تمارين مقرر ٤٢٥ ريض (المعادلات التفاضلية الجزئية)

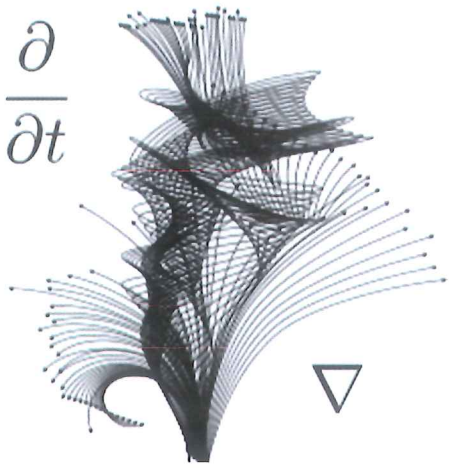
حل تمارين كتاب:

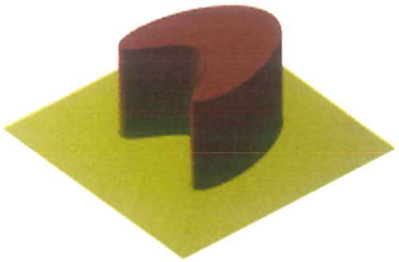
مقدمة في المعادلات التفاضلية الجزئية- تأليف: د.محمد بن عبدالرحمن القويز – ط١٤٣٣ هـ

إعداد:

أ. فواز بن سعود العتيبي

- قسم الرياضيات – جامعة الملك سعود





تمارين 1 ص 16

في المسائل من 1.1 إلى 1.6 صنف المعادلات التفاضلية من حيث الرتبة والتجانس والخواص الخطية (خطية، شبه خطية، لاخطية)

تصحيح

1.1 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

ج: الرتبة الثانية، متجانسة، خطية

1.2 $\sin(xy)\, u_x - \sqrt{u_y} = 0$

ج: الرتبة الأولى، متجانسة، لاخطية

1.3 $x^2 u_x - y u^2 u_y = x + y$

ج: الرتبة الأولى، غير متجانسة، شبه خطية

1.4 $x^2 z_{xx} + y z_{yy} - z z_x + (1 - z^3) z_y = y$

ج: الرتبة الثانية، غير متجانسة، شبه خطية

1.5 $u_{xy} + x^2 u_{yy} + (\cos y)\, u_x - e^{u_y} = 0$

ج: الرتبة الثانية، متجانسة، شبه خطية

1.6 $u_x + u_{xx}^2 + y^2 u_{yy} + 3u = \tan^{-1}(x^2 + y^2)$

ج: الرتبة الثانية، غير متجانسة، لا خطية.

في التمارين التالية احذف الدوال الاختيارية من كل معادلة لتكوين معادلة تفاضلية بأدنى رتبة.

1.7 $f(x^2 + y^2 + z^2,\, z) = 0$

ج: $x z_y - y z_x = 0$

1.10 $z e^{u^2} + f(x^2 + y^2) = 0$

ج: $y z_x - x z_y = 2xy z$

1.12 $u = f(x)\, g(y)$

ج: $z_x z_y - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot z = 0$

1.13 $u = f(x+ct) + g(x-ct)$

ج: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

في التمارين التالية احذف الثوابت الاختيارية a و b في كل معادلة للحصول على معادلة تفاضلية بأدنى رتبة.

1.18 $z = b x^a y^{-a}$ ، x و $y > 0$

ج: $x z_x + y z_y = z$

1.19 $a(x^2 + y^2) + b z^2 = 1$

ج: $(z_x)^2 - (z_y)^2 + z(z_{xx} - z_{yy}) = 0$ حيث $b \neq 0$

1.20 $u = b e^{-a^2 t} \sin(ax)$

ج: $u_t = u_{xx}$

1.21 استنتج المعادلة التفاضلية لمجموعة السطوح الدورانية حول محور z، أي المتماثلة بالنسبة لهذا المحور.

ج: $y z_x - x z_y = 0$

1.22 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $z_x + z = x$ حيث $z = z(x,y)$

ج: $z = e^{-x} f(y) + (x-1)$

1.23 لتكن $u = f(x,y,z)$ و $v = g(x,y,z)$ دالتين قابلتين للاشتقاق. أوجد المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الدنيا التي تمثل السطوح التكاملية $F(u,v) = 0$ حيث $(F_u, F_v) \neq (0,0)$

ج: $z_x \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,y)} + z_y \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)}$

1.24 أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة المستويات المماسة لسطح القطع الناقص $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ والتي لا تكون عمودية على المستوى xy

ج: $z_x x + z_y y - z = -\left[4(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}$

تمارين 2 ص 47

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية في التمارين التالية :

2.1 $(y-x)u_x + (y+x)u_y = \frac{x^2+y^2}{u}$

ج : $F(x^2+2xy-y^2, x^2-y^2+u^2)=0$ أو $F(2xy-u^2, x^2-y^2+u^2)=0$ حيث F اختيارية

2.2 $(u^2-2yu-y^2)u_x + (xy+xu)u_y = xy-xu$

ج : $F(-y^2+u^2+yu, x^2+y^2+u^2)=0$ حيث F اختيارية

2.3 $xu_x - 7yu_y = x^2y$

$A=? \leftarrow z_p = Ax^2y$

ج : $u = f(x^7y) - \frac{x^2y}{5}$

2.4 $2xu_x + 3yu_y = \log x$

ج : $u = f(x^3y^2) + \frac{1}{4}\log^2 x$

2.5 $x^2u_x + y^2u_y = 4xy$

ج : $u = \frac{4xy\log(\frac{x}{y})}{x-y} + f(\frac{x-y}{xy})$

2.6 $(u+e^x)u_x + (u+e^y)u_y = u^2 - e^{x+y}$

ج : $x+ue^{-y} = F(y+ue^{-x})$ حيث F اختيارية.

2.7 $xu_x + yu_y = 2xy\sqrt{4-u^2}$

ج : $\sin^{-1}(\frac{u}{2}) = 2xy + f(\frac{y}{x})$

2.10 $x(y-u)u_x + y(u-x)u_y = (x-y)u$

ج: $xyu = f(x+y+u)$

في المسائل التالية أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الذي يمر بالمنحنى Γ:

2.18 $(y+xu)u_x + (x+yu)u_y = u^2 - 1$
$\Gamma: x=t,\ y=1,\ z=t^2$

ج: $1+\left(\frac{u-1+x+y}{x+y}\right)^2 = \frac{u^2-1}{x^2-y^2}$

2.20 $(y^2-x^2+2xu)u_x + 2y(u-x)u_y = 0$
$\Gamma: x=0,\ y=t,\ u=\frac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$

ج: $4 = 4u^2 + \frac{(2xu-x^2-y^2)^2}{y^2}$

2.22 $u(x+u)u_x - y(y+u)u_y = 0$
$\Gamma: x=1,\ y=t,\ u=\sqrt{t}$

ج: $u^2 = xy$

2.27 نناقش وجود حل المعادلة $xu_x + yu_y = 0$ بجوار النقطة $(1,1,1)$ الواقعة على المنحنى
$\Gamma: x=1,\ y=t^2,\ u=t^3$

ج: $u = 1 - \frac{3(x-1)}{2} + \frac{3(y-1)}{2} + \frac{15(x-1)^2/4 - 9(x-1)(y-1)/2 + 3(y-1)^2/4}{2} + \dots$

2.28 نناقش وجود حل المعادلة $yu_x - xu_y = 0$ بجوار النقطة $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1)$ الواقعة على المنحنى
$\Gamma: x=\cos t,\ y=\sin t,\ u=1$

ج: يوجد عدد غير منته من الحلول ويكفي اختيار f بحيث $f(1)=1$

تمارين 3 ص 80

أوجد الحل العام في التمارين التالية :

3.5 $u_{yy} + u = e^{x+y}$

ج : $u = f(x)\cos y + g(x)\sin y + \frac{1}{2}e^{x+y}$

3.6 $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$

ج : $u = \frac{f(x) + g(y)}{x-y}$

3.8 $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$

ج : $u = \frac{1}{r}[f(x-ct) + g(x+ct)]$

3.10 استخدم التمرينين 3.9 لحل المعادلة التالية :

$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2x u_x + 2y u_y = 0$

ج : $u = f(xy) + x^3 g\left(\frac{y}{x}\right)$

أوجد حل مسألة كوشي في التمارين التالية :

3.12 $u_{xx} - u_{yy} = 0,$

$u(x,0) = \sin x, \quad u_y(x,0) = 1$

ج :

3.13 $u_{xx} - u_{yy} = 0,$

$u(x,x) = 0, \quad u_x(x,x) = 1$

ج : $u = f(x-y) - f(0)$ حيث f دالة اختيارية قابلة للاشتقاق مرتين وكذلك $f'(0) = 1$.

3.14 $u_{xx} - u_{yy} = 0$,

$u(x,x) = 0$, $u_x(x,x) = x$

ج: $u = f(x-y) - f(0)$ حيث f دالة اختيارية قابلة للاشتقاق مرتين وكذلك $f'(0) = x$.

3.15 $u_{xy} + u_x = x$,

$u(x,x) = x^2$, $u_x(x,x) = 0$

ج: حل وحيد $u = \frac{x^2+y^2}{2} + y - 1 + e^{x-y}(1-x)$

3.17 على افتراض أن

$\Gamma_0 = \{(x,y) : x = s, y = 0, a < s < b\}$?$-a<s<a$

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$

في نطاق يحتوي Γ_0 ويحقق الشروط التالية

$u(s,0) = \gamma(s)$, $u_x(s,0) = \varphi_1(s)$, $u_y(s,0) = \varphi_2(s)$

حيث γ, φ_1, φ_2 دوال في s.

ج: حل وحيد:

$$u = \frac{3}{4}\left[\gamma\left(\frac{3x-y}{3}\right) - \sigma\left(\frac{3x-y}{3}\right)\right] + \frac{1}{4}\gamma(x+y) + \frac{3}{4}\sigma(x+y)$$

حيث $\sigma(s) = \int \varphi_2(s)\,ds$.

3.18 استخدم تمرين 3.17 لحل المعادلة

$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$ تحت الشروط الابتدائية

$u(s,0) = 3s^2$, $u_x(s,0) = 6s$, $u_y(s,0) = 0$

ج: $u = 3x^2 + y^2$ وهو مجسم قطع مكافئ.

