الثلاثة علينا كما فعلنا في المثال السابق الحصول على ثلاث معادلات مستقلة

من نقطة التقاطع C نجد

$$(1) \quad I_3 = I_1 + I_2$$

و من المسارين المغلقين defcd و cfgbc آخذين اتجاه المسار عكس الطواف حول الكعبة. نجد

$$(2) \quad defcd \quad 4.00V - (3.00\Omega) I_2 - (5.00\Omega) I_3 = 0$$

$$(3) \quad cfgbc \quad (3.00\Omega) I_2 - (5.00\Omega) I_1 + 8.00V = 0$$

من (1) نجد $I_1 = I_3 - I_2$ وبالتعويض في (3) نجد

$$(4) \quad (8.00\Omega) I_2 - (5.00\Omega) I_3 + 8.00V = 0$$

وبطرح (4) من (2) نحذف I_3 ونجد

$$I_2 = -\frac{4.00V}{11.0\Omega} = -0.364A$$

تدل الإشارة السالبة على أن الاتجاه الفعلي لـ I_2 عكس المقترح على الرسم، لكن فيما يتبع من علاقات سنعامل مع قيمتها السالبة.

وبالتعويض عن I_2 في معادلتني (3) و (1) نجد

$$I_1 = 1.38A \quad \text{و} \quad I_3 = 1.02A$$

ب - أوجد شحنة المكثف ؟

لإيجاد شحنة المكثف علينا أولاً أن نوجد فرق الجهد عبره.

من المسار المغلق abgha نجد

$$-8.00V + \Delta V_c - 3.00V = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V_c = 11.0V$$

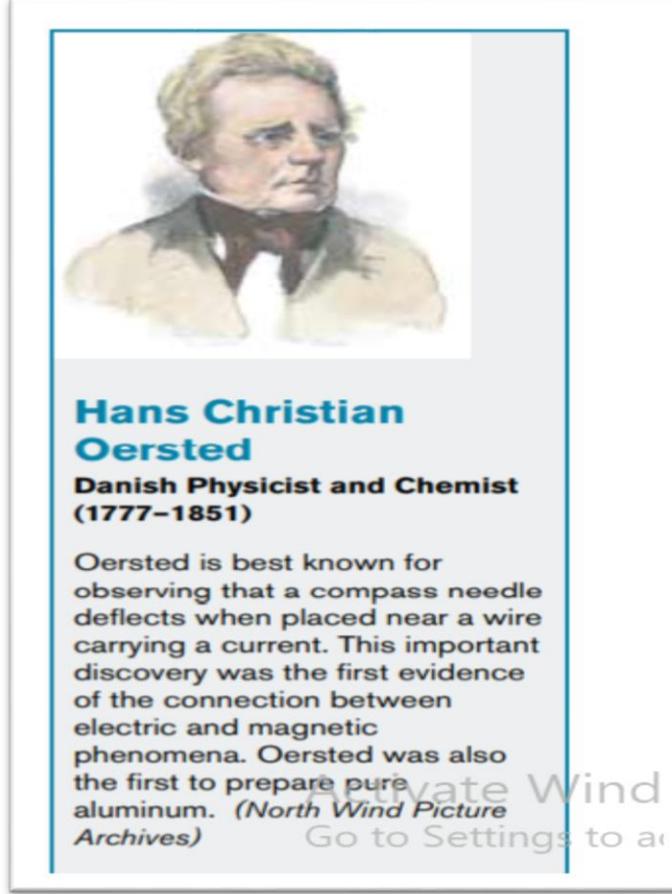
$$Q = C \Delta V_c = \dots = 66 \mu C$$

عندئذ من تعريف السعة نجد

Chapter 29

Magnetic Fields

المجالات المغناطيسية



لعل أول صلة اكتشفت بين الكهرباء وبين المغناطيسية هو ما تم ملاحظته مصادفة على يد العالم الدينماركي اوريستد

(1851 - 1777) عام 1819 حيث أثار انتباهه تحرك إبرة بوصلة مغناطيسية عند مرور تيار كهربائي في ناقل بالقرب منها. بهذا الاكتشاف، غير المخطط له، اندمجت الكهربائية مع المغناطيسية فأنتجا ما يعرف بالكهرومغناطيسية ذات التطبيقات الهائلة التي غيرت معالم الحياة على وجه الأرض. إن ما ننعم به من رفاهية، راجع بعد الله في معظمه، إلى هذا الاكتشاف ، البسيط في ظاهره ، العظيم في حقيقته و فيما قاد إليه من اكتشافات وتطبيقات لا زالت إلى يومنا هذا تنمو وتتوسع.

إن من المعلوم أن لكل مادة مغناطيسية قطبين يعرفان بالشمالى وبالجنوبى وهما متلازمان لا ينفك أحدهما عن الآخر ، فمهما حاولنا تجزئة أي مغناطيس ، فإنه يتولد منه مغناط جديدة لكل واحد منها قطبان شمالى وجنوبى. ولم يتمكن الباحثون فيما نعلم من الحصول على قطب مغناطيسي منفرد خلافاً لما هو معروف في الكهربائية من وجود شحنة كهربائية موجبة أو سالبة بمفردها.

كما أن من المعلوم أن المغناط تتفاعل مع بعضها البعض عن بعد شأن الشحنات الكهربائية مما يدل على وجود مجالات مغناطيسية حول الأقطاب المغناطيسية. هذه المجالات المغناطيسية لها خصائص قد تتفق وقد تختلف عن خصائص المجالات الكهربائية. لقد سبق لكم دراسة متجهة مجال جذب الأرض ومتجهة المجال الكهربائي وتعريفهما من خلال تفاعل مجال جذب الأرض مع كتلة اختبار m_0 و تفاعل المجال الكهربائي مع شحنة اختبار q_0 صغيرة موجبة. يمكن تعريف المجال المغناطيسي بطريقة مماثلة، إلى حد ما لما سبق.

سنرمز للمجال المغناطيسي بالرمز \vec{B} . لقد لوحظ تجريبياً أن الشحنات المتحركة يمكن أن تتفاعل مع المجال المغناطيسي، لذا فإن من الممكن التعرف على وجود المجال مغناطيسي مقداراً واتجاهاً من خلال تفاعله مع شحنة كهربائية q تتحرك فيه بسرعة \vec{v} . لقد دلت المشاهدات على أن الشحنة المتحركة عند تعرضها لمجال مغناطيسي تتأثر بقوة مغناطيسية حارفة \vec{F} تتلخص خصائصها في العلاقة البسيطة الهامة التالية:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (29.1)$$

من هذه الخصائص:

1 - أن \vec{F} تتعامد مع المستوى الذي تقع فيه كل من \vec{v} و \vec{B} لذلك هذه القوة ستضطر الشحنة أن تغير من اتجاه حركتها (تحرف مسارها) طالما بقيت في المجال فتسير في مسار لولبي أو دائري.

2 - يتناسب مقدار هذه القوة طردياً مع حاصل الضرب $q v B \sin \theta$ ذلك أنه من علاقة (29.1) فإن

$$F = q v B \sin \theta \quad (29.2)$$

3 - تكون القوة F عظمى عندما تتعامد حركة الشحنة مع اتجاه المجال أي عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{2}$

4 - تنعدم القوة F عندما تتحرك الشحنة بموازات المجال أو عكسه

$$\theta = 0 \text{ or } \theta = \pi$$

5 - ينعكس اتجاه القوة إذا تغيرت إشارة الشحنة.

- 6 - ينعكس اتجاه القوة عند انعكاس اتجاه المجال أو انعكاس اتجاه السرعة .
 7 - لا يتفاعل المجال المغناطيسي مع الشحنة الساكنة ($v = 0$).

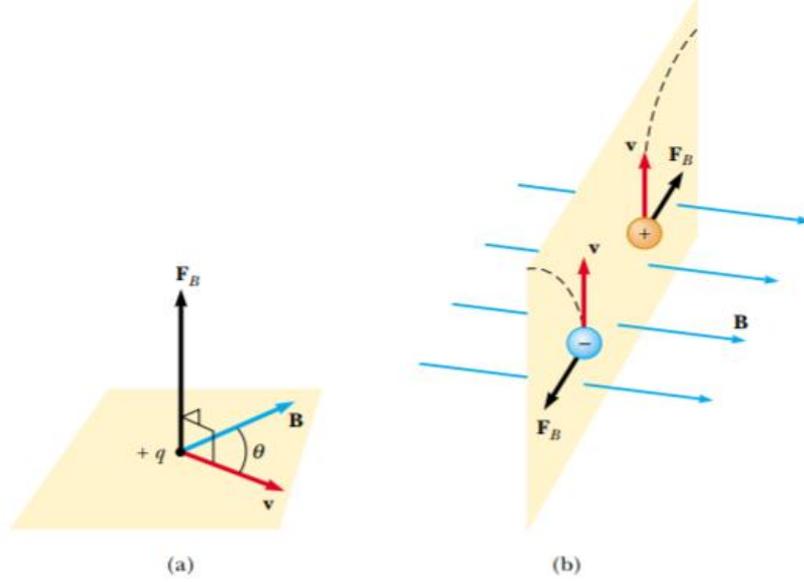
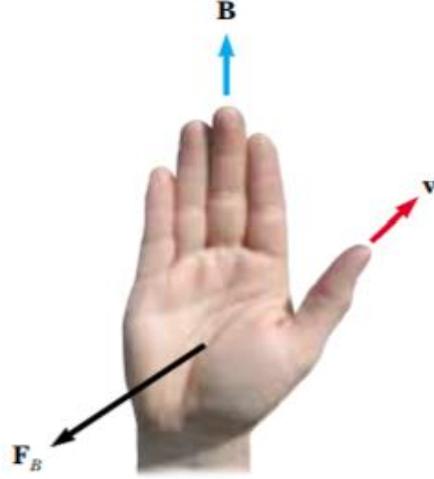


Figure 29.3 The direction of the magnetic force F_B acting on a charged particle moving with a velocity v in the presence of a magnetic field B . (a) The magnetic force is perpendicular to both v and B . (b) Oppositely directed magnetic forces F_B are exerted on two oppositely charged particles moving at the same velocity in a magnetic field. The dashed lines show the paths of the particles, which we will investigate in Section 29.4.

هذا ويمكن معرفة اتجاه القوة المغناطيسية باستخدام قاعدة اليد اليمنى. فعندما تشير الابهام إلى اتجاه السرعة لشحنة موجبة وأصابع اليد المبسوطة لاتجاه المجال فإن اتجاه القوة هو اتجاه العمودي على راحة اليد إلى الخارج.



س: ما هو الفرق بين تأثير المجال الكهربائي وتأثير المجال المغناطيسي على الشحنات؟

ج: بالتأمل في الحالتين تتضح ثلاث فروقات أساسية:

1 - يتفاعل المجال الكهربائي مع الشحنات سواء كانت متحركة أم ساكنة بينما لا يتفاعل المجال المغناطيسي مع الساكنة وإنما مع المتحركة فقط.

2 - القوة الناشئة من المجال الكهربائي تكون باتجاه المجال أو عكسه ، بحسب إشارة الشحنة وتتسبب في حركة الشحنات بتسارع، بينما القوة الناشئة من المجال المغناطيسي تتعادم مع اتجاه المجال لكلا النوعين من الشحن.

3 - بناء على ما سبق فإن القوة الكهربائية تغير بالضرورة من طاقة حركة الشحنة الموجودة في المجال بينما القوة المغناطيسية لا تستطيع أن تغير من طاقة حركة الشحنة وإنما تتسبب في حرف مسارها فقط وذلك لتعادم اتجاه القوة المغناطيسية مع اتجاه الحركة. فمن تعريف الشغل نجد عنصر الشغل الذي تبذله القوة المغناطيسية

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = F v \cos \frac{\pi}{2} dt = 0$$

وهكذا نرى أنه لتغيير طاقة حركة شحنة علينا تعريضها لمجال كهربي ، أما إذا أريد تغيير مسارها فقط مع الحفاظ على طاقتها فعلياً تعريضها لمجال مغناطيسي فقط. (قارن ذلك بدور دعاسة البنزين ودور الطارة أو الدرکسون).

س: ماهي الوحدة التي يقاس بها المجال المغناطيسي وما اسمها؟

ج: من علاقة (29.2) نجد

$$B = \frac{F}{q v \sin\theta} = \frac{N}{C \frac{m}{s}} = \frac{N}{\frac{C}{s} m} = \frac{N}{A m}$$

تسمى هذه الوحدة تسلا ويرمز لها بالرمز T أي أن

$$1T = 1 \frac{N}{A m}$$

وهناك وحدة قديمة أصغر من التسلا تعرف بالجاوس G

$$1T = 10^4 G$$

وما زال الجهاز الذي يستخدم لقياس شدة المجال المغناطيسي يسمى جاوس ميتر.

مثال 29.1 يتحرك بروتون بسرعة $8 \times 10^6 \frac{m}{s}$ على امتداد محور X فيتعرض لمجال مغناطيسي شدته $2.5 T$ باتجاه يعمل زاوية 60° مع محور x ويقع في المستوى xy . أوجد القوة المغناطيسية الابتدائية التي يتأثر بها البروتون؟

الحل

من علاقة 1 نجد

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

ومنها نجد أن مقدار القوة الابتدائية

$$F = q v B \sin\theta$$

$$= e v B \sin\theta$$

$$= (1.6 \times 10^{-19} C)(8 \times 10^6 m/s)(2.5 T) \sin 60^\circ$$

$$= 2.77 \times 10^{-12} N$$

وحيث أن كلا من السرعة والمجال واقعان ابتداء في المستوى xy والشحنة موجبة لذا من قاعدة اليد اليمنى لابد أن يكون الاتجاه الابتدائي للقوة بالاتجاه الموجب لمحور z . أي أن

$$\vec{F} = (2.77 \times 10^{-12} N) \hat{k}$$

طريقة أخرى للحل : يمكن تحليل \vec{B} إلى مركبتين

$$B_x = B \cos 60^\circ = (2.5 T) \left(\frac{1}{2} \right) = 1.25 T$$

$$B_y = B \sin 60^\circ = (2.5 T) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2.17 T$$

عندئذ

$$\vec{F} = q v \hat{i} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

$$\vec{F} = q v B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + q v B_y (\hat{i} \times \hat{j})$$

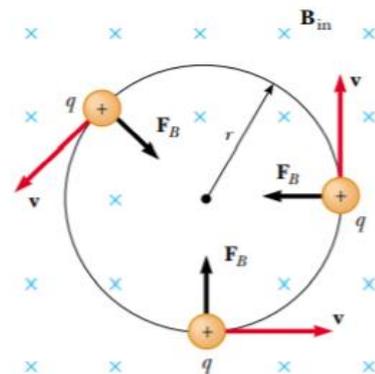
$$= q v B_y \hat{k} = (1.6 \cdot 10^{-19} C)(8 \times 10^6 m/s)(2.17 T) \hat{k}$$

$$= 2.77 \times 10^{-12} \hat{k}$$

حركة جسيمة مشحونة في مجال مغناطيسي منتظم

سنرمز لاتجاه المجال المغناطيسي إذا كان إلى داخل الصفحة بالرمز \times أما إذا كان خارجاً من الصفحة باتجاه الناظر فبالرمز \cdot أي نقطة.