3.19 ليكن Γ منحنياً في مستوى xy معرفاً بالمعادلات الوسيطية

$x = s, y = 3s, \; s \in (-a, a)$

بين أن المعادلة $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$ تقبل عدداً غير منته من الحلول تحقق الشروط

$u(s, 3s) = \gamma(s), \; u_n(s, 3s) = \varphi(s)$ و

حيث $\gamma, \varphi \in C^1$.

ج: $u = F(3x - y) + \gamma\left(\frac{x+y}{4}\right) - F(0)$ حيث $F \in C^1$

مع $F'(0) = 0$ ؛ وبالتالي فالمسألة حلول لانهائية.

تمارين 4 ص 133

4.2 ابحث في الشروط اللازمة لتحقق المساواة $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ في L^2.

ج: f و g يجب أن تكونا مرتبطتين خطياً. نفرض أن $g = \alpha f$ و نثبت أن $\alpha \geq 0$.

4.3 عين الدوال التي تنتمي إلى $L^2(0,\infty)$ و أحسب قياس كل منها

(i) e^{-x} (ii) $\sin x$ (iii) $(1+x)^{-1}$ (iv) $x^{-\frac{1}{3}}$

ج: (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) ليست في L^2

(iii) 1

(iv) ليست في L^2

4.4 إذا كان $\mu(x) = e^{-x}$ نعتبر أن كل كثيرة حدود تنتمي إلى $L^2_\mu(0,\infty)$.

ج: استخدم الحقيقة التي تقول أنه لكل كثيرة حدود P فإن $P(x)e^{-x} \to 0$ عندما $x \to \infty$.

4.5 أوجد النهاية النقطية لكل من متتاليات الدوال التالية:

(i) $\frac{x^n}{1+x^n}$ ، $x \in \mathbb{R}$

ج: النهاية عبارة عن دالة غير متصلة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \begin{cases} 1 & , |x|>1 \\ 0 & , |x|<1 \\ \frac{1}{2} & , x=1 \\ \text{غير معرفة} & , x=-1 \end{cases}$$

4.7 عين مجال التقارب للمتسلسلة $\sum f_n$ حيث

(i) $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ ، (ii) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$

ج: (i) $\mathbb{R}$
(ii) $x \neq -1$

4.9 أحسب نهاية كل من المتتاليات التالية في L^2 حيثما وجدت

(i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ ، $0 \le x \le 1$

(ii) $f_n(x) = \begin{cases} nx & ; \ 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 1 & ; \ \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$

(iii) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ، $0 \le x \le 1$

ج: (i) 1
(ii) 1
(iii) 0

4.10 اختبر المتسلسلات التالية من حيث التقارب في L^2.

(i) $\sum n^{-\frac{2}{3}} \sin nx$ ، $-\pi \le x \le \pi$

(ii) $\sum n^{-1} e^{inx}$ ، $-\pi \le x \le \pi$

(iii) $\sum (n+1)^{-\frac{1}{2}} \cos nx$ ، $-\pi \le x \le \pi$

ج: (i) متقاربة
(ii) متقاربة
(iii) متباعدة

4.16 استخدم سلاسل القوى لحل المعادلة $y'' + 2xy' + 4y = 0$ حول النقطة $x = 0$. ما نصف قطر التقارب للحل؟

ج: $c_{n+2} = \frac{-2}{n+1} c_n$

$y = c_0\left(1 - 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + \cdots\right) + c_1\left(x - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \cdots\right)$ ، $|x| < 1$

4.18 ضع كلاً من المؤثرات التالية في الصيغة

$p\frac{d^2}{dx^2} + p'\frac{d}{dx} + r$

حيث $p > 0$ ، بالضرب في دالة تكامل مناسبة.

(i) $x^2 \frac{d}{dx^2}$, $x > 0$

(iii) $\frac{d^2}{dx^2} - x^2 \frac{d}{dx}$, $x > 0$

ج: (i) $\mu = 1/x^2$

(iii) $\mu = e^{-x^3/3}$

4.19 ضع المعادلة $y'' + 2y' + \lambda y = 0$ في الصيغة القياسية $Ly + \lambda \mu y = 0$ حيث المؤثر L قرين لذاته شكلاً، ثم أوجد القيم والدوال الذاتية على الفترة $[0,1]$ تحت الشروط الحدية $y(0) = y(1) = 0$

ج: $\mu = e^{2x}$, $\lambda_n = n^2\pi^2 + 1$, $y_n(x) = e^{-x} \sin \lambda_n x$

4.23 أوجد مفكوك فوريه للدالة $f(x) = \pi - |x|$ على الفترة $[-\pi, \pi]$ ، وأثبت أن المتسلسلة متقاربة بانتظام.

ج: $$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

ومتقاربة بانتظام باستخدام اختبار فايرشتراس.

4.25 عين الدوال المتصلة مقطعياً والملساء مقطعياً من بين الدوال التالية:

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$, $f(x+1) = f(x)$ $\forall x \ge 0$

(iv) $f(x) = |x|^{3/2}$, $-1 \le x \le 1$, $f(x+2) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(v) $f(x) = [x] = n$ $\forall x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$

ج: (i) و (iii) متصلة مقطعياً.

(ii)، (iv)، (v) ملساء مقطعياً.

4.28 تحقق من أن الدالة f ملساء مقطعياً واستنتج متسلسلة فورييه التي تمثلها على $\mathbb{R}$ في كل من الحالات التالية:

(i) $f(x)=x,\ -\pi<x\le\pi,\ f(x+2\pi)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

ج: (i) $S(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

4.29 عين المتسلسلات المتقاربة بانتظام في كل من الحالات التالية:

(i) $f(x)=x,\ -\pi<x\le\pi,\ f(x+2\pi)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

(ii) $f(x)=|x|,\ -1<x\le+1,\ f(x+2)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

(iii) $f(x)=\sin^2(x),\ x\in\mathbb{R}$

(iv) $f(x)=e^x,\ -2<x\le 2,\ f(x+4)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

ج: التقارب منتظم حيث تكون f متصلة، لذلك التقارب منتظم في (ii) و (iii).

4.32 أثبت أن لكل $n\in\mathbb{N}_0$

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$$

$$P_{2n+1}(0)=0$$

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1)}{(2n)(2n-2)\cdots(4)(2)}$$

ج: الصيغتان الأوليتان تأتيان من الحقيقة بأن P_n دالة زوجية عندما n زوجي، وفردية عندما n فردي.

$$P_{2n}(0)=a_0=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}\cdot n!\,n!}=(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)\cdots(3)(1)}{(2n)\cdots(4)(2)}$$

4.34 أثبت أن

$$\int_{-1}^{x}P_n(t)\,dt=\frac{1}{2n+1}\left[P_{2n+1}(x)-P_{2n-1}(x)\right]$$

$$\int_{-1}^{1}P_n(t)\,dt=0\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

ج: التكامل الأول يأتي من العلاقة:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

ومن المساواة:

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$$

والتكامل الثاني ينتج من التكامل الأول بوضع $x=1$.

4.35 أوجد مفكوك لوجاندر لكل من الدالتين:

(i) $f(x) = 1-x^3$, $-1 \le x \le 1$

(ii) $f(x) = |x|$, $-1 \le x \le 1$

ج:

(i) $1-x^3 = P_0(x) - \frac{3}{5}P_1(x) - \frac{2}{5}P_3(x)$

(ii) $|x| = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{3}{16}P_4(x) + \cdots$

4.36 أوجد مفكوك لوجاندر للدالة

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{و } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{و } 0 < x < 1 \end{cases}$$

استخدم نتيجة تمرين 4.34 لتقويم المحاصلات. قارن بين قيمة المتسلسلة ومتوسط $f(x^-)$ و $f(x^+)$ عند $x=0$.

ج: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ حيث $c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$

حيث إن f فردية فإن $c_n = 0$ لجميع قيم n الزوجية.

من أجل $n = 2k+1$:

$$c_{2k+1} = (4k+3)\int_0^1 P_{2k+1}(x)\,dx$$

$$= (4k+3)\frac{1}{4k+3}\left[P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)\right]$$

$$= (-1)^k\left[\frac{(2k)!}{2^{2k}k!k!} + \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}(k+1)!(k+1)!}\right]$$

$$= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}k!k!}\cdot\frac{(4k+3)}{(2k+2)}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

وهكذا: $f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{11}{16}P_5(x) + \dots$

عند $x=0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(0) = 0 = \frac{1}{2}[f(0^+) + f(0^-)]$$

4.37 أثبت أن كثيرة حدود هرميت H_n زوجية إذا كانت n زوجية، و فردية إن كانت فردية، ثم استنتج أن

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0$$

ج: بالتعويض عن $x=0$ في العلاقة: $e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n$، ينتج لدينا:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} H_k(0) t^k = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n}$$

بمساواة المعاملات المتقابلة نحصل على الصيغتين المطلوبتين.

4.38 أوجد مفكوك هرميت للدالة x^m، $m \in \mathbb{N}$.

ج: إذا كان $m = 2n$ فإن:

$$x^{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{H_{2k}(x)}{(2k)!(n-k)!}$$

و إذا كان $m = 2n+1$ فإن:

$$x^{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!(n-k)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$n \in \mathbb{N}$.

4.42 أثبت أن

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \binom{n}{k} x^k$$

حيث $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ معامل ذي الحدين.

ج: استخدم قاعدة ليبنتز لمشتقة الضرب.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

حيث $f(x) = x^n$ و $g(x) = e^{-x}$.

4.43 أوجد مفكوك لاقير لكل من الدالتين:

(i) $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$

ج: (i) حيث: $x^m = \sum_{n=0}^{m} c_n L_n(x)$

$$c_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_n(x)\,dx = (-1)^n \frac{m!\,m!}{n!\,(m-n)!}$$

4.44 أوجد الحل العام لمعادلة لاقير عندما $n = 0$

ج: $u(x) = c_1 + c_2 \int \frac{e^x}{x}\,dx = c_1 + c_2\left(\log x + x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$

4.45 أثبت أن متسلسلة القوى $x^{\nu} J_{\nu}(x)$ متقاربة في $\mathbb{R}$ لكل $\nu \geq 0$.

ج: طبق اختبار النسبة.

4.47 لكل من الدوال التالية أوجد مفكوك بيسل $\sum_{1}^{m} c_k J_0(\alpha_k x)$ على $[0, b]$، حيث α_k الجذور الموجبة للمعادلة $J_0(\alpha b) = 0$.