لنتأمل في الشكل التالي الذي يمثل شحنة q ذات كتلة m تنطلق نحو اليمين بسرعة v في مجال مغناطيسي B يتجه إلى داخل الصفحة عندئذ كما تعلمنا



Active Figure 29.18 When the velocity of a charged particle is perpendicular to a uniform magnetic field, the particle moves in a circular path in a plane perpendicular to \mathbf{B} . The magnetic force \mathbf{F}_B acting on the charge is always directed toward the center of the circle.

ستتأثر هذه الشحنة بقوة مغناطيسية حارفة F تتجه للأعلى مما يتسبب في انحراف سير الشحنة انحرافاً مستمراً حيث يتغير اتجاه القوة باستمرار مع تغير اتجاه السرعة لتبقى متعامدة معها طول الوقت كما تدل عليه علاقة (29.1) أي أن اتجاه القوة في هذه الحالة سيشير إلى مركز مسار دائري له نصف قطر r محدد تتحرك فيه الشحنة. لنوجد نصف قطر هذا المسار والتردد الزاوي للحركة والزمن الدوري لها.

من قانون نيوتن الثاني في الحركة

$$F = m a \quad \text{حيث} \quad F = q v B \quad \text{و} \quad a = \frac{v^2}{r} \quad \text{وبالتعويض نجد}$$

$$\leftarrow \leftarrow \quad q v B = m \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{m v}{q B} \quad (29.3)$$

ويكون التردد الزاوي (السرعة الزاوية)

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{q B}{m} \quad (29.4)$$

والزمن الدوري للحركة

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{q B} \quad (29.5)$$

مثال 29.2 يتحرك بروتون في مسار دائري نصف قطره 14 cm نتيجة تعرضه لمجال مغناطيسي منتظم شدته 0.35 T . أوجد سرعة البروتون؟

$$\text{الحل} \quad \text{من العلاقة} \quad r = \frac{m v}{q B} \quad \text{نجد}$$

$$v = \frac{e r B}{m_p} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(14 \times 10^{-2} \text{ m})(0.35 \text{ T})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}$$

$$= 4.69 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

مثال 29.3 سرعة الكترون من السكون في فرق جهد 350 V ثم عرض لمجال مغناطيسي متعامد مع اتجاه حركته فتتحرك في مسار دائري نصف قطره 7.5 cm .

أ - أوجد شدة المجال المغناطيسي؟

الحل - من العلاقة $r = \frac{mv}{qB}$ نجد $B = \frac{mv}{rq}$. لنوجد v أولاً

بمساواة التغير في طاقة الوضع الكهربائية مع التغير في الطاقة الحركية

$$\frac{1}{2} m v^2 = |e| \Delta V$$

$$v = \sqrt{\frac{2|e|\Delta V}{m}} = \dots = 1.11 \times 10^7 \text{ m/s}$$

بالتعويض عن v نجد

$$B = \frac{mv}{rq} = \dots = 8.43 \times 10^{-4} \text{ T}$$

ب - ماهي السرعة الزاوية ω لحركة الإلكترون في مداره؟

الحل

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1.11 \times 10^7 \text{ m/s}}{0.075 \text{ m}} = 1.48 \times 10^8 \text{ rad / s}$$

القوة المغناطيسية المؤثرة على ناقل مستقيم حامل لتيار

لقد دلت التجربة على تفاعل المجال المغناطيسي مع التيار المار في ناقل (تذكر ملاحظة أورستد). وحيث أن التيار ما هو إلا جسيمات مشحونة تتحرك باتجاه معين فلا غرابة في وجود تفاعل بين المجال المغناطيسي والناقل الحامل لتيار، عُد إلى علاقة (29.1) .

بالتأمل في شكل (29.7) أسفله نرى تجربة توضيحية تثبت وجود تفاعل بين الناقل الحامل لتيار وبين مجال مغناطيسي متعامد مع الناقل. ومن هذه التجربة يتبين أن الناقل يتعرض لقوة مغناطيسية تتعامد مع كل من التيار والمجال ويعتمد اتجاهها على اتجاههما.

شكل (29.8) يبين قطعة من ناقل مستقيم طولها L ويسري فيها تيار I ، تمثله ناقلات الشحنة التي تتحرك نحو اليمين بسرعة اندفاع متوسطها v_d وتتعرض لمجال مغناطيسي B يتجه إلى داخل الصفحة. يمكن اثبات أن هذه القطعة من الناقل تتأثر بقوة مغناطيسية F

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B} \quad (29.6)$$

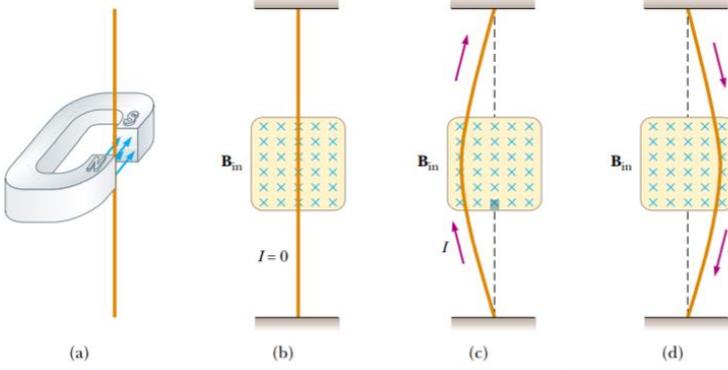


Figure 29.7 (a) A wire suspended vertically between the poles of a magnet. (b) The setup shown in part (a) as seen looking at the south pole of the magnet, so that the magnetic field (blue crosses) is directed into the page. When there is no current in the wire, it remains vertical. (c) When the current is upward, the wire deflects to the left. (d) When the current is downward, the wire deflects to the right.

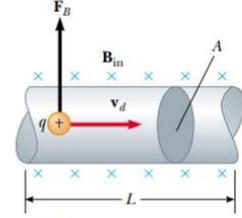


Figure 29.8 A segment of a current-carrying wire in a magnetic field \mathbf{B} . The magnetic force exerted on each charge making up the current is $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ and the net force on the segment of length L is $I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$.

Activate Wir

حيث \vec{L} متجه طوله L واتجاهه اتجاه التيار. ومن هذه العلاقة نجد مقدار هذه القوة

$$F = I L B \sin \theta \quad (29.7)$$

حيث θ هي الزاوية بين اتجاه التيار واتجاه المجال.

لهاتين العلاقتين نفس الخصائص الموجودة في علاقتي (29.1) و (29.2) فراجعهما.

مثال 29.4 يسري في ناقل مستقيم تيار شدته $2.5 A$ بالاتجاه الموجب لمحور x ، وتتعرض قطعة من الناقل طولها $0.75 m$ واقعة على محور x لمجال مغناطيسي $\vec{B} = (1.6 \hat{k}) T$. أوجد القوة المغناطيسية المؤثرة على هذه القطعة؟

الحل المجال يتجه بالاتجاه الموجب لمحور z ، ومن علاقة (29.6) نجد

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I \vec{L} \times \vec{B} = (2.5 A)(0.75 m)\hat{i} \times (1.6 T)\hat{k} \\ &= 3 N (\hat{i} \times \hat{k}) = -3 N \hat{j} \end{aligned}$$

أي أن هذه القوة قدرها 3 نيوتن وتتجه بالاتجاه السالب لمحور y .

تطبيقات على تفاعل الجسيمات المشحونة مع المجال المغناطيسي

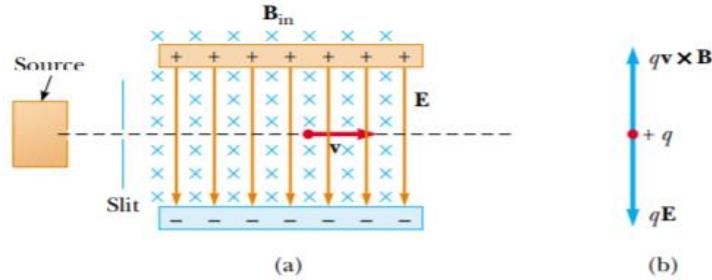
عند تعرض جسيمة مشحونة لمجالين كهربائي ومغناطيسي تتأثر بقوة تعرف بقوة لورنتز **Lorentz Force** تمثل المحصلة المتجهة للقوتين الكهربائية و المغناطيسية

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \quad (29.8)$$

ولهذه العلاقة تطبيقات منها :

1 - جهاز منتخب السرعة Velocity Selector

يُمكن هذا الجهاز من الحصول على جسيمات لها نفس الشحنة ونفس السرعة وذلك بفرزها عن ما سواها من جسيمات لها نفس الشحنة ولكن تختلف عنها في السرعة ومن ثم تختلف عنها في طاقة حركتها. وذلك بتعريض الشحنات المنطلقة من منبع للشحنات لمجالين كهربائي ومغناطيسي متعامدين كما في الشكل التالي



Active Figure 29.23 (a) A velocity selector. When a positively charged particle is moving with velocity \vec{v} in the presence of a magnetic field directed into the page and an electric field directed downward, it experiences a downward electric force $q\vec{E}$ and an upward magnetic force $q\vec{v} \times \vec{B}$. (b) When these forces balance, the particle moves in a horizontal line through the fields.

تتعرض الشحنة q المنطلقة من منبع الشحنات أفقياً نحو اليمين بسرعة v تتعرض لمجالين متعامدين مع بعضهما ومع اتجاه حركة الشحنة فتتأثر بقوتين كهربائية ومغناطيسية متعاكستين كما في الشكل . عندئذ ستواصل كل شحنة الحركة أفقياً دون انحراف متى تساوت القوتان المتعاكستان المؤثرتان عليها، أي أن شرط استمرار حركة الشحنة دون انحراف هو أن تكون

$$q E = q v B$$

و من ثم فإن سرعتها يجب أن تكون

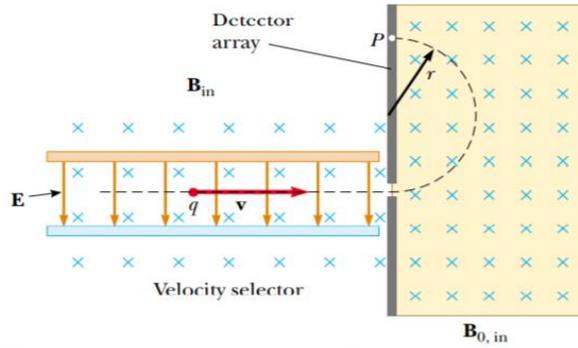
$$v = \frac{E}{B} \quad (29.9)$$

وهكذا بالتحكم في النسبة بين المجالين يمكنك اختيار ما تريد من شحنات ذات طاقة حركة موحدة $(\frac{1}{2} m v^2)$ حسب المطلوب.

Mass Spectrometer

2 – مطياف الكتلة

هو جهاز يمكن من فرز أيونات العنصر الواحد متعدد النظائر حسب النسبة بين الكتلة والشحنة. ذلك أن الجسيمات الموحدة في سرعتها وفي شحنتها المختلفة في كتلتها عند تعرضها لمجال مغناطيسي متعامد مع اتجاه حركتها تسير في مسارات دائرية ذات أنصاف أقطار تعتمد على كتلتها. يتألف جهاز مطياف الكتلة من جهاز منتخب السرعة بالإضافة لمجال مغناطيسي آخر B_0 يتعامد مع اتجاه حركة الشحنات الخارجة من جهاز منتخب السرعة كما في الشكل أسفله.



Active Figure 29.24 A mass spectrometer. Positively charged particles are sent first through a velocity selector and then into a region where the magnetic field B_0 causes the particles to move in a semicircular path and strike a detector array at P .

لدينا $r = \frac{m v}{q B_0}$ ، وبعد التعويض عن v بالمقدار $v = \frac{E}{B}$ نجد

$$r = \frac{m E}{q B B_0}$$

ومن هنا نجد

$$\frac{m}{q} = \frac{B B_0}{E} r$$

أي أن $\frac{m}{q}$ تتناسب مع نصف القطر r .

3 – مسرع الشحنات المعروف بالسيكلترون The Cyclotron

هو جهاز لتسريع الجسيمات المشحونة مثل البروتونات حتى تبلغ طاقة عالية تمكنها عند تشعيع بعض عناصر المواد بها من تحويلها لعناصر مشعة تنتج اشعاعات نووية يستخدم بعضها في علاج بعض الأورام السرطانية من خلال تدميرها للخلايا السرطانية. (تتوفر أجهزة من هذا النوع في مستشفى الملك فيصل التخصصي بالرياض) .

ويتكون الجهاز أساساً من صندوقين مجوفين كل منهما على شكل حرف D كما في الشكل التالي.

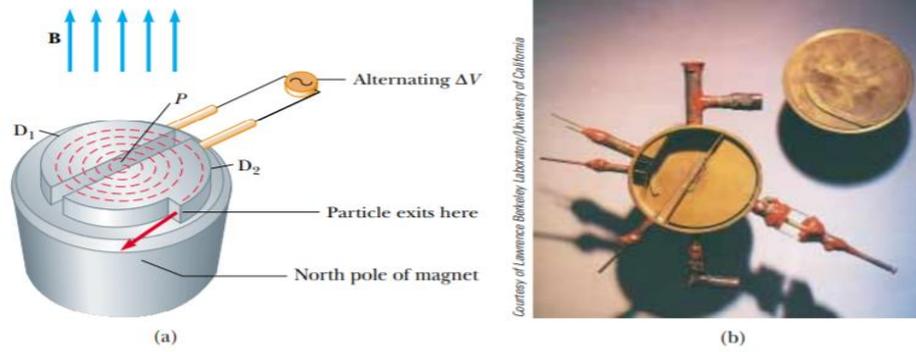


Figure 29.27 (a) A cyclotron consists of an ion source at P , two dees D_1 and D_2 across which an alternating potential difference is applied, and a uniform magnetic field. (The south pole of the magnet is not shown.) The red dashed curved lines represent the path of the particles. (b) The first cyclotron, invented by E. O. Lawrence and M. S. Livingston in 1934.

يقع بين الصندوقين منبع للبروتونات ، ويتصل الصندوقان بمصدر جهد متناوب عالي التردد يسمح بتغير القطبية بينهما بشكل دوري بحيث يتمكن الجهاز من ضخ طاقة للجسيمات كلما مرت في الحيز بين الصندوقين. يسלט على الجسيمات المسرعة مجال مغناطيسي داخل الصندوقين يضطرها للسير في مسارات دائرية يزداد نصف قطرها كلما زادت سرعتها. حيث تضخ طاقة للجسيمات مرتين في كل دورة.

تسير الجسيمات في مسارات ذات نصف قطر $r = \frac{m v}{q B}$ يزداد كلما زادت v . أقصى قيمة لـ r هي نصف قطر القرص فإذا كان ذلك هو R فإن طاقة الجسيمات النهائية تبلغ

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

Chapter 30

مصادر المجال المغناطيسي

Sources of the Magnetic Field

يصاحب مرور تيار في ناقل (بالحقيقة كل شحنة متحركة) تولد مجال مغناطيسي . ويمكن باستخدام قانون بيو - سافارت وصيغته

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{s} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (30.1)$$

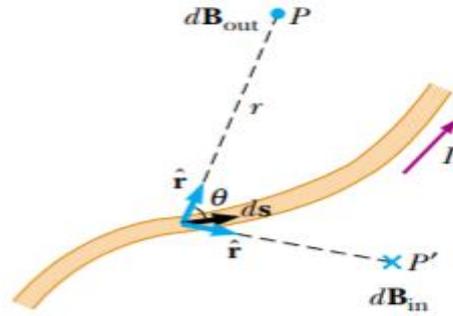


Figure 30.1 The magnetic field $d\vec{B}$ at a point due to the current I through a length element ds is given by the Biot-Savart law. The direction of the field is out of the page at P and into the page at P' .

حيث μ_0 ثابت فيزيائي يعرف بنفاذية الفراغ Permeability of free space ومقداره

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \quad (30.2)$$

أن يُنَّبَت أن شدة المجال المغناطيسي B على بعد r من ناقل مستقيم طويل يمر به تيار مستقر I هي

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (30.5)$$

سنثبت صحة هذه النتيجة بطريقة أخرى لاحقاً باستخدام قانون أمبير.

وللتعرف على دلالة الرموز الواردة في هاتين العلاقتين ينظر الشكل أعلاه. ومن مقتضيات قانون بيو - سافارت أن يكون المجال متعامداً مع كل من التيار I و r ، الخط الواصل بين النقطة P والناقل ، أي على المستوى الذي تقع فيه كل من

I و r . كما أن من مقتضيات قانون بيو - سافارت أنه لو كان الناقل المستقيم واقعاً في مستوى الصفحة واتجاه التيار كما هو موجود على الرسم أعلاه لكان اتجاه المجال إلى خارج الصفحة عند النقطة P وإلى داخلها عند النقطة P' .

ويمثل المجال حول الناقل الذي يمر به تيار بالmmas لدوائر مركزها الناقل ، واتجاه المجال هو اتجاه التفاف أصابع اليد اليمنى القابضة على الناقل والمشيرة ابهامها إلى اتجاه التيار. كما في الشكل التالي

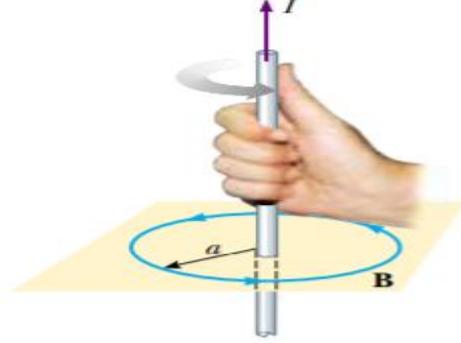


Figure 30.4 The right-hand rule for determining the direction of the magnetic field surrounding a long, straight wire carrying a current. Note that the magnetic field lines form circles around the wire.

أي أن المجال \vec{B} يقع في مستوى يتعامد مع اتجاه التيار I ومن ثم مع اتجاه المجال الكهربائي \vec{E} داخل الناقل. وينعكس اتجاه المجال عند عكس اتجاه التيار.

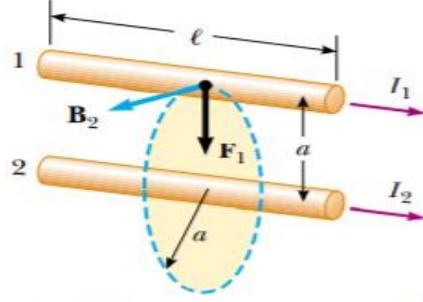
س: ما هو المجال عند نقطة حول مجموعة من الناقل الحاملة لتيارات مختلفة الشدة والاتجاهات ؟

ج: هو المحصلة المتجهة لمجموعة المجالات المتولدة من الناقل فرادى عند تلك النقطة

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + ..$$

القوة المغناطيسية المتبادلة بين تيارين في ناقلين مستقيمين متوازيين

حيث أن كل تيار يولد مجالاً مغناطيسياً خاصاً به و حيث أن الشحنات المتحركة (ومن ثم التيارات) يمكن أن تتأثر بقوة مغناطيسية عند تعرضها لمجال مغناطيسي لذا فإن تفاعل التيارين في الناقلين المتوازيين أمر متوقع. ذلك أن كل واحد من الناقلين سيقع تحت تأثير المجال المغناطيسي المتولد من تيار الناقل الآخر، كما في الشكل التالي. يمكن اثبات أنه إذا كانت المسافة بين الناقلين هي a والتياران



Active Figure 30.8 Two parallel wires that each carry a steady current exert a magnetic force on each other. The field \mathbf{B}_2 due to the current in wire 2 exerts a magnetic force of magnitude $F_1 = I_1 \ell B_2$ on wire 1. The force is attractive if the currents are parallel (as shown) and repulsive if the currents are antiparallel.

الماران فيهما هما I_1 و I_2 فإن القوة المغناطيسية المتبادلة المؤثرة على وحدة الطول من أي منهما هي

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} \quad (30.12)$$

كما يمكن من دراسة الشكل أعلاه إثبات أن هذه القوة تكون قوة تجاذب إذا كان للتيارين نفس الاتجاه وتكون قوة تنافر إذا تعاكس التياران.

تعريف وحدة التيار " الأمبير " و وحدة قياس الشحنة " الكولومب "

يمكن من علاقة (30.12) تعريف وحدة قياس شدة التيار المعروفة بالأمبير (A) ومن ثم تعريف وحدة قياس الشحنة المعروفة بالكولومب (C). يُعرّف الأمبير بأنه شدة التيار الذي إذا مر بنفس الاتجاه في كل من ناقلين متوازيين تفصلهما مسافة متر واحد ولد في الناقلين قوة تجاذب لوحد الطول تساوي $\frac{\mu_0}{2\pi}$ أي

$$\frac{F}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \frac{N}{m}$$

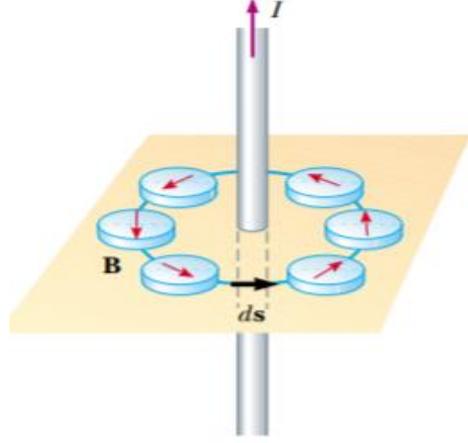
وهذه ناتجة من جعل $I_1 = I_2 = 1$ و جعل $a = 1$ في العلاقة (30.12)

أما الكولومب (C) وحدة قياس الشحنة فيعرّف بأنه كمية الشحنة التي تعبر خلال ثانية واحدة مقطع ناقل يمر به تيار مستقر شدته أمبير واحد.

Ampere s Law

قانون أمبير

لنتأمل في مسار دائري يحيط بدائرة نصف قطرها r يتعامد عليها ويمر من مركزها ناقل يسري فيه تيار I كما في الشكل أسفله.



يُمثّل المجال المغناطيسي المتولد من التيار بدوائر مركزها الناقل وتقع في مستوى يتعامد مع الناقل وسيكون اتجاه المجال مماسياً لمحيط الدائرة كما يدل عليه اتجاه الإبر المغناطيسية الموضوعة على المسار الدائري أي أن $\vec{B} \parallel d\vec{s}$ حيث $d\vec{s}$ عنصر إزاحة صغير من المسار الدائري. بالإضافة لذلك سيكون للمجال نفس المقدار عند جميع نقاط المسار لتساوي بعدها عن التيار ($B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$).

دعنا نوجد مجموع حاصل الضرب $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ عبر المسار الدائري ذي نصف

القطر r أي $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ حيث نجد

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \oint B ds \cos 0 \\ &= B \oint ds = B (2\pi r) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad (30.13)$$

تُعرف هذه العلاقة بقانون أمبير. وتعبّر I عن محصلة أو صافي التيارات التي تعبر السطح أو المساحة التي يحيط بها المسار المغلق. لاحظ أن نتيجة التكامل أعلاه مستقلة عن مساحة السطح أو شكله.

تسمى علاقة (30.13) بقانون أمبير. ويسهل هذا القانون إيجاد صيغة للمجال المغناطيسي المتولد من التيارات الكهربائية التي تتوزع على النواقل بتمثيل جيد. فهذا القانون له دور شبيه بالدور الذي يؤديه قانون جاوس الذي يسهل عملية إيجاد المجال الكهربائي حول بعض الأجسام المشحونة.

ومما يجب التنبيه له أن صافي التيارات التي تعبر عنها I في العلاقة أعلاه لا تتضمن أي تيار يمر من مساحة أو سطح يقع خارج المسار المغلق ، تذكر قانون جاوس وأنه لا علاقة له بأي شحنة تقع خارج سطح جاوس.

كذلك عند تطبيق قانون أمبير يحسن أن نختار بعناية بالغة شكل المسار المغلق ، ويساعد على ذلك تصورنا السليم لانتشار المجال المغناطيسي، لتسهيل العمليات الحسابية مثل اختيارنا لشكل سطح جاوس عند تطبيقنا لقانون جاوس.

مثال 30.1 يتوزع تيار I بانتظام على مساحة مقطع ناقل نصف قطره R . أوجد المجال أولاً : خارج الناقل أي على بعد من مركز الناقل $r > R$

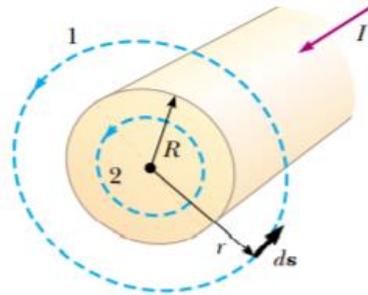


Figure 30.12 (Example 30.4) A long, straight wire of radius R carrying a steady current I uniformly distributed across the cross section of the wire. The magnetic field at any point can be calculated from Ampère's law using a circular path of radius r , concentric with the wire.

الحل - يمثل المجال حول ناقل مستقيم بدوائر مركزها مركز الناقل لذا يحسن أن نأخذ المسار المغلق عبارة عن محيط دائرة متمركزة مع الناقل ومتعامدة معه نصف قطرها $r > R$ أي المسار رقم 1 في الشكل أعلاه. من قانون أمبير نجد

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

أي أن

$$\oint B ds \cos \theta = \mu_0 I$$

وحيث أن $\vec{B} \parallel d\vec{s}$ و B لها نفس المقدار عند جميع نقاط المسار المغلق لتساوي بعد نقاط المسار عن مركز الناقل أي ثابتة المقدار وصافي التيارات التي تمر عبر المساحة التي يحيط بها المسار المغلق هو I وطول المسار المغلق هو $2\pi r$ لذا نجد

$$B \oint ds = B (2\pi r) = \mu_0 I$$

أي أن

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (30.14)$$

وهذه هي نفس النتيجة (30.5) التي مرت معنا سابقاً بدون برهان.

ثانياً : اوجد المجال داخل الناقل أي على بعد من مركز الناقل $R > r$

الحل - من تماثل الشكل سنأخذ المسار المغلق مساراً دائرياً نصف قطره r ويتمركز مع الناقل. عندئذ نجد أنه سيكون لـ B نفس المقدار عند جميع نقاط المسار المغلق 2 كما أن طول المسار هو $2\pi r$ و $\vec{B} \parallel d\vec{s}$ أما التيار الذي يمر من خلال المساحة التي يحيط بها هذا المسار فهو جزء من التيار الكلي I و من ثم فلو كان هذا التيار هو I' فإن نسبته إلى التيار الكلي ستكون كنسبة المساحة داخل المسار 2 إلى مساحة مقطع الناقل ذلك أن I تتوزع بانتظام على مقطع الناقل أي أن

$$\frac{I'}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \rightarrow I' = I \frac{r^2}{R^2}$$

ومن ثم فمن قانون أمبير سنجد

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I'$$

$$B (2\pi r) = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r \quad (30.15)$$

أي أن المجال داخل الناقل يتناسب طردياً مع البعد عن مركز الناقل وتكون شدته أعلى ما تكون على سطح الناقل. انظر الشكل أسفله.

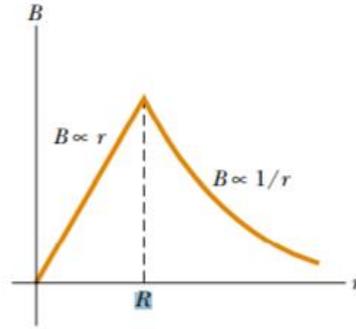


Figure 30.13 (Example 30.4) Magnitude of the magnetic field versus r for the wire shown in Figure 30.12. The field is proportional to r inside the wire and varies as $1/r$ outside the wire.

المجال المغناطيسي داخل ملف سلكي

The Magnetic Field of a Solenoid

السلكي ملف ، من سلك موصل ، حلزوني اسطواني الشكل متراص اللفات يتميز بطول اسطوانته l وعدد لفاته N . إذا مر في سلكه تيار I تولد داخله مجال مغناطيسي B بموازية محوره ، ويمكن اعتباره منتظماً ، خاصة إذا كانت مساحة مقطع الملف صغيرة مقارنة بطوله . يعتبر المجال خارج الملف ضعيفاً ويمكن إهماله. إذا مر في ملف السلكي تيار أصبحت إحدى نهايتيه قطباً شمالياً والأخرى قطباً جنوبياً حسب اتجاه التيار. يمكن إيجاد صيغة للمجال داخل الملف بدلالة شدة التيار وعدد اللفات وطول اسطوانته مستفيدين من قانون أمبير

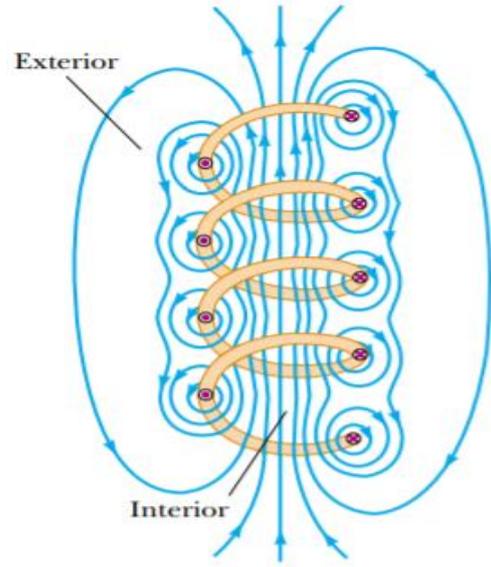


Figure 30.17 The magnetic field lines for a loosely wound solenoid.