(i) $f(x) = 1$

(iii) $f(x) = x^2$

(v) $$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < b/2, \\ 1/2, & x = b/2, \\ 0, & b/2 < x < b \end{cases}$$

ج: (i) $$\langle 1, J_0(\alpha_k x)\rangle_x = \int_0^b J_0(\alpha_k x)\, x\,dx = \frac{b}{\alpha_k} J_1(\alpha_k b)$$

و

$$\|J_0(\alpha_k x)\|_x^2 = \frac{b^2}{2} J_1^2(\alpha_k b)$$

لذا فإن:

$$1 = \frac{2}{b}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k J_1(\alpha_k b)} J_0(\alpha_k x)$$

$$\langle x^2, J_0(\alpha_k x)\rangle_x = \left(\frac{b^3}{\alpha_k} - \frac{4b}{\alpha_k^3}\right) J_1(\alpha_k b) \qquad (iii)$$

وهكذا فإن:

$$x^2 = \frac{2}{b}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2 b^2 - 4}{\alpha_k^3 J_1(\alpha_k b)}$$

$$\langle f, J_0(\alpha_k x)\rangle_x = \int_0^{b/2} J_0(\alpha_k x)\, x\, dx \qquad (v)$$

$$= \frac{b}{2\alpha_k} J_1(\alpha_k b/2)$$

وهكذا فإن:

$$f(x) = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_k b/2)}{\alpha_k J_1^2(\alpha_k b)} J_0(\alpha_k x)$$

4.48 أوجد متكون $f(x) = x$ على الفترة $[0,1]$ بدلالة $J_1(\alpha_k x)$ حيث α_k الجذور الموجبة للدالة J_1.

ج: من العلاقتين التاليتين:

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

و $\int_0^x t^2 J_1(t)\, dt = 2x J_1(x) - x^2 J_0(x)$ يكون لدينا:

$$\langle x, J_1(\alpha_k x)\rangle_x = \int_0^1 J_1(\alpha_k x)\, x^2\, dx = -J_0(\alpha_k)/\alpha_k$$

$$= J_2(\alpha_k)/\alpha_k$$

ومن العلاقة: $\|J_1(\alpha_k x)\|_x^2 = \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_k b)$

يكون لدينا: $\|J_1(\alpha_k x)\|_x^2 = \frac{1}{2} J_2^2(x)$. لذلك فإن:

$$x = 2\sum \frac{1}{\alpha_k J_2(\alpha_k)} J_1(\alpha_k x) \quad ; \quad 0 < x < 1$$

تمارين 5 ص 173

5.1 عين الشروط اللازمة على الثوابت a, b, c, ... والدالة f لكي تكون u دالة توافقية في $\mathbb{R}^3$.

(iii) $u = x^2 + ay^2 + bz^2 + cxy + dxz + eyz$

ج: (iii) $1 + a + b = 0$

5.12 أوجد الحل لكل من مسائل ديريشليه التالية:

(i) $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 2\pi,$
$u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \quad 0 < y < 2\pi,$
$u(x,0) = 0, \quad u(x,2\pi) = 1, \quad 0 < x < \pi$

(ii) $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$
$u(0,y) = u(a,y) = 0, \quad 0 < y < b,$
$u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = f(x), \quad 0 < x < a$

ج: (ii) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) X_n(x)$ حيث:

$$A_n = \frac{1}{\sinh(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) X_n(x)\, dx$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

(i) بتطبيق مباشر للحل في (ii)

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \sinh[(2n+1)y]\, X_{2n+1}(x) \quad \text{حيث:}$$

$$A_{2n+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2n+1)\sinh[(2n+1)\pi]}$$

$$X_{2n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin[(2n+1)x]$$

تمارين 6 ص 190

6.8 استخدم فصل المتغيرات لحل المسألة الحدية:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x, \quad 0 < x < \pi$$

ج:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin(2nt)\sin(nx)$$

6.11 استخدم فصل المتغيرات لحل المسألة الحدية:

$$u_{tt} = u_{xx} - 10, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 5x^2, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi$$

ج:

$$u(x,t) = 5x^2 - 5\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^{n+1}}{n} \cos(nt)\sin(nx)$$

6.12 أعط تفسيراً فيزيائياً للمسألة الحدية:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l$$

حيث تمثل g عجلة الجاذبية ثم أوجد الحل $u(x,t)$ الذي يحققها

ج:

$$u(x,t) = \frac{g}{2c^2}x^2 - \frac{gl}{2c^2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gl^2}{c^2(2n-1)^3\pi^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi c}{l}t\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right)$$

تمارين 7 ص 220

7.1 أوجد حل المسألة التالية:

$$u_t = k u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

ج:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^1 f(\tau) \sin(n\pi\tau) d\tau \, e^{-n^2\pi^2 k t} \sin(n\pi x)$$

7.3 أوجد حل المسألة التالية:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 1, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = x, \quad 0 < x < \pi$$

ج:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi^2} \left[(-1)^n (\pi^2 - 1) + 1 \right] e^{-n^2 t} \sin(nx) + \frac{x}{\pi}$$

تمارين 8 ص 253

تمارين 9 ص 283

3 و 9 أفرض أن لدينا كتلة كروية تحتل الحيز $B(0,a)$ في $\mathbb{R}^3$، كثافتها ثابتة وتساوي ρ ستولد من هذه الكتلة، بموجب نظرية الجهد، دالة الجهد u التي تحقق معادلة بواسون $\Delta u = f$، حيث f دالة سنسميها حول نقطة الأصل 0 في $\mathbb{R}^3$، وتمثل توزيع الكتلة حسب القاعدة

$$f(r) = \begin{cases} -4\pi\rho, & 0 \le r \le a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

يترتب على ذلك أن $u = u(r)$ أيضاً سنسميها دالة كروية حول المركز $r = 0$، وتحقق المعادلة

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = f(r)$$

أفرض أن الكتلة تحتل الحيز $b > a > r > 0$، حيث a و b ثابتان أيضاً، فرض أن كثافة الكتلة تعتمد على r حسب القاعدة $\rho = 1/r$.

أستنتج صيغة دالة الجهد $u(r)$ على:

$0 \le r \le a$ ، $a \le r \le b$ ، $r \ge b$.

ج/

$$u = \begin{cases} 4\pi(b-a), & 0 \le r \le a \\ 4\pi b - \dfrac{2\pi(a^2+r^2)}{r}, & a \le r \le b \\ \dfrac{M}{r}, & r \ge b \end{cases}$$

حيث الكتلة الكلية $M = 2\pi(b^2 - a^2)$

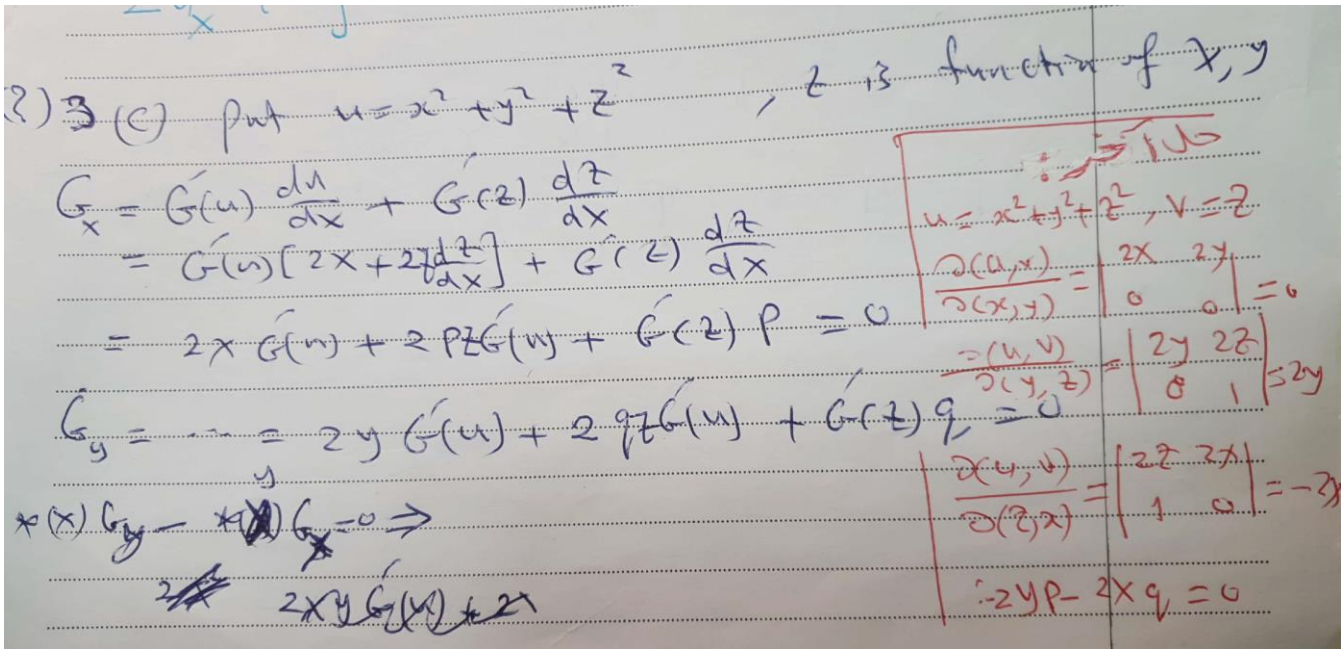
حلول تمارين مقرر 425 ريض- كتاب أ.د. محمد القويز