يمثل الشكل أسفله مقطعاً طولياً لسolenoid يمر به تيار I . حيث أن المجال مهمل بالخارج و منتظماً في الداخل ويوازي محور الملف لذا يحسن أن نأخذ المسار المغلق عبارة عن أضلاع مستطيل يقع جزء منه داخل الملف وجزء خارجه. ليكن طول هذا المستطيل هو l وليكن بموازاة محور الملف أي بموازاة المجال أما عرض المستطيل فسيكون متعامداً مع المجال . ليكن عدد اللفات داخل المستطيل هو N . عندئذ سيكون صافي التيارات داخل مساحة المستطيل هو NI . الآن بتطبيق قانون أمبير نجد

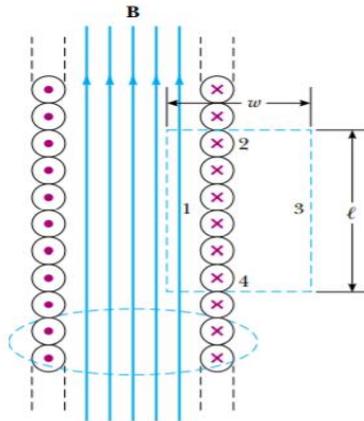


Figure 30.19 Cross-sectional view of an ideal solenoid, where the interior magnetic field is uniform and the exterior field is close to zero. Ampère's law applied to the circular path near the bottom whose plane is perpendicular to the page can be used to show that there is a weak field outside the solenoid. Ampère's law applied to the rectangular dashed path in the plane of the page can be used to calculate the magnitude of the interior field.

تكمالات $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ على أضلاع المستطيل الأربعة المرقمة 1 و 2 و 3 و 4 . لكن $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I'$ حيث $I' = NI$. أما $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ فهو مجموع

بالتأمل في الشكل سنجد أن تكامل هذا المقدار يساوي الصفر على ثلاثة من أضلاع المستطيل وهي 2 و 3 و 4 ذلك أن \vec{B} إما أن تكون مهملة أو متعامدة مع $d\vec{s}$ في أجزاء منها. فيبقى التكامل على الضلع رقم 1. حيث $\vec{B} \parallel d\vec{s}$ وطول الضلع هو l

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int_1 ds = Bl = \mu_0 N I$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I \quad (30.16)$$

حيث n هو عدد اللفات لوحدة الطول من الملف.

ملحوظة : يعد السلنويد من أهم مصادر المجال المغناطيسي الكهربائي. سنشير إلى هذه العلاقة البسيطة الهامة لاحقاً في أكثر من موضع.

التدفق المغناطيسي وقانون جاوس في المغناطيسية

Magnetic Flux and Gauss's Law in Magnetism

يعرف التدفق المغناطيسي Φ_B من خلال سطح بنفس الكيفية التي عرف بها التدفق الكهربائي من خلال سطح.

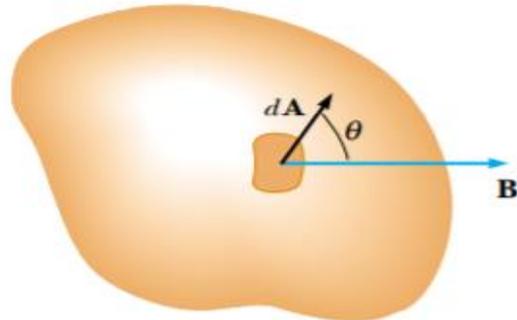


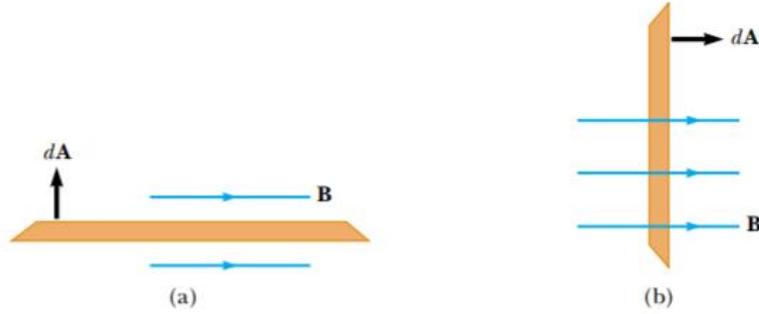
Figure 30.20 The magnetic flux through an area element dA is $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = B dA \cos \theta$, where $d\mathbf{A}$ is a vector perpendicular to the surface.

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

حيث $d\vec{A}$ متجه عمودي على العنصر السطحي dA ومقداره يساوي مساحة العنصر السطحي. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها المجال منتظماً على السطح A فإن

$$\Phi_B = B A \cos \theta$$

وبالتالي فإن التدفق من خلال السطح الموجود في **a** من الشكل أسفله



Active Figure 30.21 Magnetic flux through a plane lying in a magnetic field. (a) The flux through the plane is zero when the magnetic field is parallel to the plane surface. (b) The flux through the plane is a maximum when the magnetic field is perpendicular to the plane.

يساوي الصفر بينما التدفق في b هو أكبر قدر ويساوي BA . ويتضح من العلاقات أعلاه أن وحدة التدفق المغناطيسي هي $T \cdot m^2$. تعرف هذه الوحدة بالويبر **weber** أي أن

$$1\text{Wb} = 1\text{ T} \cdot \text{m}^2$$

مثال 30.2 أوجد التدفق المغناطيسي خلال مساحة المستطيل المبين في الشكل أسفله الناشئ من التيار I المار في الناقل المستقيم الموجود يسار الشكل.

الحل مما تعلمناه سابقاً سيكون المجال المغناطيسي عمودياً على مستوى الصفحة ويتجه إلى الداخل غير أنه غير منتظم على مساحة المستطيل لأنه يتناقص بالبعد عن الناقل. لذا يحسن أن نأخذ شريحة من المستطيل ذات عرض صغير dr وتبعد مسافة r عن الناقل بحيث يكون المجال منتظماً على هذه الشريحة. ستسهم هذه الشريحة بعنصر تدفق

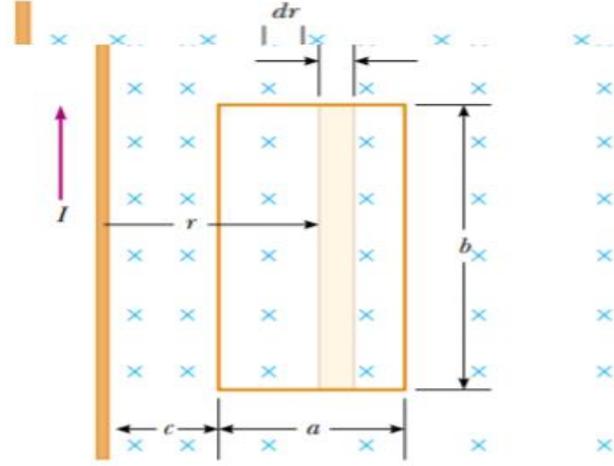


Figure 30.22 (Example 30.8) The magnetic field due to the wire carrying a current I is not uniform over the rectangular loop.

$$d\Phi_B = B dA = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) (b dr) = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right) I b \frac{dr}{r}$$

ويكون التدفق الكلي هو

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right) I b \int_c^{c+a} \frac{dr}{r} = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right) I b \ln r_c^{c+a} \\ &= \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right) I b \ln \left(\frac{c+a}{c} \right) \end{aligned}$$

س : ما هو تعليقك على مقدار التدفق عندما تصبح c كبيرة جداً ؟

س : ما هو تعليقك على مقدار التدفق عندما تصبح c صغيرة جداً ؟

قانون جاوس في المغناطيسية Gauss's Law in Magnetism

لقد مر معنا سابقاً قانون جاوس في الكهربائية كما مر معنا أن خطوط المجال الكهربائي تنبع من الجسم موجب الشحنة وتتجه نحو السالب إن وجد و إلا اتجهت نحو اللانهاية. لكن الأمر ليس كذلك بالنسبة لخطوط المجال المغناطيسي فهي تُكوّن مسارات مغلقة نظراً لتلازم وجود القطبين المغناطيسيين مع بعض، وهذا خلاف

الشحنات الموجبة والشحنات السالبة إذ لا تلازم بينها. لذلك فإن أي سطح مغلق يتعرض لمجال مغناطيسي فإن عدد الخطوط التي تخترقه إلى الداخل لا بد أن يساوي عدد الخطوط الخارجة منه ومن ثم فإن محصلة التدفق لا بد أن تساوي الصفر.

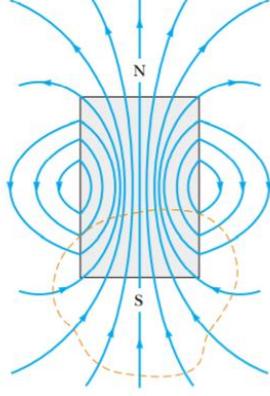


Figure 30.23 The magnetic field lines of a bar magnet form closed loops. Note that the net magnetic flux through a closed surface surrounding one of the poles (or any other closed surface) is zero. (The dashed line represents the intersection of the surface with the page.)

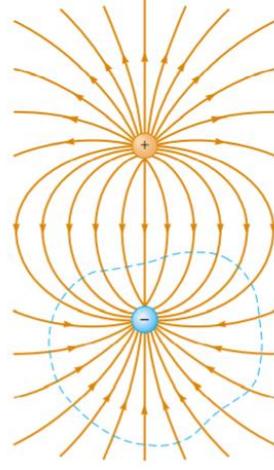


Figure 30.24 The electric field lines surrounding an electric dipole begin on the positive charge and terminate on the negative charge. The electric flux through a closed surface surrounding one of the charges is not zero.

Activat
C... S...

لذا فإن قانون جاوس في المغناطيسية يكتب بالصيغة

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (30.17)$$

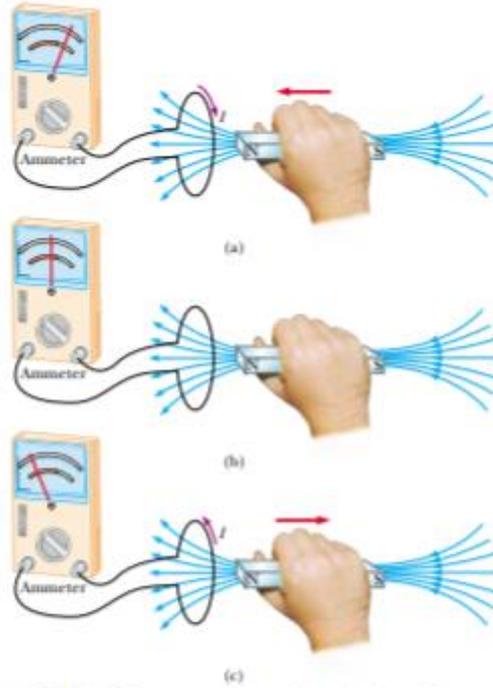
Chapter 31

Faraday's Law

قانون فاراداي

يعد قانون فاراداي من أهم القوانين في الفيزياء والهندسة الكهربائية . فهو أساس إنتاج الطاقة الكهربائية في محطات التوليد و أساس رفع الجهود وخفضها في المحولات الكهربائية اللازمة لنقل الطاقة وتوزيعها على المستهلكين. وصيغة هذا القانون الهام مستلهمة من المشاهدات في التجربتين التاليتين:

التجربة الأولى : تلخص الأشكال الثلاثة التالية مضمون هذه التجربة.



Active Figure 31.1 (a) When a magnet is moved toward a loop of wire connected to a sensitive ammeter, the ammeter deflects as shown, indicating that a current is induced in the loop. (b) When the magnet is held stationary, there is no induced current in the loop, even when the magnet is inside the loop. (c) When the magnet is moved away from the loop, the ammeter deflects in the opposite direction, indicating that the induced current is opposite that shown in part (a). Changing the direction of the magnet's motion changes the direction of the current induced by that motion.

فكما يشاهد لدينا في كل شكل : قضيب مغناطيسي + سلك توصيل على هيئة لفة + جهاز جلفانومتر أو أميتر موصل بنهايتي اللفة.

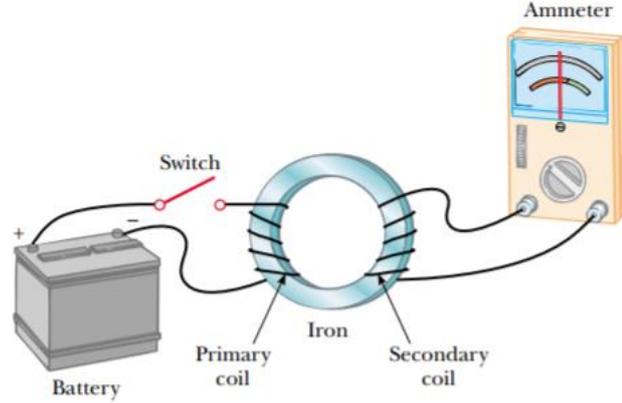
المشاهدات:

1 - يبين شكل a أنه أثناء تقريب المغناطيس نحو اللفة يتحرك مؤشر الجلفانومتر نحو اليمين مثلاً.

2 - يبين شكل b أنه عند توقف حركة المغناطيس يعود مؤشر الجلفانومتر إلى الصفر.

3 - يبين شكل C أنه أثناء عكس اتجاه حركة المغناطيس أي أثناء إبعاده عن اللفة يتحرك مؤشر الجلفانومتر ولكن بالاتجاه المعاكس أي نحو اليسار مثلاً .

التجربة الثانية:



Active Figure 31.2 Faraday's experiment. When the switch in the primary circuit is closed, the ammeter in the secondary circuit deflects momentarily. The emf induced in the secondary circuit is caused by the changing magnetic field through the secondary coil.

الأدوات المستخدمة في هذه التجربة كما تبدو من الشكل هي :

مصدر للتيار (بطارية) + حلقة من الحديد (مادة قابلة للتمغنط) ملفوف على الجهة اليسرى منها ملف من سلك موصل مغطى بمادة عازلة كهربائياً وتتصل بالبطارية عبر قاطعة وعلى الجهة اليمنى ملف معزول ويتصل بجهاز جلفانومتر.

المشاهدات :

أثناء قفل القاطعة يتحرك مؤشر الجلفانومتر نحو اليمين مثلاً.

يعود المؤشر للصفر إذا استمرت القاطعة مغلقة.

أثناء فتح القاطعة يتحرك مؤشر الجلفانومتر ولكن بالاتجاه المعاكس.

يعود المؤشر للصفر بعد ذلك إذا استمرت القاطعة مفتوحة.

المناقشة:

في التجربة الأولى يوجد لدينا مجال مغناطيسي مصدره القضيب المغناطيسي وتعرض لهذا المجال مساحة يحيط بها الناقل الموصلة نهايتاه بالجلفانومتر. ويلاحظ في هذه التجربة أن مؤشر الجلفانومتر لا يتحرك إلا أثناء تقريب المغناطيس أو أثناء إبعاده من اللفة. أي أن وجود المحال المغناطيسي وحده غير كاف لتحري

المؤشر وإنما التغير مع الزمن في التدفق المغناطيسي بالزيادة أو النقصان هو شرط حدوث حركة المؤشر. تدل حركة المؤشر على مرور تيار في اللفة وهو يستلزم بالضرورة تولد قوة كهربائية دافعة مستحثة بالتغير في التدفق المغناطيسي. هذه القوة الكهربائية الدافعة المستحثة في اللفة وجد أنها تتناسب مع معدل التغير في التدفق المغناطيسي.

في التجربة الثانية عند قفل القاطعة يسري تيار في اللفة الموجودة على الجهة اليسرى من حلقة الحديد مما يتسبب في تولد مجال مغناطيسي داخل اللفة (تذكر ملف السلنويد). هذا المجال تنقله حلقة الحديد نتيجة لتمغنطها إلى الجزء الذي تحيط به اللفة الثانية الموصلة بالجلفانومتر. يلاحظ أن وجود هذا المجال المغناطيسي داخل اللفة الثانية غير كاف لتحريك مؤشر الجلفانومتر وإنما الشرط اللازم لتحريك المؤشر هو التغير في التدفق المغناطيسي الذي يحدث أثناء قفل القاطعة نتيجة تزايد التيار في اللفة اليسرى ويحدث أثناء فتح القاطعة وتناقص التيار فيها.

يمكن تلخيص ما سبق في القول بأن تعرض أي دائرة لتدفق مغناطيسي يتغير مع الزمن يولد فيها قوة كهربائية دافعة مستحثة، بحيث إذا وصلت نهايتها مع بعض سرى فيها تيار كهربائي تعتمد شدته على معدل التغير في التدفق.

يمكن تجسيد ما سبق في صيغة رياضية تعرف بقانون فاراداي في الحث الكهربائي حيث يعبر عن القوة الدافعة الكهربائية المستحثة (المحرصة) بالعلاقة

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (31.1)$$

ولو كانت الدارة مكونة من N لفة لكانت

$$\varepsilon = - N \frac{d\Phi}{dt} \quad (31.2)$$

حيث تعبر Φ عن التدفق المغناطيسي.

الإشارة السالبة هي ثابت التناسب وقد أقحمت هنا لأنه وجد أن اتجاه التيار الكهربائي المستحث في الدارة يكون بحيث يعاكس المجال المغناطيسي المتولد منه السبب في وجوده. فإن كان السبب في وجوده تزايد التدفق كان اتجاه مجال التيار المستحث بحيث ينقص من التدفق الذي تتعرض له الدارة والعكس صحيح.

تعرف العلاقتان أعلاه بقانون فاراداي في الحث الكهربائي ولهما في الحياة العملية التطبيقية بالغ الأهمية إذ هما أساس إنتاج الطاقة الكهربائية في المولدات الكهربائية حيث تتولد الكهرباء من دوران ملفات في مجال مغناطيسي.

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها المجال المغناطيسي منتظماً على مساحة الدارة A ويعمل اتجاهه زاوية θ مع العمودي على المساحة (المستوى الذي تقع فيه الدارة) يمكن أن نكتب

$$\varepsilon = - \frac{d}{dt} (B A \cos \theta) \quad (31.3)$$

تبين هذه العلاقة أن تغير أي من العوامل داخل القوسين مع الزمن كفيل بتولد قوة دافعة كهربائية مستحثة في الدارة المعرضة للمجال المغناطيسي.

مثال 31.1 يتكون اطار، مربع الشكل ، طول ضلعه $d = 18 \text{ cm}$ من سلك موصل عدد لفاته 200 لفة. يتعرض مستوى الإطار لمجال مغناطيسي يتعامد معه ويزداد بشكل خطي من الصفر حتى يبلغ 0.5 T خلال 0.8 s . أوجد القوة الكهربائية الدافعة المستحثة في هذا الاطار والتيار إذا كانت مقاومته 2.0Ω ؟

الحل

$$|\varepsilon| = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = N \frac{\Delta (A B)}{\Delta t} = N A \frac{\Delta B}{\Delta t} =$$

$$N d^2 \frac{(B_f - B_i)}{\Delta t} = 200 (0.18 \text{ m})^2 \frac{(0.5 \text{ T} - 0)}{0.8 \text{ s}} = 4.0 \text{ V}$$

أما التيار فهو

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \dots = 2 \text{ A}$$

مثال 31.2 تتعرض مساحة يحيط بها loop من مادة موصلة لمجال مغناطيسي يتعامد مع مستواها ويتناقص مع الزمن بشكل أسي وفق العلاقة :
 $B = B_{max} e^{-\alpha t}$ حيث α مقدار ثابت . عبر عن القوة الدافعة الكهربائية المستحثة بدلالة الزمن.

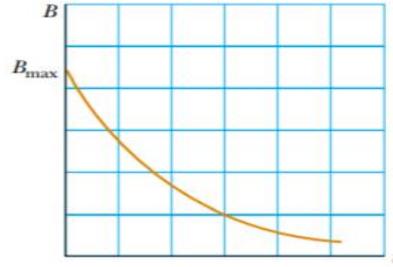


Figure 31.7 (Example 31.2) Exponential decrease in the magnitude of the magnetic field with time. The induced emf and induced current vary with time in the same way.

الحل

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (A B_{max} e^{-\alpha t}) = \\ &= -A B_{max} \frac{d}{dt} e^{-\alpha t} = \alpha A B_{max} e^{-\alpha t}\end{aligned}$$

أي أن ε تتناقص مع الزمن بشكل أسي مماثل لتناقص B مع الزمن.

القوة الكهربائية المستحثة في ناقل مستقيم يتحرك في مجال مغناطيسي

لنتأمل في الشكل التالي

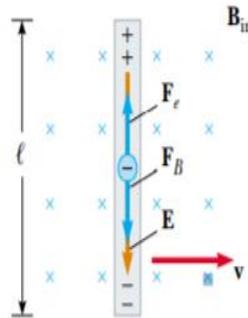


Figure 31.9 A straight electrical conductor of length ℓ moving with a velocity \mathbf{v} through a uniform magnetic field \mathbf{B} directed perpendicular to \mathbf{v} . Due to the magnetic force on electrons, the ends of the conductor become oppositely charged. This establishes an electric field in the conductor. In steady state, the electric and magnetic forces on an electron in the wire are balanced.

حيث تتحرك شريحة من ناقل مستقيم طولها l بسرعة v إلى اليمين في مجال B يتعامد مع اتجاه الحركة ويتجه إلى داخل الصفحة. تتفاعل ناقلات الشحنة (الإلكترونات) مع المجال نتيجة حركتها مع الناقل ومن ثم يتأثر الإلكترون بقوة مغناطيسية $F_B = q v B$ تتجه لأسفل الشريحة مما يتسبب في تكون شحنة سالبة أسفل الناقل وأخرى موجبة مساوية لها في أعلاه. يرافق هذه العملية تولد مجال كهربائي E يتجه من الأعلى نحو الأسفل يؤثر على الإلكترون بقوة كهربائية

لأعلى $F_e = q E$. عند تساوي تلك القوتين المتضادتين يحدث اتزان ويتوقف انزياح الإلكترونات. عند ذلك نجد

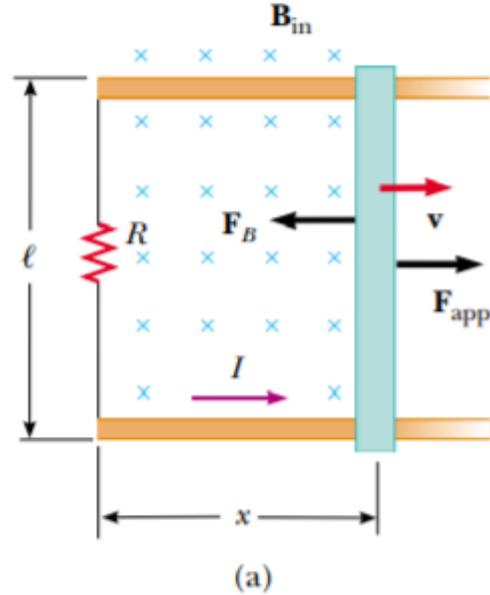
$$q v B = q E$$

$$\text{ولكن } \Delta V = E l \leftarrow E = \frac{\Delta V}{l} \text{ وبالتعويض عن } E \text{ نجد}$$

$$\Delta V = B l v \quad (31.4)$$

أي أن هناك قوة كهربائية دافعة مستحثة بين نهايتي هذه الشريحة من الناقل تتناسب طردياً مع سرعة حركتها في المجال.

هذا ويمكن الوصول إلى نفس هذه النتيجة باستخدام قانون فاراداي. لنأمل في الشكل التالي الذي وصلت فيه نهايتنا هذه الشريحة ، المنزلة فوق مجرى من مادة موصلة ، مع بعض أثناء تحركها في المجال بحيث تحصر الدارة مساحة تتغير مع الزمن.



ليكن بعد الشريحة المتحركة عن الطرف الأيسر للمجرى هو x . عندئذ المساحة المعرضة للمجال هي $A = l x$ والتدفق المغناطيسي من خلالها هو

$$\Phi_B = B A = B l x$$

ومن قانون فاراداي نجد

$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi}{dt} = B l \frac{dx}{dt} = B l v \quad (31.5)$$

وهذه هي نفس نتيجة علاقة (31.4)

وعندما تكون R هي مقاومة هذه الدارة يكون تيارها

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{B l v}{R}$$

مثال 31.3 تدور شريحة موصلة طولها l حول إحدى نهايتها بسرعة زاوية ω في مجال مغناطيسي B يتعامد مع مستوى الدوران. أوجد القوة الكهربائية الدافعة المستحثة في هذه الشريحة أثناء دورانها؟

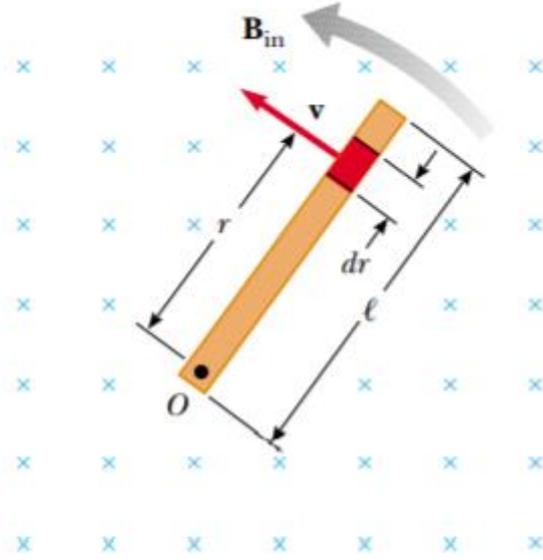


Figure 31.11 (Example 31.4) A conducting bar rotating around a pivot at one end in a uniform magnetic field that is perpendicular to the plane of rotation. A motional emf is induced across the ends of the bar.

الحل من العلاقات أعلاه نجد $|\varepsilon| = B l v$. لكن v ليس لها نفس المقدار على امتداد الشريحة لكونها تختلف بحسب البعد عن مركز الدوران. دعنا نأخذ قطعة صغيرة من الشريحة عرضها dr وتبعد عن محور الدوران مسافة r . لتكن سرعة حركتها هي v عندئذ ستسهم هذه القطعة بعنصر $d\varepsilon$ من القوة الدافعة الكهربائية قدره $d\varepsilon = B dr v$ ، وبالتعويض عن v بـ ωr نجد

$$d\varepsilon = B dr \omega r$$

$$\varepsilon = B \omega \int_0^l r dr = \frac{1}{2} B \omega l^2$$

وهكذا يتبين أن العامل الأكثر أهمية في توليد ε هو طول الشريحة التي تدور في المجال.

Chapter 32

Inductance

المحاثة

Self Inductance

معامل الحث الذاتي

لنتأمل في الشكل التالي. عند قفل القاطعة يتزايد التيار في الدارة حتى يصل إلى حالة الاستقرار مما يعرض المساحة التي تحيط بها الدارة لتدفق مغناطيسي يتزايد مع الزمن وهو ما يتسبب في تولد قوة دافعة كهربائية مستحثة في الدارة تتلاشى عند استقرار التيار. يحدث نفس الشيء عند فتح القاطعة ليتناقص التيار ومن ثم التدفق المغناطيسي وتتلاشى تلك القوة الدافعة الكهربائية عند تلاشي التيار. سيكون اتجاه التيار الناشئ من القوة الدافعة المستحثة عكس اتجاه تيار الدارة في الحالة الأولى وبنفس اتجاهه في الحالة الثانية. (علل لذلك ؟)

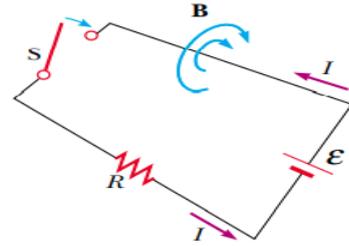


Figure 32.1 After the switch is closed, the current produces a magnetic flux through the area enclosed by the loop. As the current increases toward its equilibrium value, this magnetic flux changes in time and induces an emf in the loop.

وحيث أن سبب تولد القوة الدافعة المستحثة في الدارة هو تغير تيارها مع الزمن سواء بالزيادة أو النقصان لذا يمكن أن نكتب

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad (32.1)$$

حيث L هو ثابت التناسب ويسمى محاثة الدارة أو معامل حثها الذاتي. من ناحية أخرى فلو كانت الدارة مكونة من N لفة فحسب قانون فاراداي

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (32.1) *$$

بمساوات الطرف الأيمن من هاتين العلاقتين مع بعض نجد أن معامل الحث الذاتي يمكن أن يكتب أو يعرف بالصيغتين

$$L = \frac{N \Phi_B}{I} \quad (32.2)$$

و

$$L = - \frac{\varepsilon}{dI/dt} \quad (32.3)$$

ومن العلاقة الأخيرة (32.3) نجد أن وحدة معامل الحث الذاتي L هي : فولت. ثانية | أمبير $\equiv \frac{V \cdot s}{A}$. تسمى هذه الوحدة بالهنري ورمزه H أي أن

$$1 \text{ H} = 1 \frac{V \cdot s}{A}$$

وتعتمد L على أبعاد الدارة فقط . ولكل دارة (ملف) معامل حث ذاتي خاص بها. (تذكر سعة المكثف و مقاومة قطعة من ناقل أومي).

مثال 32.1 عدد لفات ملف سنويدي N وطوله l ومساحة مقطعه A .
أ - أوجد معامل الحث الذاتي له؟

الحل

$$L = \frac{N \Phi_B}{I}$$

و

$$\Phi_B = B A = \mu_0 n I A = \mu_0 \frac{N}{l} I A$$

ومنه فإن

$$L = \frac{N}{I} \left(\mu_0 \frac{N}{l} I A \right)$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A \quad (32.4) \quad \text{أو}$$

أي أن معامل الحث الذاتي لملف سنويدي يعتمد على أبعاده فقط.