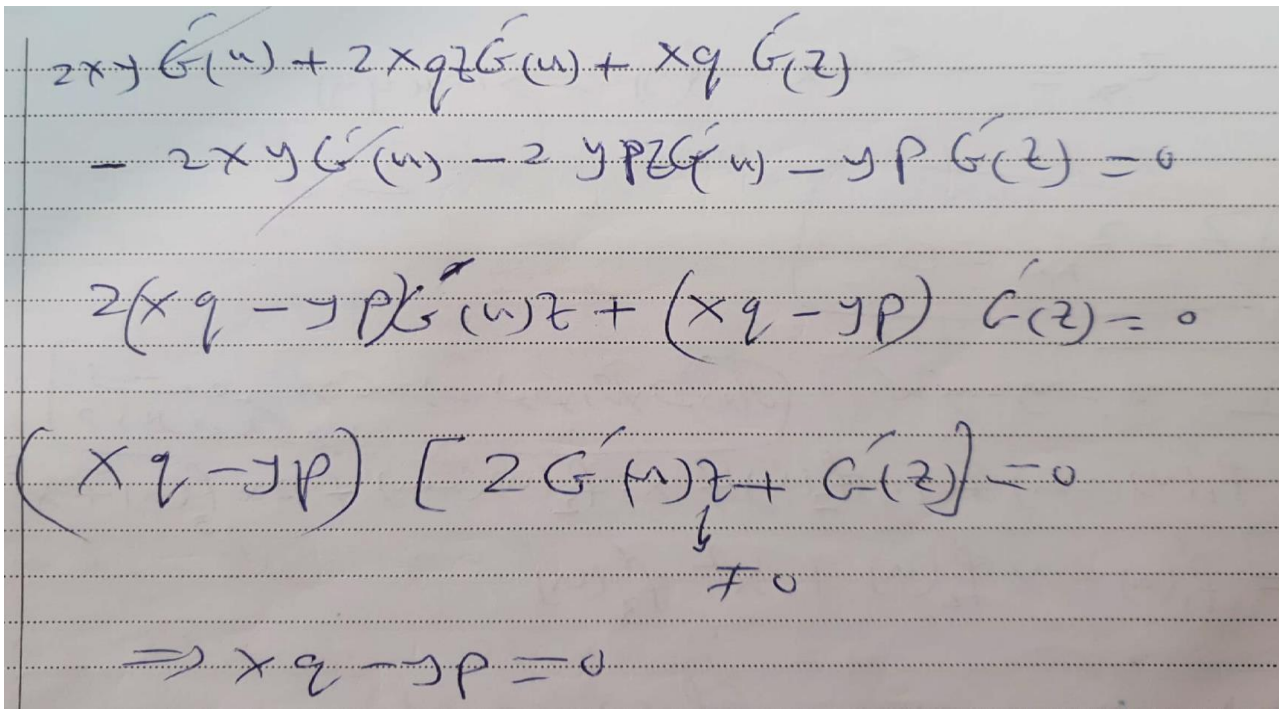
الفصل الأول : مفاهيم أساسية

رموز مونج Mong:

$p = z_x\,,\qquad q = z_y\,,\qquad z_{xx} = r,\qquad z_{xy} = s\,,\qquad z_{yy} = t$

1.7:





1.12:

مثال (6) أوجد المعادلة (P.D.E) والتي تعين جميع الدوال $z = f(x)\,g(y)$

حيث f و g دوال قابلة للاشتقاق عند x و y على الترتيب.

الحل: لدينا $p = z_x = f'(x)\,g(y)$

و $q = z_y = f(x)\,g'(y)$ ومنه $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x)\,g'(y)$

لدينا $p \cdot q = f(x) \cdot g \; f'(x) \cdot g'(y)$

$= s \cdot z$

1.18:

(c) $z_x = ab\,x^{a-1}y^{1-a}$

$z_y = b(1-a)\,x^{a}y^{-a}$

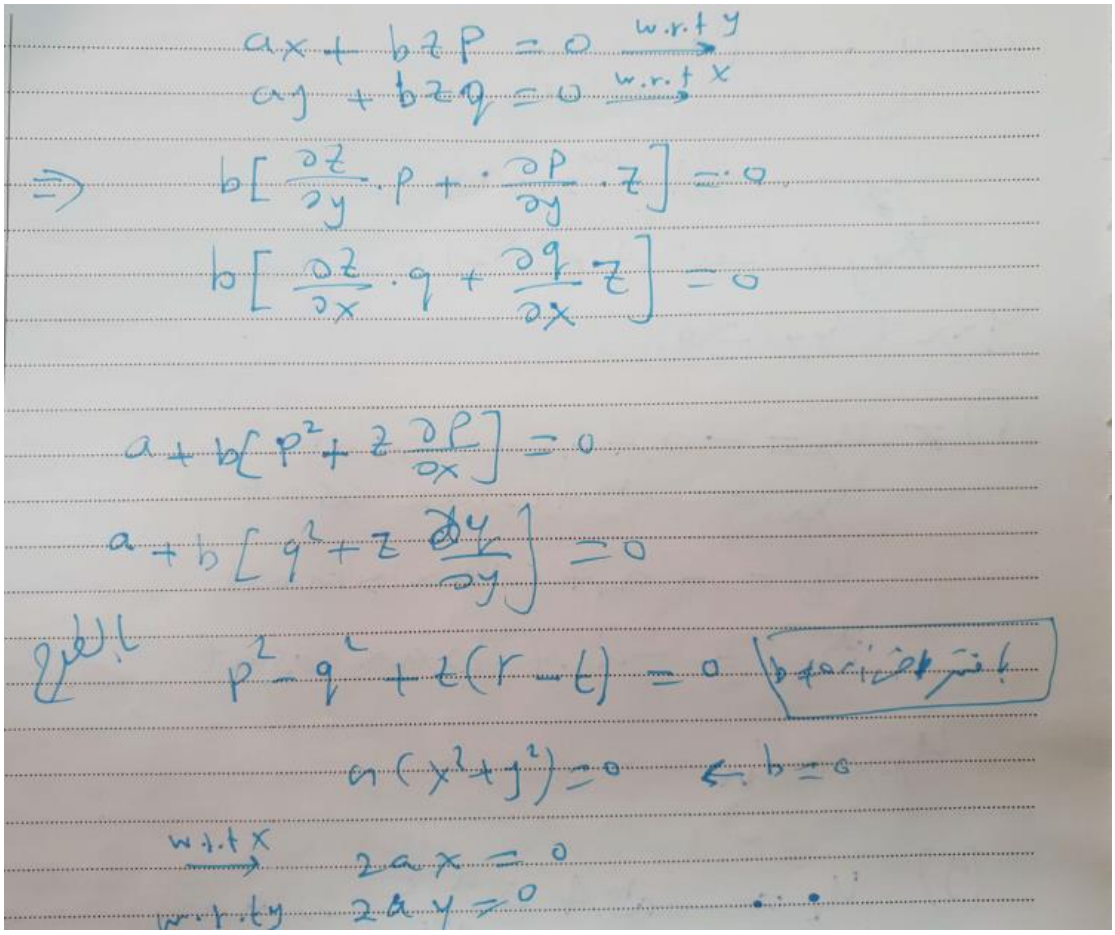
$xp + yq = ab\,x^{a}y^{1-a} + b\,x^{a}y^{1-a} - ba\,x^{a}y^{1-a}$

$= z$

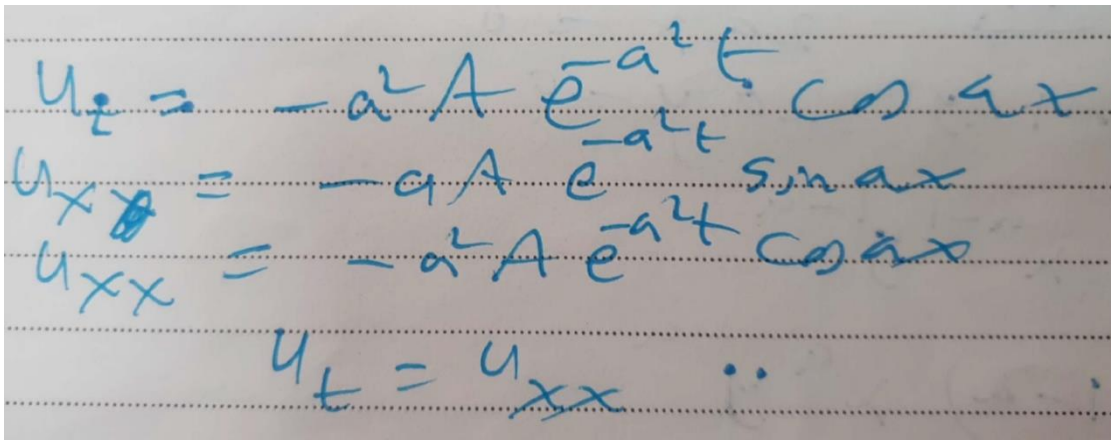
1.19:

w.r.t x : $2ax + 2bpz = 0$

w.r.t y : $2ay + 2bqz = 0$


ax + bzp = 0 w.r.t y
ay + bzq = 0 w.r.t x
⇒ b[∂z/∂y · p + ∂p/∂y · z] = 0
b[∂z/∂x · q + ∂q/∂x · z] = 0
a + b[p² + z ∂p/∂x] = 0
a + b[q² + z ∂q/∂y] = 0
p² − q² + z(r − t) = 0
a(x² + y²) = 0 ⇐ b = 0
w.r.t x 2ax = 0
w.r.t y 2ay = 0

1.20:


$u_t = -a^2 A e^{-a^2 t} \cos ax$
$u_x = -aA e^{-a^2 t} \sin ax$
$u_{xx} = -a^2 A e^{-a^2 t} \cos ax$
$u_t = u_{xx}$

1.21:

بالعكس: اثبت العلاقة التفاضلية الجزئية حول $z = f(x^2+y^2)$

حيث ان f دالة لمتغير واحد قابلة للاشتقاق.

$$z_x = f'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$z_y = f'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}$$

حيث $t = x^2+y^2$ اذن:

$$z_x = f'(t)\cdot 2x, \qquad z_y = f'(t)\cdot 2y$$

$$\Rightarrow \quad y z_x - x z_y = 0 \quad \text{او} \quad yP - xQ = 0$$

وهي المعادلة R.P.E. المطلوبة.

1.22:

مثال ①

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z = x$$

هنا لدينا $A=1$ ، $B=0$ ، $C=1$ ، $C=x$

نأخذ المعادلة المميزة: $p+z=0$ ، حيث $p=\frac{\partial z}{\partial x}$

$$e^x \frac{\partial z}{\partial x} + z e^x = 0 \Leftarrow \frac{\partial}{\partial x}(e^x z) = 0$$

إذن $e^x z = f(y)$ ، حيث f دالة اعتباطية ما

بما أن $f \in C^1(\mathbb{R})$ فإن $z_h = e^{-x} f(y)$.

أو نقول أيضاً بما أن $F(u,v) = F(e^x z, y) = 0$ تابعة باشتقاقها بالنسبة إلى u فإن $F_u \neq 0$ في منطقة ما من (u,v) ، مما يضمن أن الشرط $F_u \neq 0$ صحيح ، مما يستلزم أن المعادلة $F(u,v)=0$ تكافئ بشكل ضمني دالة u بدلالة v أو بتعبير آخر يستلزم تابعة u بدلالة v من المعادلة $F(u,v)=0$ ، أي $u = g(v) \Leftarrow e^x z = g(y)$

أو $z = e^{-x} g(y)$

وبطريقة الاستقصاء ، نرى أن $z_p = x-1$ تحقق جزئياً المعادلة التفاضلية $p+z=x$. وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة بالشكل الآتي:

$$z = z_h + z_p = e^{-x} f(y) + (x-1)$$

علماً أن هذا الحل العام يمثل مجموعة السطوح المكافئية في الفراغ xyz

فمثلاً نجد:

$$z = e^{-x} \sin y + (x-1)$$

$$z = e^{-x} \cdot e^{y} + (x-1)$$

$$z = e^{-x} \cosh y + x - 1 \quad \ldots$$

كل تلك الحلول للمعادلة التفاضلية الجزئية.

1.23:

بالمثل، سه أمثل كما اعتبرنا F ، نفرض هذا به F تعرف شكل ضمني $z=\varphi(x,y)$ قابلة للتفاضل عند (x_0,y_0) ، ولنحاول هذه المسألة لاعتبارات F . وذلك باشتقاق $F(u,v)=0$ بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y . لذلك لدينا :

$$F_u\left(u_x+u_z\cdot z_x\right)+F_v\left(v_x+v_z\cdot z_x\right)=0$$

$$F_u\left(u_y+u_z\cdot z_y\right)+F_v\left(v_y+v_z\cdot z_y\right)=0$$

نفرض هذا به $F_u\neq 0$ على منطقة صغيرة بقرب (x_0,y_0,z_0) بحيث يكون لدينا ، وبحيث شرط صحيح :

$$\frac{u_x+u_z z_x}{v_x+v_z z_x}=\frac{u_y+u_z z_y}{v_y+v_z z_y}=-\frac{F_u}{F_v}$$

$$\Rightarrow p\left(v_y u_z-v_z u_y\right)+q\left(v_z u_x-v_x u_z\right)=v_x u_y-v_y u_x$$

$$\boxed{p\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,y)}+q\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)}}$$

وهي المعادلة المطلوبة . هذه المعادلة هي تقريباً خطية ، معادلة من الرتبة الأولى

1.24:

بالعكس: نفرض $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من المجسم بحيث $z_0 \neq 0$. عندئذ
يأخذ معادلة المستوي المماس لهذا السطح عند M_0 الشكل:

$$2x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0) + 8z_0(z - z_0) = 0$$

أو $x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 4z_0(z - z_0) = 0$

أي $x_0 x + 4y y_0 + 4z z_0 = 4$ (4)

وهذا يستلزم أن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ على المجسم حيث $z_0 \neq 0$، بأن المعادلات الأخيرة تمثل مجموعة من المستويات المماسة لهذا المجسم.

نبرهن بشكل مماثل أن نقطة تماس الغشاء بالمستوي P_0 مرتبطة بالسطح $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$.

عندئذ باشتقاق المعادلة (4) بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y نحصل على z دالة بـ (x, y) حيث:

$$\begin{cases} x_0 + 4z_0 z_x = 0 \\ 4y_0 + 4z_0 z_y = 0 \end{cases}$$

أي $x_0 + 4z_0 p = 0$ و $y_0 + z_0 q = 0$

ومنه $x_0 = -4z_0 p$, $y_0 = -z_0 q$ $\Rightarrow$

$$x(-4z_0 p) + 4y(-z_0 q) + 4z z_0 = 4$$

حيث نجد: $z_0 \neq 0$; $xp + yq - z = \frac{-1}{z_0}$

وهي معادلة المجسم المطلوب:

$$\left(\frac{x}{z_0}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{z_0}\right)^2 + 4 = \frac{4}{(z_0)^2}$$

حيث $x/z_0 = -4p$ و $y/z_0 = -q$ $\Leftarrow$

إذاً $16p^2 + 4q^2 + 4 = \frac{4}{(z_0)^2}$.

$$4p^2 + q^2 + 1 = \frac{1}{z_0^2}$$

وبالتالي $\sqrt{4p^2+q^2+1} = \frac{1}{|\gamma|}$

وإذا فرضنا أن $\gamma_0 > 0$ فإذاً يكون:

$$\boxed{px + qy - z = -(4p^2 + q^2 + 1)^{1/2}}$$

وهي المعادلة (P.D.E.) لمجموعة المستويات المماسة لجسم السطح الناقص عندما نعتبر $P(x_0, y_0, z_0)$ هي النقطة الواقعة على الجسم السطح.

حلول تمارين مقرر 425 ريض- كتاب أ.د. محمد القويز

الفصل الثاني : معادلة الرتبة الأولى

رموز مونج Mong:

$$p = z_x\,, \qquad q = z_y\,, \qquad z_{xx} = r, \qquad z_{xy} = s\,, \qquad z_{yy} = t$$

2.1:

الحل: لدينا المعادلات المميزة لطرف المعادلة هي:

$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{y+x} = \frac{dz}{x^2+y^2}$$

نجمع

$$\frac{dx+dy}{2y} = \frac{dy}{y+x} \Rightarrow (y+x)\,d(y+x) = 2y\,dy$$

وبالتالي $(y+x)^2 = 2y^2 + c_1$ أو $x^2 + 2xy - y^2 = c_1$.

$$u(x,y,z) = x^2 + 2xy - y^2 = c_1$$

وكذلك نجد

$$\frac{x\,dx - y\,dy}{xy - x^2 - yx - y^2} = \frac{z\,dz}{x^2+y^2}$$

وبالتالي

$$x\,dx - y\,dy = -z\,dz \Rightarrow x^2 - y^2 = -z^2 + c_2$$

أي أن

$$v(x,y,z) = x^2 + z^2 - y^2 = c_2$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية معطى بالعلاقة الآتية:

$$F(u,v) = F(x^2 + 2xy - y^2,\ x^2 - y^2 + z^2) = 0$$

نلاحظ أن u دالة في x و y و z وأن v دالة في x و y و z ليست دالة خطية.

وفي سبيل إيجاد (أو توليد) أخرى من الدوال المستقلة نجمع المقامات:

$$\frac{2y\,dx + 2x\,dy - 2z\,dz}{2y^2 - 2yx + 2xy + 2x^2 - 2x^2 - 2y^2} \Rightarrow 2y\,dx + 2x\,dy - 2z\,dz = 0$$

$$w(x,y,z) = 2xy - z^2 = c_3$$

وبالتالي

$$2v(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 = c_4$$

وأيضاً الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$F(w,v) = F(2xy - z^2,\ x^2 - y^2 + z^2) = 0$$

وهو حل آخر لكون w و v دوال مستقلة، حيث F دالة اختيارية.

2. 2:

الحل: لدينا المعادلات الآتية:

$$\frac{dx}{z^2-2yz-y^2} = \frac{dy}{xy+xz} = \frac{dz}{xy-xz}$$

أي أن:

$$\frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{y-z}$$

ومنه

$$y\,dy - z\,dy = y\,dz + z\,dz$$

$$y\,dy + z\,dy + y\,dz + z\,dz = 0$$

أي أن

$$u(x,y,z) = -y^2 + z^2 + yz = c_1$$

ولدينا

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x z^2 - 2yxz - y^2 x + y^2 x + xyz + xyz - xz^2} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0} \Rightarrow x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

أي أن

$$v(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

وبالتالي الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالشكل:

$$F(u,v) = F(-y^2 + z^2 + yz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

حيث F دالة اعتباطية.

2.3:

2.18:

بالعمل لنبين المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{y+xz} = \frac{dy}{x+yz} = \frac{dz}{z^2-1}$$

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = \frac{dx+dy}{x+y} = \frac{dz}{z-1} \Rightarrow \text{منه}$$

$$c_1 = u = \frac{z-1}{x+y}$$

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z+1} \Rightarrow \frac{z+1}{x-y} = c_2$$

اذا التكاملات الأولية هي عبارة عن تقاطع السطوح:

$$z-1 = c_1(x+y) \quad , \quad z+1 = c_2(x-y)$$

وهذه السطوح عبارة عن مستويات في الفراغ xyz. إذاً التكاملات الأولية عبارة عن مستقيمات، وهذا إن دل فإنما يدل على أن F ليس تكاملاً أولياً. لدينا إذاً:

$$u(t, 1, t^2) = c_1 \Rightarrow \frac{t^2-1}{t+1} = c_1 \Rightarrow t = 1 + c_1$$

$$v(t, 1, t^2) = c_2 \Rightarrow \frac{t^2+1}{t-1} = c_2 \Rightarrow (1+c_1)^2 + 1 = c_1 c_2$$

$$\text{أي } F(c_1, c_2) = 1 + (1+c_1)^2 - c_1 c_2 = 0$$

إذاً هو التكامل التفاضلي الذي يحقق السطوح المذكورة:

$$1 + \frac{(z-1+x+y)^2}{x+y} = \frac{z^2-1}{x^2-y^2}$$

أي أن هذه المعادلة تمثل المعادلة التفاضلية والتي v يحقق على هذه السطوح

2.20:

مثال (2) أوجد السطح الاسطواني الذي يكون راسمه موازية لمستقيم ما وموجهته المنحنى

$$(y^2 - x^2 + 2xz)\,z_x + 2y(z - x)\,z_y = 0$$

والذي يمر بالمنحنى Γ : $z = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - t^2}$, $y = t$, $x = 0$

حيث a عدد ثابت.

الحل: لنجد المعادلات المميزة:

$$\frac{dx}{y^2 - x^2 + 2xz} = \frac{dy}{2yz - 2xy} = \frac{dz}{0}$$

إذاً $z = c_1$

$$\frac{dx}{y^2 - x^2 + 2xc_1} = \frac{dy}{2yc_1 - 2xy} \Rightarrow$$

$$(2yc_1 - 2xy)\,dx = (y^2 - x^2 + 2xc_1)\,dy$$

$$2c_1(y\,dx - x\,dy) = (2yx\,dx - x^2\,dy) + y^2\,dy$$

$$2c_1 y^2\, d\left(\frac{x}{y}\right) = y^2\, d\left(\frac{x^2}{y}\right) + y^2\,dy \quad ; \quad y \neq 0$$

بشرط $y \neq 0$ صعوبة المعادلات المميزة. إذاً

$$2c_1 \frac{x}{y} = \frac{x^2}{y} + y + c_2$$

$$\Rightarrow \frac{2zx - x^2 - y^2}{y} = c_2$$

لنوجد الآن العلاقة بين c_2, c_1

لنأخذ $z = c_1 \Leftarrow z^2 = c_1^2$

$$\boxed{4z^2 = 4a^2 - t^2 = 4c_1^2}$$

$$\frac{0 - 0 - t^2}{t} = c_2 \Rightarrow c_2 = -t$$

إذاً لنأخذ العلاقة المميزة:

$$4a^2 - c_2^2 = c_1^2 \Rightarrow 4c_1^2 + c_2^2 = 4a^2$$

إذاً $F(c_1, c_2) = 4c_1^2 + c_2^2 - 4a^2 = 0$

ومنه

$$\boxed{4a^2 = 4z^2 + \frac{(2zx - x^2 - y^2)^2}{y^2}}$$

هذه المعادلة تعرف سطحاً تاماً حيث الجذر المشترك هو

ويقع على المنحنى Γ.