ب احسب L لهذا السلنويد عندما تكون $N = 300$ و $l = 25 \text{ cm}$ و $A = 4 \text{ cm}^2$

الحل

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A = 4 \pi 10^{-7} T \cdot \frac{m}{A} \frac{(300)^2}{25 \times 10^{-2} m} (4 \times 10^{-4} m^2) \\ = 0.181 mH$$

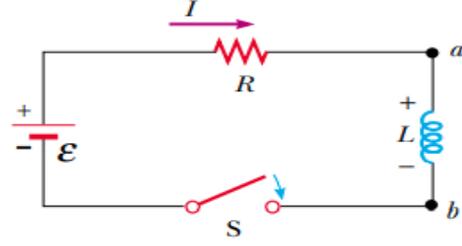
ج عند تناقص تيار هذا السلنويد بمعدل 50 A/s كم تكون القوة الدافعة المستحثة في هذا السلنويد؟

الحل

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} = -(0.181 \times 10^{-3} H) \left(\frac{-50 A}{s} \right) \\ = 9.05 \text{ mV}$$

الطاقة المخزنة في مجال مغناطيسي

يرمز لعنصر الدارة الذي له معامل حث كبير بالرمز  ويسمى ملف **Inductor**. وكما هو معلوم إذا مر تيار في ملف تولد داخله مجال مغناطيسي. علينا أن نوجد صيغة للطاقة المخزنة في المجال مغناطيسي على غرار صيغة الطاقة المخزنة في المجال الكهربائي التي وردت معنا في **Chapter 26**.
لنتأمل في الدارة أسفله المكونة من مصدر **d c** قوته الدافعة ε ومقاومة **R** وملف له معامل حث **L** وقاطعة **s**. بتطبيق قاعدة المسار المغلق لكيرشوف نجد



Active Figure 32.3 A series RL circuit. As the current increases toward its maximum value, an emf that opposes the increasing current is induced in the inductor.

$$\varepsilon - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

و

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt} \quad (32.5)$$

وبالضرب في I نجد

$$I\varepsilon = I^2 R + LI \frac{dI}{dt} \quad (32.6)$$

تمثل $I\varepsilon$ القدرة المستمدة من المصدر و $I^2 R$ القدرة المستهلكة في R أما الحد $LI \frac{dI}{dt}$ فيمثل القدرة المخزنة في الملف (معدل تخزين الطاقة في الملف). لاحظ أن $L \frac{dI}{dt}$ تمثل القوة الدافعة المستحثة في الملف أثناء قفل القاطعة وتزايد التيار . وبالرمز للطاقة المخزنة في الملف أثناء مرور تيار فيه بالرمز U_m فإن

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

وتكون

$$U_m = \int dU_m = \int_0^I LI dI$$

أي أن

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (32.7)$$

أي أن الطاقة المخزنة في ملف تتناسب طردياً مع مربع تياره.
ليكن الملف المشار إليه أعلاه ملف سننويد . عندئذ

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A = \mu_0 n^2 A l$$

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} \quad \leftarrow \quad B = \mu_0 n I \quad \text{و}$$

بالتعويض عن كل من L و I في علاقة (32.7) نجد

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 (A l) \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2 \mu_0} (A l) \quad (32.8)$$

وحيث أن $(A l)$ تمثل حجم الحيز داخل الملف وهو مشغول بالمجال B لذا
بالقسمة على $(A l)$ نحصل على ما يعرف بكثافة الطاقة الحجمية u_m
المصاحبة للمجال المغناطيسي في الفراغ

$$u_m = \frac{U_m}{(A l)} = \frac{B^2}{2 \mu_0} \quad (32.9) \quad \frac{J}{m^3}$$

أي أن هناك طاقة تصاحب كل مجال مغناطيسي تتناسب مع مربع شدته.

س: ما وجه التشابه بين تلك العلاقة وعلاقة الطاقة المصاحبة للمجال الكهربائي
التي مرت معنا في Chapter 26 ؟

ج: كل من الطاقتين تتناسب طردياً مع

س: تتكون الأمواج الكهرومغناطيسية ومن ضمنها أمواج الضوء من مجالين
متعامدين هما المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي . يمكن التعبير عن سرعة
الضوء في الفراغ c بدلالة الثابتين μ_0 و ϵ_0 . حاول أن توجد تلك الصيغة.

Chapter 33

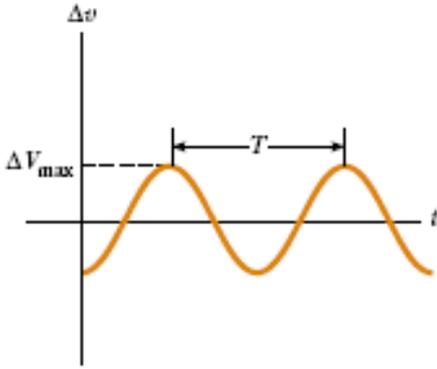
دارات التيار المتناوب (المتردد)

Alternating Current Circuits

ينتج التيار المتناوب من دوران ملف في مجال مغناطيسي. ويمكن التعبير عن التيار المتناوب بصيغة جيبية من الشكل:

$$\Delta v = \Delta V_m \sin \omega t$$

حيث ترمز Δv للقيمة اللحظية للجهد و ΔV_m للقيمة العظمى للجهد و t للزمن و ω للتردد الزاوي ($\omega = 2\pi f$) و f هو التردد بالهرتز Hz. ($f = 1/T$ حيث T هو الزمن الدوري)



ويولد الجهد المتناوب تيارًا متناوبًا في الدارة يمكن التعبير عنه بدالة جيبية مماثلة للعلاقة أعلاه.

$$i = I_m \sin \omega t$$

ويرمز لمصدر الجهد المتناوب بالرمز 

وفي كثير من الأحيان لا يكون الجهد ΔV_m والتيار I_m متطاورين ، بمعنى أن التيار والجهد لا يتماشيان فيبلغا قيمهما العظمى أو الدنيا في نفس اللحظة ، بل يمكن أن يتقدم أحدهما الآخر بفارق زمني معين وهو ما يعبر عنه بوجود زاوية فرق طور ϕ بينهما.

المتجهات الدوارة Phasors

يمكن التعبير عن التطاور بين التيار والجهد برسم موجتين أحدهما للتيار والأخرى للجهد على محورين متعامدين. و هناك طريقة بديلة أبسط من تلك وهو ما يعرف بالمتجهات الدوارة **Phasors** . وهما متجهان يمثل أحدهما القيمة العظمى للجهد والآخر القيمة العظمى للتيار ، يرسمان بحيث تفصل بينهما عند أي لحظة زاوية فرق الطور ϕ ، ويدوران معاً بنفس السرعة الزاوية ω ، تمثل مساقطهما على محور Y القيم اللحظية لكل من الجهد والتيار. (انظر الأشكال اللاحقة)

القيم الفعالة لكل من الجهد والتيار المتناوبين

هي ما يعرف بـ ΔV_{rms} و I_{rms} حيث ترمز القرينة rms إلى **root mean squared** أي جذر متوسط مربع القيمة . و تؤدي القيم الفعالة هذه نفس الدور التي تؤديه قيم جهد والتيار مستمر (تيار بطارية مثلا) مساوية لها في المقدار. ويمكن إثبات أن القيم الفعالة هذه ترتبط بالقيم العظمى لكل من الجهد والتيار من خلال العلاقات البسيطة التالية:

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m \quad (33.4)$$

$$\Delta V_{rms} = \frac{\Delta V_m}{\sqrt{2}} = 0.707 \Delta V_m \quad (33.5)$$

س : إذا كان تردد التيار في مدينة الرياض هو 60 Hz فكم تكون ω ؟

ج :

$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$

دارات التيار المتناوب البسيطة

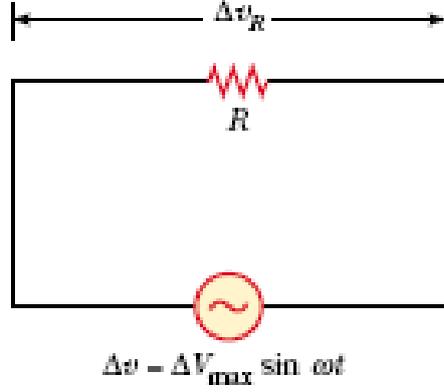
سندرس أربع دارات بسيطة هي :

- 1 (دائرة فيها مقاومة R موصلة بمصدر متناوب.
- 2 (دائرة فيها ملف خالص L موصل بمصدر متناوب.
- 3 (دائرة فيها مكثف خالص C موصل بمصدر متناوب.
- 4 (دائرة فيها R, L, C موصلة على التوالي مع مصدر متناوب.

نهدف من دراسة كل دائرة من هذه الدارات إلى التعرف على:

- 1 (إيجاد صيغة لفرق الجهد عبر عنصر الدارة وصيغة للتيار المار فيه واكتشاف زاوية فرق الطور ϕ بينهما من خلال مقارنة صيغتهما.
- 2 (إيجاد صيغة لمقاومة (معاوقة) عنصر الدارة لمرور التيار في كل حالة.

ومما يحسن ذكره أن قانون أوم ساري المفعول في دارات التيار المتناوب كما هي الحال في دارات التيار المستمر. نفس الشيء يمكن قوله عن قاعدتي كيرشوف.

الحالة الأولى:

ترمز Δv_R للجهد اللحظي عبر المقاومة و Δv للجهد اللحظي للمصدر و i_R للتيار اللحظي في المقاومة ، وهو نفسه التيار اللحظي في الدارة.

$$\Delta v = \Delta v_R = \Delta V_m \sin \omega t \quad (33.1)$$

$$i_R = \frac{\Delta v}{R} = \frac{\Delta V_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t \quad (33.2)$$

حيث

$$I_m = \frac{\Delta V_m}{R}$$

و بنفس الكيفية فإن

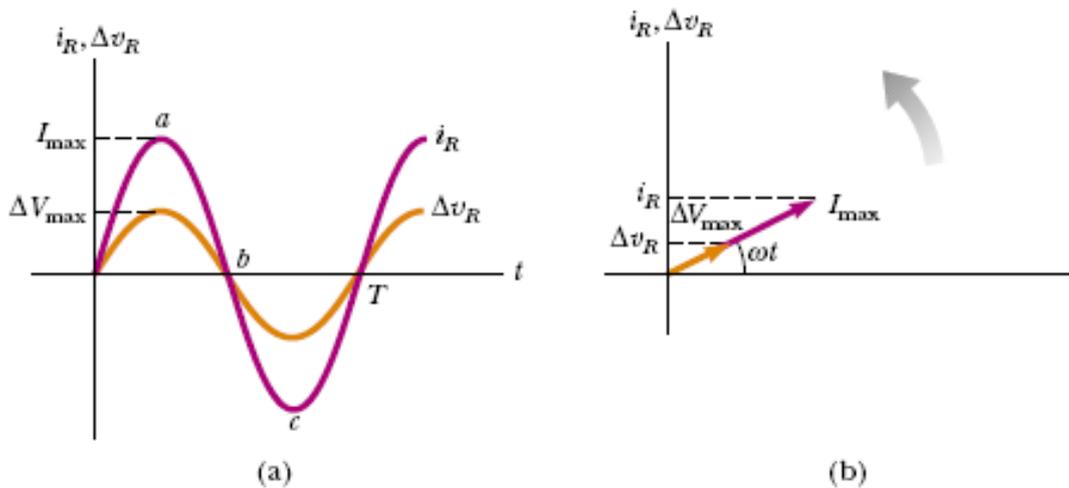
$$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{R}$$

من العلاقات أعلاه يتبين:

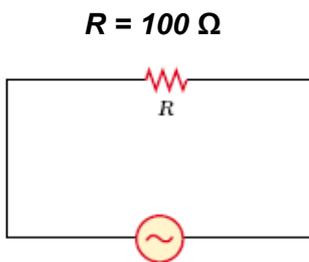
1 - أن مقاومة هذه الدارة للتيار المتناوب هي R فقط .

2 - أن كلا من الجهد اللحظي عبر المقاومة والتيار اللحظي في المقاومة دالة في $\sin \omega t$ لذلك فهما متطاوران **in phase** و زاوية فرق الطور بينهما، $\phi = 0$ ، في هذه الحالة.

يمكن التعبير عن التطاور في هذه الدارة بالشكل أسفله (الشكل الأيسر التمثيل الجيبي والأيمن التمثيل بالمتجهات الدوارة)



المثال الأول :



$$\Delta v = 200 \sin \omega t$$

أوجد قيمة الـ I_{rms} في الدارة المقابلة ؟

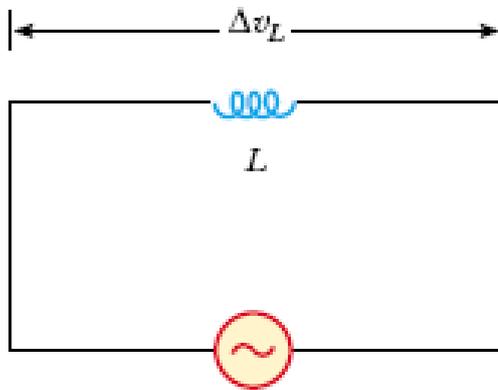
الحل:

$$\Delta V_m = 200 \text{ V}$$

$$\Delta V_{rms} = 0.707\Delta V_m = 0.707(200 \text{ V}) = 141 \text{ V}$$

$$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{R} = \frac{141 \text{ V}}{100\Omega} = 1.41 \text{ A}$$

الحالة الثانية



$$\Delta v = \Delta V_{\max} \sin \omega t$$

قيمة الجهد المستحث في الملف ذي المحاثة L هو $L \frac{di}{dt}$ لذا فمن قاعدة المسار المغلق

$$\Delta v - L \frac{di}{dt} = 0$$

أي أن

$$\begin{aligned} \Delta v_L &= L \frac{di}{dt} \\ &= \Delta V_m \sin \omega t \end{aligned} \quad (33.6)$$

ومن ثم

$$di = \frac{\Delta V_m}{L} \sin \omega t dt$$

و بالمكاملة نجد

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{\Delta V_m}{L} \int \sin \omega t \, dt \\ &= -\frac{\Delta V_m}{\omega L} \cos \omega t \end{aligned} \quad (33.7)$$

وحيث أنه من المتطابقات المثلثية

$$\cos \omega t = -\sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

لذا فإن

$$i_L = \frac{\Delta V_m}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (33.8)$$

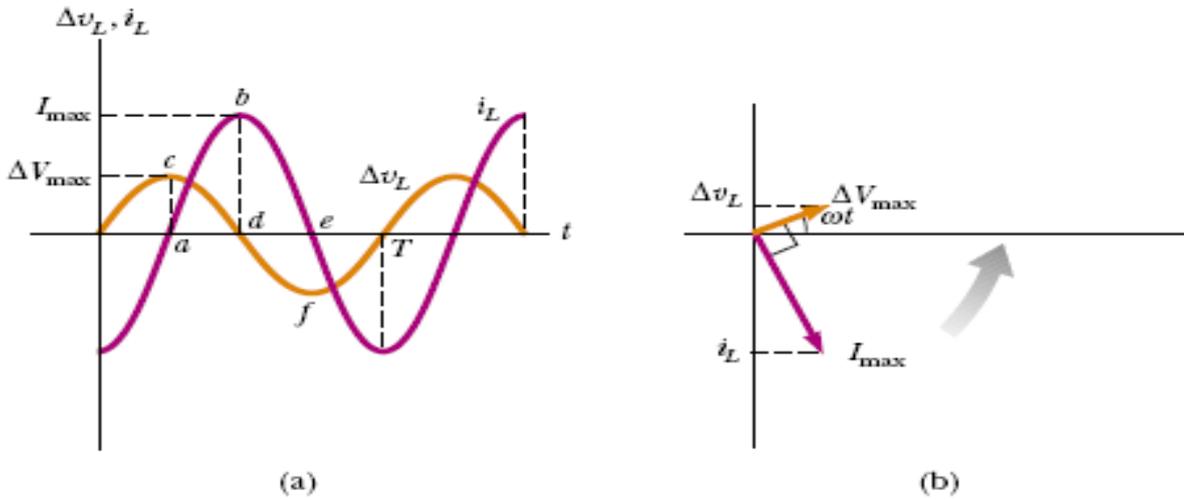
بمقارنة (6) مع (8) يتبين:

1 - أن مقاومة الملف الخالص للتيار المتناوب هي ωL . تعرف هذه بالمفاعلة الحثية Inductive reactance ويرمز لها بالرمز X_L . أي أن

$$X_L = \omega L = 2\pi fL$$

فمقاومة الملف تعتمد على كل من التردد الزاوي ω و التردد f ، فهي تتناسب طردياً مع أي منهما.