2.22:

الحل: لحساب المعادلات المميزة

$$\frac{dx}{3(x+3)} = \frac{dy}{-y(y+3)} = \frac{dz}{0}$$

فإن $z = c_1$

$$\frac{dx}{c_1(x+c_1)} = \frac{dy}{-y(y+c_1)}$$

$$\frac{1}{c_1}\cdot\frac{dx}{x+c_1} + \frac{1}{c_1}\frac{dy}{y} - \frac{1}{c_1}\frac{dy}{y+c_1} = 0$$

$$\frac{(x+c_1)y}{y+c_1} = c_2 \Rightarrow \frac{(x+3)y}{y+3} = c_2$$

وهكذا نكون قد أوجدنا التكامل الأساسي المطلوب على الشكل:

$$f(z) = \frac{y(x+3)}{y+3}$$ حيث f دالة اختيارية.

ومنحنى التقاطع المطلوب هو المنحنى $C: x=1, y=t, z=\sqrt{t}$

فإن لحساب الشرط الآتي:

$$f(\sqrt{t}) = \frac{t(1+\sqrt{t})}{t+\sqrt{t}} = \frac{t(1+\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} = \sqrt{t} \Rightarrow f(s) = s \;;\; s \neq 0$$

فإن نكون قد حققنا شرط التقاطع المطلوب

$$\frac{y(x+3)}{y+3} = 3 \;;\; 3 \neq 0$$

أو $xy + 3z = z^2 + 3y \Leftarrow$ $z^2 = xy$:

2.27:

لدينا لدينا $P = x$ ، $Q = y$ ، $R = 0$ وهي دوال تحليلية في $\mathbb{R}^3$

و $g(t) = t^2$ ، $f(t) = 1$ ، $h(t) = t^3$ دوال تحليلية في $\mathbb{R}$.

المعطاة $(1, 1, 1)$ موافقة لنقطة في المتغير P حيث $t_0 = 1$

$$P(x, y, z) = x \Rightarrow P(x_0, y_0, z_0) = x_0 = 1$$

$$Q(x, y, z) = y \Rightarrow Q(x_0, y_0, z_0) = y_0 = 1$$

$$f(t) = 1 \Rightarrow f'(t_0) = 0$$

$$g(t) = t^2 \Rightarrow g'(t_0) = 2t_0 = 2$$

إذا $\Delta|_{t=t_0=1} = P g' - Q f'|_{t_0=t} = 1(2) - 0(1) = 2 \neq 0$

أي النقطة $(1, 1, 1)$ تحقق شرط الوجود.

أما الحلول فهي على الشكل التالي:

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$ يعني $z = c_1$ ، $\frac{y}{x} = c_2$

إذا الحل العام للمعادلة التفاضلية هو $z = f(y/x)$ ، حيث f دالة اختيارية. وحيث أن $z = f(y/x)$ من المتغير t: $x = 1$, $y = t^2$, $z = t^3$ إذا

$$t^3 = f(t^2)$$

لنفرض $t^2 = s \Rightarrow f(s) = s^{3/2}$ إذا

وبالتالي تكون طريقة حل المسألة بالمعادلة الآتية: $z = (y/x)^{3/2} = \phi(x, y)$

ونحن نريد إيجاد حل المعادلة بجوار $(1, 1, 1)$. حيث أن

$$p_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 = -\frac{3}{2}, \quad q_0 = \frac{3}{2}$$

$$\phi_{yy}(1,1) = \frac{3}{4}, \quad \phi_{xy}(1,1) = -\frac{9}{4}, \quad \phi_{xx}(1,1) = \frac{15}{4}$$

إذا لدينا متسلسلة تايلور:

$$z = \phi(x, y) = 1 - \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(y-1) + \frac{1}{8}\left[15(x-1)^2 - 18(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2\right] + \cdots$$

2.28:

نعلم أن النقطة تقع على المنحنى C عند $t_0 = \frac{\pi}{4}$

بما أن $z = f(x^2+y^2)$ فإن المعادلة التفاضلية هي

$$dz = 0 \quad , \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

أما $P(x_0, y_0, z_0) = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $Q(x_0, y_0, z_0) = -x_0 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$$f(t) = \cos t \Rightarrow f'(t) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$g(t) = \sin t \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta_M = Pg' - Qf'_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

وهذا يعني أن المعادلة لا تملك حلاً وحيداً يمر من النقطة M ، وذلك بسبب أن المنحنى C يحقق الشرط الكافي

$$f(1) = 1$$

وهذا يعني أنه يوجد عدد غير منتهي من الحلول لهذه المعادلة، وذلك لتحقق

الشرط الكافي، أي يمكننا اختيار f بحيث $f(1) = 1$ ، بالإضافة إلى أي

دالة أخرى

P هو منحنى مميز، يمر من خلال النقطة M ، المنحنى C يحقق الشرط

الكافي لأنه:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow \frac{-\sin t\, dt}{\sin t} = \frac{\cos t\, dt}{-\cos t}$$

$$dz = 0 \Rightarrow d(1) = 0$$

وبالتالي يوجد عدد غير منتهي من الحلول لهذه المعادلة، والتي تمر من النقطة M

الواقعة على المنحنى المميز P.

حلول تمارين مقرر 425 ريض- كتاب أ.د. محمد القويز

الفصل الثالث : المعادلات الخطية ذات الرتبة الثانية

رموز مونج Mong:

$p = z_x\,,\quad q = z_y\,,\quad z_{xx} = r,\quad z_{xy} = s\,,\quad z_{yy} = t$

$u_{yy} + u = e^{x+y}$

$u_{yy} + u = 0$

$D_y^2 + 1 = 0$

$m^2 + 1 = 0$

$m = \pm i$

$u_h = f(x)\cos(y) + g(x)\sin(y)$

معادلة عادية

$y'' + 1 = 0$

$m^2 + 1 = 0$

$m = \pm i$

$y_c = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$

y_p: $u_p = k e^{x+y}$, $k = ?$

$(u_p)_y = k e^{x+y}$, $(u_p)_{yy} = k e^{x+y}$

in pde $\Rightarrow$ $k e^{x+y} + k e^{x+y} = e^{x+y}$

$2k e^{x+y} = e^{x+y}$

$2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$u_p = \frac{1}{2} e^{x+y}$

$u = u_h + u_p = f(x)\cos y + g(x)\sin y + \frac{1}{2} e^{x+y}$

3.6 $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$

$v = (x-y)u$ ضع

$v_x = 1.u + (x-y)u_x$

$v_y = -u + (x-y)u_y$

$v_{xy} = u_y - u_x + (x-y)u_{xy}$

in P.D.E:

$$\frac{v_{xy} - u_y + u_x}{x-y} \cdot (x-y) - \frac{v_x - u}{x-y} + \frac{v_y + u}{x-y} = 0$$

$$v_{xy} - u_y + u_x + \frac{-v_x + v_y + 2u}{x-y} = 0$$

$$v_{xy} - \frac{v_y + u}{x-y} + \frac{v_x - u}{x-y} + \frac{-v_x + v_y + 2u}{x-y} = 0$$

$$(x-y)v_{xy} = 0 \Rightarrow v_{xy} = 0 \xrightarrow{\int dx}$$

$$v_x = f(x) \xrightarrow{\int dx} v = \int f(x)\,dx + g(y)$$

$$v = f(x) + g(y)$$

$$(x-y)u = f(x) + g(y)$$

$$u = \frac{f(x) + g(y)}{x-y}$$

You are viewing Fawaz Alotaibi's screen View Options

3.8

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$V = ru$ نعبر عن u بدلالة V:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = r u_t \,, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = r u_{tt}$$

$$w = r^2 \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 2r\frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

in PDE

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\cdot\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\left[2r\frac{\partial u}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right]$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad \cdots (*)$$

(*) نعوض في

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 1\cdot u + r u_r$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = u_r + u_r + r u_{rr}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{2}{r}\left[\frac{V_r - \frac{V}{r}}{r}\right] + \frac{V_{rr} - 2\left(\frac{V_r - u}{r}\right)}{r}$$

$$V_{tt} = c^2 V_{rr} \Rightarrow (V_t - cV_r)(V_t + cV_r) = 0$$

$$V = f(r+ct) + g(r-ct)$$

$$u = \frac{1}{r}\left[f(r+ct) + g(r-ct)\right]$$

3.10:

مثال (3): برهن أن المعادلة التالية خطية

$$ax^2 z_{xx} + 2bxy\, z_{xy} + cy^2 z_{yy} + dx z_x + ey z_y + fz = G(x,y) \quad (35)$$

حيث a, b, c, d, e, f ثوابت تسمى معاملات المعادلة

ثم أوجد حلها العام إذا كانت $G(x,y) = 0$ وذلك بفرض $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$

وهي متغيرات مستقلة جديدة

باستخدام التحويلات الآتية نجد:

$$(-z_\xi + z_{\xi\xi}) - (-z_\eta + z_{\eta\eta}) - 2z_\xi + 2z_\eta = 0$$

$$z_{\xi\xi} - z_{\eta\eta} - 3z_\xi + 3z_\eta = 0$$

$$[(D_\xi - D_\eta)(D_\xi + D_\eta) - 3(D_\xi - D_\eta)]z = 0$$

$$(D_\xi - D_\eta)[D_\xi + D_\eta - 3]z = 0 \quad (37)$$

أما الحل العام لـ $(D_\xi - D_\eta)z = 0$ فهو $z = f(\xi + \eta)$

أما الحل العام للمعادلة $(D_\xi + D_\eta - 3)z = 0$ فهو:

$$\frac{d\xi}{1} = \frac{d\eta}{1} = \frac{dz}{3z} \Rightarrow \xi - \eta = c_1$$

$$\ln z - 3\xi = \ln c_2$$

$$ze^{-3\xi} = g(\xi - \eta) \quad \text{إذا} \quad \ln\frac{z}{c_2} = 3\xi \Rightarrow ze^{-3\xi} = c_2$$

$$z = e^{3\xi} g(\xi - \eta) \quad \text{أو}$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة (37) هو:

$$z = f(\xi + \eta) + e^{3\xi} g(\xi - \eta)$$

حيث f , g دوال اختيارية.

أما الحل العام للمعادلة (35) فهو:

كلية / إدارة ..... الموضوع $z = f(\ln x + \ln y) \cdot e^{3\ln x} \cdot g(\ln(x) - \ln y)$ .....

$z = f\ln(xy) + x^3 g\ln(\frac{x}{y})$; $x>0, y>0$: أو

$D \subset \{(x,y) ; x>0, y>0\}$ المجال الذي موجود في المنطقة

يمكن كتابة الحل العام بشكل آخر:

$$z = (f\circ \ln)(xy) + x^3 (g\circ \ln)(\frac{x}{y}) = \phi(xy) + x^3 \psi(\frac{x}{y})$$

حيث $\phi = f\circ\ln$ ، $\psi = g\circ\ln$ دوال اختيارية.

3. 17:

بالحل: هنا المعادلة (8) يقع $p(x) = k'(x)$ (عدد ثابت المعادلة k فترة) فنوجد حل المعادلة (8) شرط الشرط strip condition

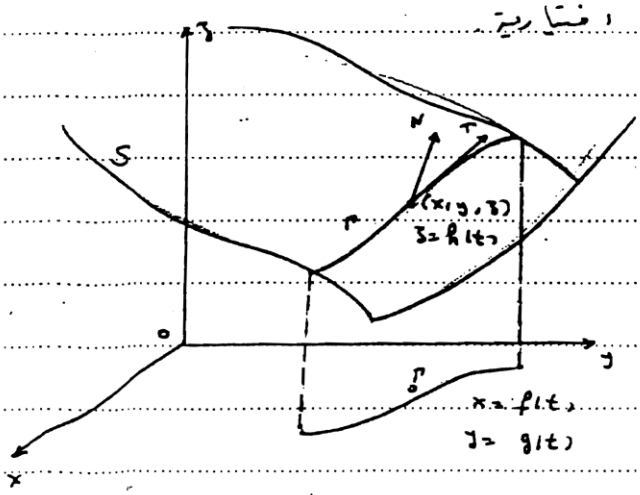
المنطقة D هي اجتماع المستقيمات الواصلة بين النقطة P_0 والنقاط المستقيم $x=1$ فيكون تحديدها كالتالي: بينما P_0 هي النقطة الواقعة على المستقيم $x=1$ والواصلة بين النقطة P_0 والنقاط المستقيم $x=2$! أما المعادلة التفاضلية فتكتب بالشكل الآتي

$$(D_x + 3D_y)(D_x - D_y)z = 0$$

ومنه الحل العام للمعادلة هو:

$$z = f(3x-y) + g(x+y)$$

حيث f و g دوال اختيارية.



وحسب الشرط المفروض في الجواب، لدينا المعادلات التالية:

$$h(\tau) = f(3\tau) + g(\tau)$$

$$\varphi(\tau, 0) = \sigma(\tau) \Rightarrow \varphi_y'(\tau, 0) = \sigma'(\tau) \Rightarrow \varphi_x'(\tau, 0) = f(3\tau) + g'(\tau) = h'(\tau)$$

نفرض أن $\varphi(\tau, 0) = \int \sigma(\tau) d\tau \Rightarrow$

$$\varphi(\tau, 0) = \frac{1}{3} f(3\tau) + g(\tau) = \int \sigma(\tau) + c$$

وبالتالي نكون لدينا: $g(\tau) = \int \sigma(\tau) - c$ ، حيث c ثابت اختياري.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\tau) = \frac{3}{4}\left[h\left(\frac{\tau}{3}\right) - \int \sigma\left(\frac{\tau}{3}\right)\right] - \frac{3}{4}c \\ g(\tau) = \frac{1}{4} h(\tau) + \frac{3}{4} \int \sigma(\tau) + \frac{3}{4}c \end{cases}$$

هذا لدينا

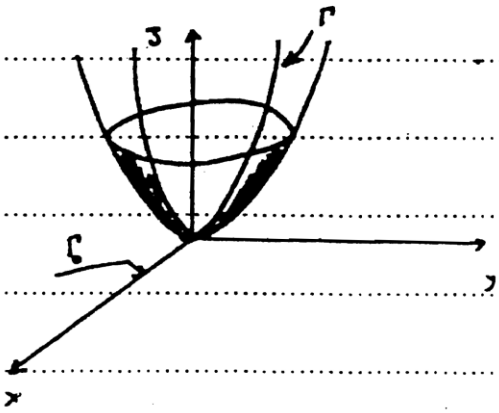
$$\boxed{z = \frac{3}{4}\left[h\left(\frac{3x-y}{3}\right) - \int\left(\frac{3x-y}{3}\right)\right] + \frac{1}{4} h(x+y) + \frac{3}{4} \int (x+y)}$$

بما أن المفروض أن h و $\int$ دوال C^2 فإن هذه العلاقة تحقق المعادلة الأصلية ولكنها تحقق جميع الشروط. نحن لا نعلم حتى الآن أن h و $\int$ وحيدتان، لكن بما أننا استطعنا تعيين الدالة z وذلك بالاستفادة من الشروط المعطاة أنفا، استطعنا تعيين الدالة z وذلك بالاستفادة من الشروط المعطاة أنفا، حيث $h(\tau) = \varphi(\tau, 0)$ ، $\sigma(\tau) = \varphi_y'(\tau, 0)$ ، وهذا ما يسمى بشرط التخطيط (strip condition) $f(\tau) = h'(\tau)$ ، أي $\varphi_x'(\tau, 0) = f(\tau)$ الشرط

3.18:

$h(\tau) = 3\tau^2$, $\rho(\tau) = 6\tau$, $\sigma(\tau) = 0$ فإن ... وبالتالي فإن

$z = 3x^2$ / $y = 0$ هي المعادلة التي تمثل تقاطع ...



يقع في المستوى xz.

... هذه الحالة يمكن كتابة ... على الشكل:

$$z = \frac{3}{4}\left[3\left(\frac{3x-y}{3}\right)^2\right] + \frac{1}{4}\cdot 3(x+y)^2$$

حيث $\beta(\tau) = \int \sigma(\tau)\, d\tau$ و $\beta = 0$

$$z = \frac{1}{4}(3x-y)^2 + \frac{3}{4}(x+y)^2 = \varphi(x,y) = 3x^2 + y^2$$

... وهو ما يحقق ... المعادلة.

نلاحظ أن:

$$\varphi_x(x,y) = \frac{3}{2}(3x-y) + \frac{3}{2}(x+y)$$

$$\varphi_x(\tau,0) = \frac{9}{2}\tau + \frac{3}{2}\tau = 6\tau = \rho(\tau)$$

$$\varphi(\tau,0) = \frac{9}{4}\tau^2 + \frac{3}{4}\tau^2 = 3\tau^2 = h(\tau)$$

$$\varphi_y(\tau,0) = \frac{-1}{2}(3\tau) + \frac{3}{2}\tau = 0 = \sigma(\tau)$$

ملاحظة: في هذه الأمثلة الأخيرة المعادلة التفاضلية كانت خطية ... وذات معاملات ثابتة، وكانت المعادلة المميزة ... (أي ρ ليس مقدارًا ثابتًا لتقاطع المنحنيين) والمقصود بالمنحنيات المميزة، هي المنحنيات والتي هي حلول لمعادلة من الشكل:

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = -m_1, \quad \frac{dy}{dx} = -m_2$$

وبتحقيق الشرط، حصلنا على حل وحيد في الأمثلة الأخيرة.

3.19:

الحل: لنجد معادلة المميزة

$$\psi(\varphi) = (\varphi_x)^2 + 2\varphi_x\varphi_y - 3(\varphi_y)^2$$
$$(\varphi_x + 3\varphi_y)(\varphi_x - \varphi_y)$$

لنجد المعاملات المميزة:

$$\frac{dy}{dx} = -(-3) = 3, \qquad \frac{dy}{dx} = 1$$

والمنحنيات المميزة هي

$$\xi = 3x - y = c_1, \qquad \eta = x + y = c_2$$

وهذا يثبت صحة ما سبق بالنسبة للمعادلة المميزة التي مرت بنقطة الأصل.

أي أنه P_0 هو منحنى مميز.

أما متجه وحدة المماس لـ P_0 عند:

$$\vec{T}_0 = \frac{\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{10}}$$

ومتجه وحدة الناظم لـ P_0 هو

$$\vec{n} = \frac{-3\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{10}}$$

أما الاشتقاق بجهة هي ومعه يثبت $\vec{T}_0$ هو

$$\frac{D}{T_0}\psi = \nabla\psi \cdot \vec{T}_0 = \frac{\psi_x + 3\psi_y}{\sqrt{10}}$$

إذاً مشتق المماس $\frac{D}{T}$ يكون:

$$\boxed{\frac{D}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left[\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}\right]}$$

ومنه على P_0

بما أن فرضنا أن $\psi \in C^1(R)$ إذاً على P_0 و ψ دالة ثابتة

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + 3\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{D}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{d}{dz}} \Leftarrow \frac{d\psi}{dz} = \sqrt{10}\,\frac{D}{T_0}\psi$$

أما المشتق الثاني في اتجاه $\vec{n}$ فهو:

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(-3\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial n}$$

وعند

$$\begin{cases} D_x = \frac{1}{\sqrt{10}}(D_\xi - 3D_\eta) \\ D_y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3D_\xi + D_\eta) \end{cases}$$

وبالتالي، يمكننا كتابة:

$$L = D_x^2 + 2D_xD_y - 3D_y^2 = (D_x + 3D_y)(D_x - D_y)$$

$$L = -2\sqrt{10}\,D_\xi(D_\xi + 2D_\eta)$$

لذا المعادلة التفاضلية $L\zeta = 0$ تصبح: $D_\xi^2\zeta = -2D_\xi D_\eta\zeta$

الطرف الأيسر من المعادلة الأخيرة تتوافق مشتقة باتجاه $\vec{\xi}$، والطرف الأيمن يحوي مشتقة باتجاه $\vec{\xi}$ وباتجاه $\vec{n}$. وهذا يعني أن φ تحقق

بالتالي لدينا φ تحقق

$$D_\xi\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{R(\xi)}{\sqrt{10}}$$

$$D_\eta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = H(\eta) \quad , \quad D_\xi D_\eta\varphi = \frac{H'(\eta)}{\sqrt{10}}$$

وعندما نعوض في المعادلة التفاضلية نحصل على العلاقة التالية

$$\boxed{R'(\xi) = -2\sqrt{10}\,H'(\eta)}$$

وهذه العلاقة توضح أنه توجد علاقة بين المعطيات R و H. وهذا يعني أنه مع توفر بيانات قابلة للقياس أو أنه مع توفر بيانات موضوعية نقوم بها، فإذا تم اختيار R بحيث $R'(\xi) = -2\sqrt{10}\,H(\eta)$ فإنه توجد

حل فيزيائي للمسألة المقترحة من أجل اختيار هذه المعطيات.