2 - أن الجهد والتيار عبر الملف غير متطاورين حيث يتخلف التيار عن الجهد بزاوية فرق طور قدرها $\pi/2$. ويبين الشكل أسفله المقصود بذلك.



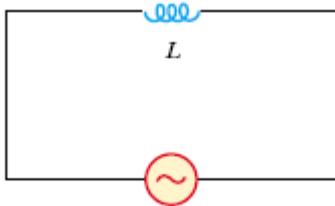
ومن العلاقات أعلاه وقانون أوم نجد أن

$$I_m = \frac{\Delta V_m}{X_L} \quad \text{و} \quad I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{X_L}$$

المثال الثاني:

أوجد قيمة التيار الفعال في الدارة المقابلة

25 mH



150 V

60 Hz

الحل

قيمة الـ $\Delta V_{\text{rms}} = 150 \text{ V}$ والـ

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi(60 \text{ Hz})(25 \times 10^{-3} \text{ H}) = 9.43 \Omega$$

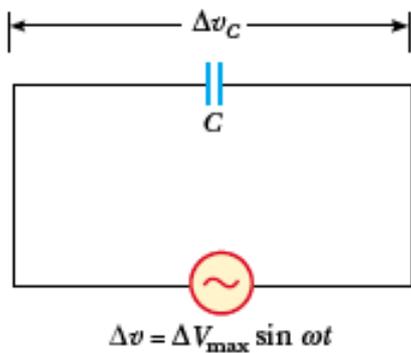
لذا

$$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{X_L} = \frac{150 \text{ V}}{9.43 \Omega} = 15.9 \text{ A}$$

س: لو زيد التردد حتى أصبح 6000 Hz كم يصبح التيار؟

ج: حيث أن التردد ازداد بمائة ضعف فإن المفاعلة الحثية تزداد بمائة ضعف و يصبح التيار يساوي 0.159 A أي ينخفض بمائة ضعف.

الحالة الثالثة



$$\Delta v - \Delta v_c = 0$$

ومنه فإن

$$\begin{aligned} \Delta v &= \Delta v_c \\ &= \Delta V_m \sin \omega t \end{aligned} \quad (33.12)$$

وبالتعويض عن Δv_c بـ $\frac{Q}{C}$ نجد

$$C\Delta V_m \sin \omega t \quad Q = \quad (33.13)$$

ومن ثم فإن

$$i_c = \frac{dQ}{dt} = \omega C \Delta V_m \cos \omega t \quad (33.14)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية

$$\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

نجد

$$i_c = \omega C \Delta V_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (33.15)$$

بمقارنة (15) مع (12) و تطبيق قانون أوم يتبين أن

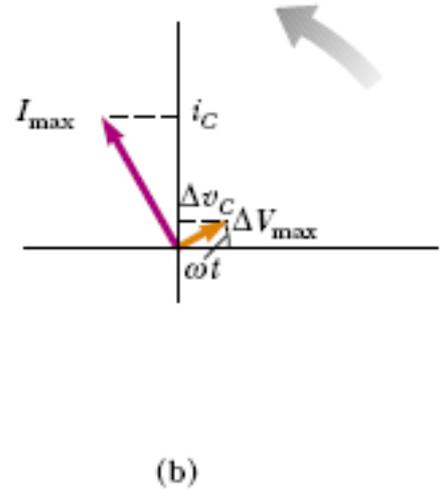
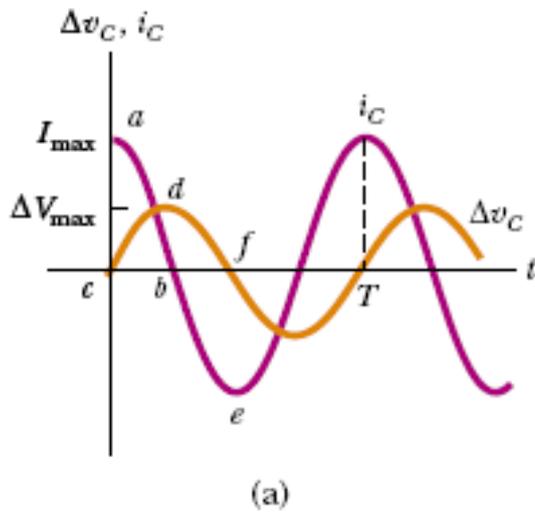
1 - مقاومة المكثف للتيار المتناوب هي $1/\omega C = 1/2\pi f C$. أي أنها تتناسب عكسياً مع كل من ω و f . تعرف هذه بالمفاعلة السعوية **Capacitive reactance** ويرمز لها بالرمز X_c

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (33.17)$$

وبذلك ففي مثل هذه الدارة فإن

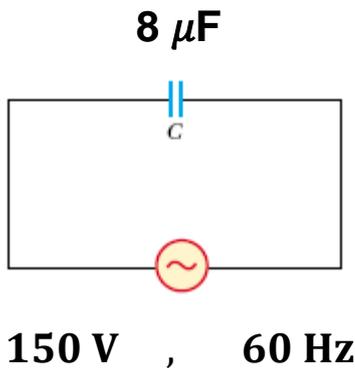
$$I_m = \frac{\Delta V_m}{X_c} \quad \text{و} \quad I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{X_c}$$

2 - أن الجهد والتيار غير متطاورين إذ يتقدم التيار الجهد بزاوية فرق طور قدرها $\pi/2$. ويبين الشكل أسفله المقصود بذلك.



المثال الثالث:

أوجد التيار الفعال في الدارة المقابلة



الحل

$$\Delta V_{rms} = 150 \text{ V}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(60 \text{ Hz})(8 \times 10^{-6} \text{ F})} = 332 \Omega$$

$$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{X_C} = \frac{150 \text{ V}}{332 \Omega} = 0.452 \text{ A}$$

س: لو تضاعف التردد فأصبح 120 Hz كم يصبح التيار؟

ج: تنخفض المفاعلة السعوية إلى النصف ومن ثم يتضاعف التيار ليصبح
0.904 A

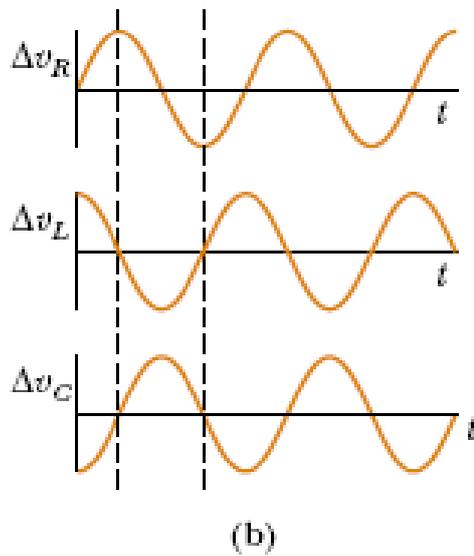
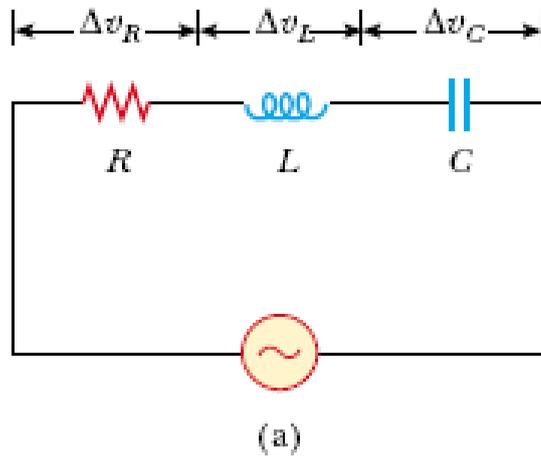
الحالة الرابعة

The R L C series

دارة R L C على التوالي
Circuit

سنعبر عن جهد المصدر بالصيغة المعتادة

$$\Delta v = \Delta V_m \sin \omega t$$



أما تيار الدارة فسنعبر عنه بالصيغة

$$i = I_m \sin(\omega t - \phi)$$

حيث ϕ هي زاوية فرق الطور.

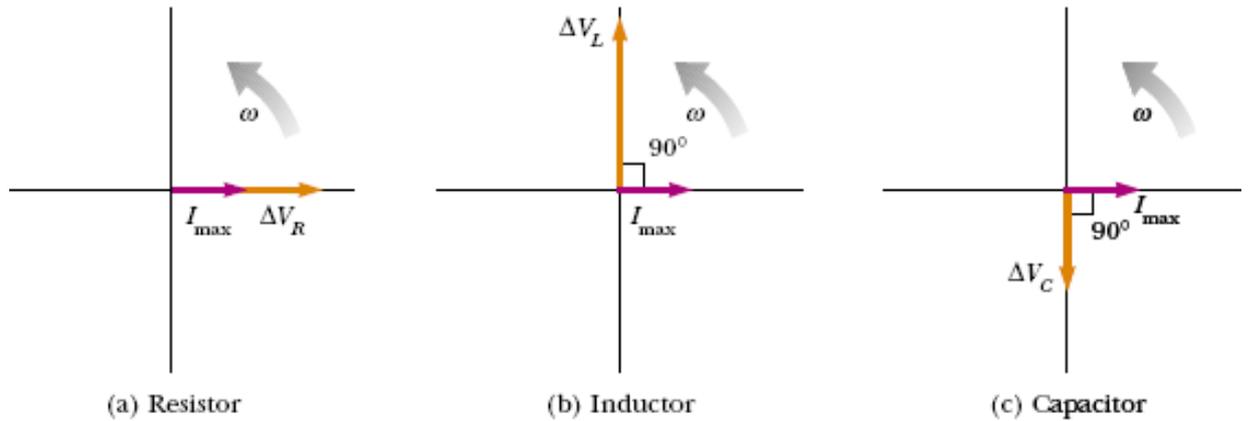
لدينا

$$\Delta v_R = I_m R \sin \omega t = \Delta V_R \sin \omega t \quad (33.19)$$

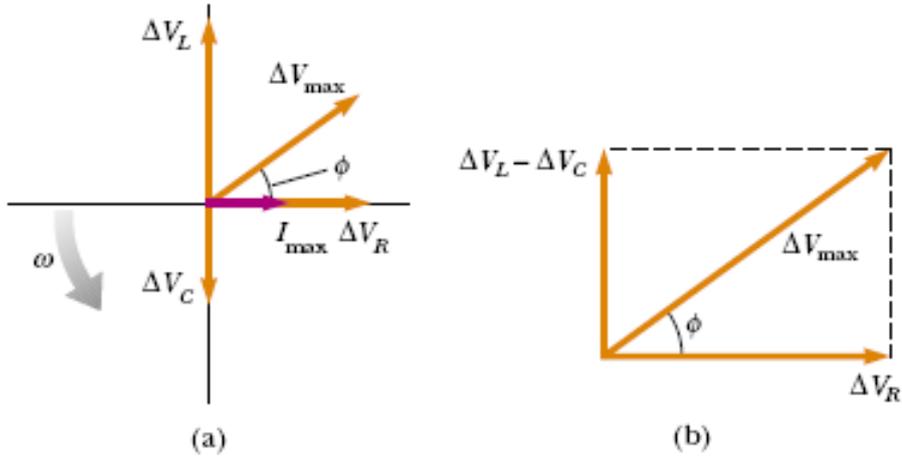
$$\begin{aligned} \Delta v_L &= I_m X_L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \Delta V_L \cos \omega t \end{aligned} \quad (33.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta v_C &= I_m X_C \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\Delta V_C \cos \omega t \end{aligned} \quad (33.21)$$

وستكون العلاقة الطورية بين الجهد والتيار عبر كل عنصر بمفرده هي المبين في الأشكال الثلاثة التالية



وبدمج هذه المخططات مع بعض نحصل على الأشكال التالية



لاحظ أن زاوية فرق الطور ϕ هي أساساً بين ΔV_m و I_m ولكن I_m منطبق على ΔV_R لأن الجهد والتيار متطوران عبر المقاومة.
الآن من الشكل الأخير نجد

$$\Delta V_m = \sqrt{\Delta V_R^2 + (\Delta V_L - \Delta V_C)^2} =$$

$$\sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_L - I_m X_C)^2}$$

$$= I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= I_m Z$$

أي أن

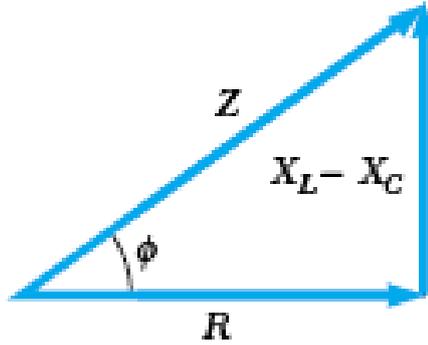
$$I_m = \frac{\Delta V_m}{Z} \quad , \quad I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{Z}$$

حيث

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (33.23)$$

تعرف Z بممانعة ، **Impedance** ، الدارة لمرور التيار المتناوب في دارة R, L, C موصلة على التوالي.

و من علاقة Z يمكن رسم ما يعرف بمثلث Z كما يمكن إيجاد زاوية فرق الطور ϕ .



حيث

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right) \quad (33.25)$$

وهذه علاقة هامة تنطبق على أي عنصر من العناصر R, L, C سواء وجد بمفرده أو مع غيره.

ومما تجدر الإشارة إليه أن زاوية فرق الطور قد تكون موجبة وقد تكون سالبة إذ أن هذا يعتمد على إشارة المقدار $(X_L - X_C)$. فإذا كانت $X_L > X_C$

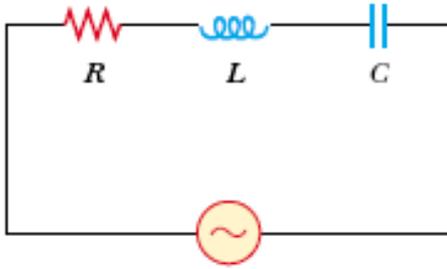
فإن ϕ تكون موجبة أي أن الجهد يتقدم التيار كما في الأشكال أعلاه (يحدث عند الترددات العالية) ، وستكون ϕ سالبة عندما تكون $X_L < X_C$ أي أن الجهد يتخلف عن التيار (يحدث عند الترددات المنخفضة).

لا حظ أنه نظرياً عندما $f \approx \infty$ فإن $\omega \approx \infty$ وتكون $X_L \approx \infty$. بينما يحدث العكس لـ X_C فعندما $f \approx 0$ فإن $\omega \approx 0$ وتصبح $X_C \approx \infty$. أي أن المكثف الخالص لا يمرر تيار البطارية . إن التيار الذي يشاهد عند ربط مكثف مع مصدر جهد مستمر (بطارية مثلاً) هو تيار شحن مؤقت يؤول للصفر عندما تكتمل عملية شحن المكثف.

المثال الرابع :

حلل الدارة المقابلة (استنتج أهم المعلومات)

$$250 \Omega \quad 0.6 \text{ H} \quad 3.5 \mu F$$



الحل

$$\Delta V_m = 150 \text{ V} \quad , \quad \omega = 377 \text{ rad/s}$$

$$X_L = \omega L = \left(377 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) (0.6 \text{ H}) = 226 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377 \text{ rad/s})(3.5 \times 10^{-6} \text{ F})} = 758 \Omega$$

$$I_{rms} = 0.707 I_m = 0.707 \times 0.255A = 0.18 A$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{226 - 758}{250} \right) = \tan^{-1} (-2.128) = -64.8^\circ$$

وهذا يعني أن التيار يتقدم الجهد في هذه الدارة بزاوية قدرها 64.8° نتيجة تغلب تأثير المكثف على تأثير الملف. يقال لمثل هذه الدارة أنها سعوية أكثر منها حثية.
more capacitive than inductive

(تأمل ترتيب حروف كلمة CIVIL) لتساعدك في تذكر أنه في المكثف يتقدم التيار الجهد بينما في الملف يتقدم الجهد التيار.
حاول رسم التطاور بين الجهد والتيار في هذه الدارة ، (افترض I_m منطبقاً على محور X)

س : الجهود العظمى عبر عناصر الدارة أعلاه هي :

$$\Delta V_R = I_m R = \dots = 63.8 V$$

$$\Delta V_L = I_m X_L = \dots = 57.6 V$$

$$\Delta V_C = I_m X_C = \dots = 193 V$$

ومجموعها الجبري هو $314 V$ بينما الجهد الأعظم للدارة هو $150 V$
فكيف تفسر ذلك؟

ج : الجهود العظمى لا تجمع جبرياً وإنما اتجاهياً. (راجع مثلث الجهود العظمى أعلاه)

س : ما ذا عن الجهود اللحظية عبر عناصر الدارة وعلاقتها بالجهود اللحظية للدارة ؟

ج : تعتمد الجهود اللحظية على الزمن ويمكن حسابها من العلاقات

$$\Delta v_R = \Delta V_R \sin 377 t$$

$$\Delta v_L = \Delta V_L \cos 377 t$$

$$\Delta v_C = - \Delta V_C \cos 377 t$$

ومجموعها اللحظي لا بد أن يساوي الجهد اللحظي للدارة عند نفس اللحظة أي

$$\Delta v = \Delta V_m \sin(\omega t - 64.8)$$

القدرة المستهلكة في دارة تيار متناوب

يمكن إثبات أن القدرة المستهلكة في دارة تيار متناوب يعطى متوسطها بالعلاقة

$$P_{av} = \frac{1}{2} I_m \Delta V_m \cos \phi \quad (33.28)$$

أو

$$P_{av} = I_{rms} \Delta V_{rms} \cos \phi \quad (33.29)$$

أو

$$P_{av} = I_{rms}^2 R \quad (33.30)$$

وبالتأمل في هذه العلاقات نجد أن العنصر المستهلك للقدرة هو R فقط. ذلك أن زاوية فرق الطور تساوي $\frac{\pi}{2}$ في كل من العنصرين L و C (تخزن الطاقة في نصف الدورة وتستعاد في النصف الثاني في أي من هذين العنصرين).

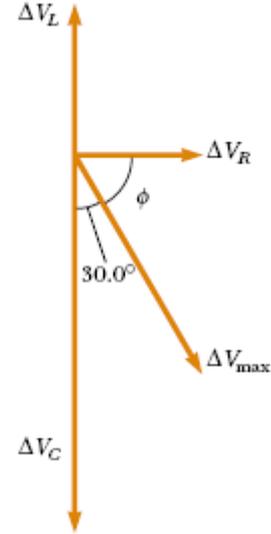
يعرف المقدار $\cos \phi$ بمعامل القدرة Power factor في دارات التيار المتناوب.

المثال الخامس :

في دائرة R L C موصلة على التوالي

متغيرة L ، $R = 800 \Omega$ ، $C = 4 \mu F$ ، $f = 60 \text{ Hz}$ ، $\Delta V_m = 120 \text{ V}$

أوجد قيمة L التي تجعل الجهد ΔV_C عبر المكثف يتخلف بزاوية قدرها 30° عن ΔV_m



الحل

المعطيات أعلاه تولد الشكل أعلاه. ذلك أن اتجاه I_m هو نفسه اتجاه V_R لذلك

فزاوية فرق الطور $\phi = 60^\circ$

أي أن التيار متقدم عن الجهد بزاوية 60°

من العلاقة

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

نجد

$$X_L = X_C + R \tan \phi$$

$$2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} + R \tan \phi$$

$$L = \frac{1}{2\pi f} \left[\frac{1}{2\pi fC} + R \tan \phi \right]$$

بالتعويض من المعطيات نجد

$$L = 5.44 \text{ H}$$

المثال السادس :

ارجع إلى المثال الرابع ثم أوجد متوسط القدرة المستهلكة في الدارة.

الحل

$$P_{av} = \frac{1}{2} I_m \Delta V_m \cos \phi = I_{rms} \Delta V_{rms} \cos \phi = I_{rms}^2 R$$

و بعد التعويض في أي من هذه الصيغ نجد

$$P_{av} = 8.13 \text{ W}$$

1.

الرنين في دارة تيار متناوب R L C موصلة على التوالي

Resonance in R L C series AC circuit

من العلاقات السابقة وجدنا أن

$$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{Z} = \frac{\Delta V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

تحدث ظاهرة الرنين في الدارة عند انعدام الحد ($X_L - X_C$) وعندئذ تصبح Z تساوي R و يبلغ التيار الفعال أكبر قيمة له. أي أن الرنين يحدث عند تحقق الشرط

$$X_L = X_C$$

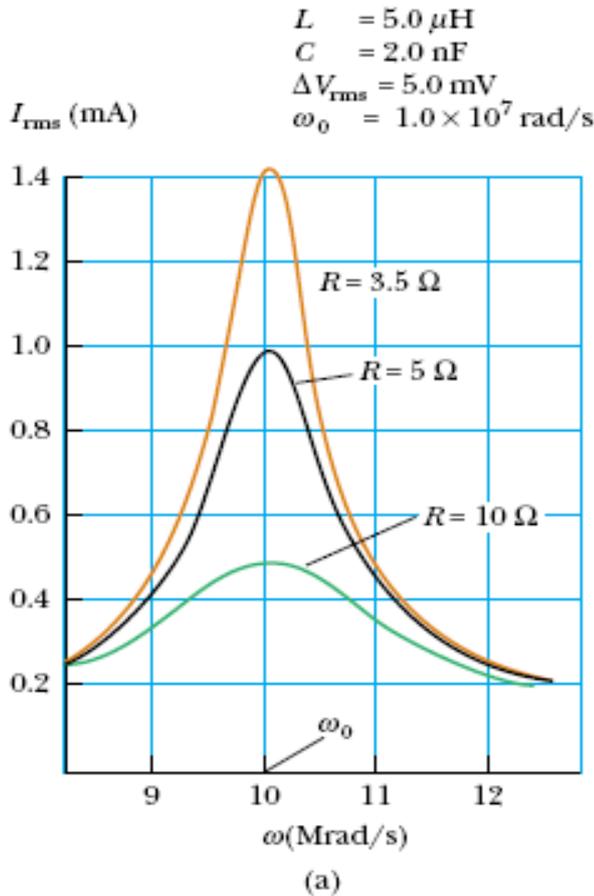
أي أن الرنين يحدث عند تردد معين ω_0 يحقق الشرط:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (33.33)$$

فتردد الرنين ω_0 دالة في قيم L و C . كما يمكن أن نحصل على الرنين عند تثبيت التردد بالتحكم في قيم L و C

ويبين الشكل أسفله تغير التيار مع التردد لثلاث قيم لـ R عند ثبات قيم L و C و ΔV_{rms} وكيف أن التيار الفعال I_{rms} يبلغ قيمته العظمى عند تردد الرنين ω_0 للدارة. كما يتبين من الشكل التأثير النسبي للمقاومة R مقارنة بالمقدار $(X_L - X_C)$ فكلما صغرت R كلما تحسن شكل المنحنى بزيادة ارتفاع القمة وتقلص الاتساع. وهذا مهم في دوائر استقبال الإشارات اللاسلكية لمنع التداخل بينها. ومن أبرز تطبيقات ظاهرة الرنين استقبال البث الإذاعي في أجهزة الراديو و أدوات الاتصال اللاسلكي .



المثال السابع :

تأمل في دائرة تيار متناوب R L C موصلة على التوالي بمصدر جهده 20 V . فيها $R = 150 \Omega$ و $L = 20 \text{ mH}$ و $\omega = 5000 \text{ s}^{-1}$. أوجد قيمة C التي تجعل تيار الدارة أكبر ما يكون؟

الحل

1 - الجهد المعطى لا بد وأنه الجهد الفعال ، كذلك التيار المشار إليه لا بد وأنه التيار الفعال.

2 - يكون التيار الفعال عند أعلى قيمة له عندما تكون الدارة في وضع الرنين.

3 - أي أن تردد الرنين في هذه الدارة هو $\omega_0 = 5000 \text{ s}^{-1}$

من العلاقة

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$$

وبعد التعويض نجد

$$C = 2.0 \mu\text{F}$$

س : ما هي القيمة العظمى للتيار الفعال في هذه الدارة؟

ج : هي قيمته عند حدوث الرنين ، حيث تكون $Z = R$ وعندئذ

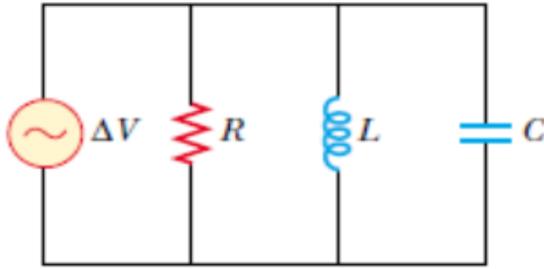
$$(I_{rms})_{max} = \frac{\Delta V_{rms}}{R} = \frac{20 \text{ V}}{150 \Omega} = 0.13 \text{ A}$$

دائرة R L C موصلة على التوازي بمصدر تيار متناوب

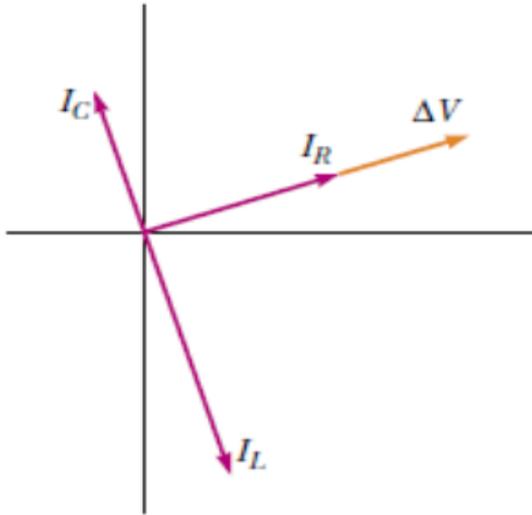
عند توصيل هذه العناصر الثلاثة على التوازي بمصدر جهده $\Delta v = \Delta V_m \sin \omega t$ كما في الشكل a أسفله فإن فرق الجهد اللحظي والجهود الفعال ΔV_{rms} يكون متساو عبر هذه العناصر الثلاثة ويساوي قيمها للمصدر ، أي أن

$$\Delta V_m = \Delta V_R = \Delta V_L = \Delta V_C$$

ويكون التيار و الجهد متطاورين عبر المقاومة R ، بينما يتقدم التيار الجهد عبر المكثف C ويتأخر عنه عبر الملف L كما في الشكل b أسفله وتكون المحصلة المتجهة للتيارات



(a)



(b)

$$I_m = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

أي أن

$$\frac{\Delta V_m}{Z} = \sqrt{\frac{\Delta V_m^2}{R^2} + \Delta V_m^2 \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2}}$$

ويلاحظ من هذه العلاقات أن الرنين يحدث عندما تصبح $X_C = X_L$ أي أن

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

وعندها تكون الممانعة Z أكبر ما تكون أي $Z = R$ ويكون تيار الدارة أصغر ما يكون على عكس ما يحدث عند التوصيل على التوالي.

أما زاوية فرق الطور فهي

$$\varphi = \tan^{-1} R \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)$$

تنويه :

ما ورد أعلاه يمثل ملخصاً مختصراً لمنهج مقرر 104 فيز كما يعطى في قسم الفيزياء والفلك – جامعة الملك سعود – وهو مقتبس بتصريف من كتاب :

Physics for Scientist and Engineers with Modern Physics

By: Raymond A. Serway,. John W. Jewett Jr

يعد هذا الكتاب من أفضل الكتب في الفيزياء العامة للمؤلفين مني ومن طلبة مقرر 104 فيز جزيل الشكر والتقدير.

مدرس مقرر 104 فيز : د. صالح عبد الرحمن السلطان

16 أكتوبر 2020 الموافق 29 صفر 1442 هـ