من نعلم أن الحل العام للمعادلة التفاضلية $L\zeta = 0$ هو

$$\zeta = F(3x - y) + G(x + y)$$

حسب شرط السؤال نجد:

$2/ G'(4\tau) = -\sqrt{10}\, H(\tau) - 10F'(0)$

$= \frac{h'(\tau)}{4} - 10F'(0)$

$G'(4\tau) = \frac{h'(\tau)}{4} - 5F'(0)$

$G(\tau) = \frac{h'(\tau/4)}{4} - F(0)$

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة ..... الموضوع: .....

$$\left.\begin{aligned} F(0) + G(4\tau) &= h(\tau) \\ -10F(0) - 2G(4\tau) &= \sqrt{10}\, H(\tau) \end{aligned}\right\}$$

ومنه $G(\tau) = h\left(\frac{\tau}{4}\right) - F(0)$

وإذا استعرضنا العلاقة $h'(\tau) = -2\sqrt{10}\, H(\tau)$ بـ

$$G'(\tau) = \frac{h'(\tau/4)}{4} - 5F'(0)$$

وبما أن الشرط الضروري على G يتوفر في أن $\boxed{F'(0) = 0}$

وهكذا إذا كانت $F \in C^1$ حيث تكون $F'(0) = 0$ فإنه يمكن الاستعانة بـ

المعادلة على صورة $\boxed{\xi = F(3x - y) + h\left(\frac{x+y}{4}\right) - F(0)}$

وبفرض أن اختيارات الدالة F حيث $F'(0) = 0$، فإنه يوجد لانهائي حلول ثابتة ومختلفة.

حلول تمارين مقرر 425 ريض- كتاب أ.د. محمد القويز

الفصل الخامس : معادلة لابلاس

5.12(ii):

(ii) $u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$

$u(0,y)=u(a,y)=0,\quad 0<y<b,$

$u(x,0)=0,\quad u(x,b)=f(x),\quad 0<x<a$

(ii) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) X_n(x)$ ... ج.

حيث:

$$A_n=\frac{1}{\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a f(x)\,X_n(x)\,dx$$

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

مثال (3): أوجد حل المسألة الآتية

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

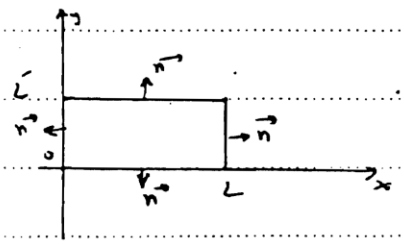
$$V(0,y) = 0 \qquad 0 < y < 2$$

$$V(L,y) = 0 \qquad 0 < y < 2$$

$$V(x,0) = 0 \qquad 0 < x < L$$

$$V(x,2) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

حيث f دالة (C.N.D) على $[0,L]$.



الحل: إن هذه المسألة هي مسألة ديريكليه لمنطقة مستطيلة.

واضح في هذه المسألة الشروط الحدية على x.

لذلك سنستخدم طريقة فصل المتغيرات.

نبحث عن الحل غير الصفري لمسألة ديريكليه $\Delta V = 0$ بالشكل: $V(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\Delta V = X''Y + Y''X = 0 \qquad X \neq 0 \quad Y \neq 0$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \lambda = -\alpha^2 \qquad (2*)$$

حيث نفرض $\lambda = -\alpha^2$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ (يمكن أن يكون α عدداً تخيلياً بحيث $\lambda > 0$)

حيث نجد المعادلتين التفاضليتين

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

$$Y'' - \alpha^2 Y = 0$$

$V(0,y) = X(0)\,Y(y) = 0 \qquad 0 < y < 2 \Rightarrow X(0) = 0$

$V(L,y) = X(L)\,Y(y) = 0 \qquad 0 < y < 2 \Rightarrow X(L) = 0$

حيث نعوض الصيغة $(2*)$ نفرضه الشكل $V \neq 0$ ، $X \neq 0$

$V(x,0) = X(x)\,Y(0) = 0 \qquad 0 < x < L \Rightarrow Y(0) = 0$

لدينا

$$\begin{cases} X'' + \alpha^2 X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le L \qquad (3*)$$

حلول هذه

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

$$X(0) = c_1 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$X(x) = c_2 \sin \alpha x \Rightarrow X(L) = c_2 \sin \alpha L = 0$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{L} \Leftarrow \alpha L = n\pi$$

(26)
$$\boxed{X_n(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

(27)
$$\begin{cases} Y'' - \alpha^2 Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

$$Y = c_3 e^{\alpha y} + c_4 e^{-\alpha y}, \quad Y(0) = c_3 + c_4 = 0$$

$$Y(y) = 2c_3 \left(\frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2}\right) = c_3 \sinh \alpha y$$

(27)
$$\boxed{Y(y) = c_5 \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}$$

(28)
$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

$$V(x,L) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$V(x,L) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi L}{L}\right)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\,dx = a_n \sinh\left(\frac{n\pi L}{L}\right) \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= a_n \sinh\left(\frac{n\pi L}{L}\right) \frac{L}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{L}\right)} \cdot \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\sinh(\frac{n\pi L}{L})} \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\frac{1}{\sinh(\frac{n\pi L}{L})} \int_0^L X_n(x) \cdot f(x)\, dx \right)$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad A_n(x)$$

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة

الموضوع:

$$a_n = \frac{1}{\sinh(\frac{n\pi L}{L})} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\, dx$$

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\, A_n$$

أو هيثما:

$$A_n = \frac{1}{\sinh(\frac{n\pi L}{L})} \int_0^L f(x)\, X_n(x)\, dx$$

حيث أن

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}}\, A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

وبالتالي لدينا

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) X_n(x) \qquad (2q)$$

وهذا هو مبتغانا، وحتى يصبح هذا الحل صحيحاً يجب مناقشة تقارب المعادلة (2q)

والنتيجة سوف تكون على الشكل التالي:

أولاً سوف نثبت أن المعادلة (2q) تحقق معادلة لابلاس في الوسط المستمر الذي نحن بصدده. ونلخص هذا بأن

المعادلة (2q) تحقق معادلة $\Delta V = 0$.

عندما تكون f (P.w.c.) فإنه يوجد عدد K بحيث $|f(x)| < K$ لكل $x \in [0, L]$، وكذلك $|X_n(x)| \le \sqrt{\frac{2}{L}}$

إذاً:

$$|A_n| \le \frac{1}{|\sinh(\frac{n\pi L}{L})|} \int_0^L |f(x)| \cdot |X_n(x)|\, dx$$

$$\le \frac{K \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot L}{|\sinh(\frac{n\pi L}{L})|} = \frac{\sqrt{2L} \cdot K}{|\sinh(\frac{n\pi L}{L})|} = \frac{\sqrt{2L} \cdot K}{\sinh(\frac{n\pi L}{L})}$$

بما أن $0 \le x \le L$، وبما أن $0 \le y \le L$ فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n \sinh(\tfrac{n\pi y}{L}) X_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2L} \cdot K}{\sinh(\frac{n\pi L}{L})} \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$= 2K \sum \frac{\sinh(\frac{n\pi y}{L})}{\sinh(\frac{n\pi L}{L})}$$

$$\le 2K \sum_{1}^{\infty} e^{-n\pi(L-y)/L}$$

$\forall a < b \Rightarrow \frac{\sinh a}{\sinh b} < e^{-(b-a)}$ (144) $e^{a} - e^{-a} < e^{b} - e^{-b+a}$

$\Leftrightarrow$

$\frac{e^{a} - e^{-a}}{e^{b} - e^{-b}} < e^{-b+a}$ $\Leftrightarrow$

$-e^{-a} < e^{-2b+a} \Leftrightarrow -e^{-2a} < e^{-2b}$

$e^{-2a} > e^{-2b}$

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة ..... الموضوع: .....

$$\sum_1^\infty |A_n \sinh \frac{n\pi y}{L} X_n(x)| \le 2K \sum_1^\infty e^{-n\pi(L-y_0)/L}$$

$$= 2K \sum_1^\infty \left(e^{-\pi(L-y_0)/L}\right)^n$$

$$= 2K \sum_1^\infty r^n$$

حيث $r = e^{-\pi(L-y_0)/L} < 1$ ، وحيث إن المتسلسلة الأخيرة هندسية ($|r|<1$)

إذاً هي متقاربة ، إذاً المتسلسلة (2q) متقاربة بانتظام بالنسبة لـ (x, y)

حيث $0 \le x \le L$ ، $0 < y_0 \le y < L$ ، وحيث إن y_0 اختياري ، إذاً المتسلسلة (2q)

عبارة عن متسلسلة متقاربة بانتظام على المستطيل: $0 \le x \le L$ ، $0 < y_0 \le y < L$

وبالمثل نبرهن على أن $V(x,y)$ معرفة على المستطيل $[0, L] \times [0, L]$

وحيث افترضنا أنه حيث توجد متغيرات غير معرفة من بعض النقاط ، فإنه لكي V يجب أن تكون معرفة

لأن $X_n(x) = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ، حيث n أعداد صحيحة ، $0 \le x \le L$ ، $0 < y_0 \le y < L$

أيضاً

$$\sum_1^\infty |A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) X_n(x)| \le \frac{2K\pi}{L} \cdot \sum_1^\infty n r^n$$

وحيث إن $\sum_1^\infty n r^n$ متقاربة ($r < 1$) إذاً المتسلسلة: $\sum_1^\infty A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) X_n(x)$

متقاربة بانتظام ، وبالتالي يمكن اشتقاق طرفي المعادلة (2q) بالنسبة لـ x فنجد

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum_1^\infty A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) X_n'(x) \qquad (30)$$

حيث $0 < y_0 \le y < L$ ، $0 \le x \le L$

ونفس الطريقة نجد أن

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sum_1^\infty A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) X_n''(x) \qquad (31)$$

حيث $0 \le x \le L$ ، $0 < y_0 \le y < L$

$$\sum_1^\infty |A_n \frac{d}{dy} \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) X_n(x)| = \frac{\pi}{L} \sum_1^\infty |n A_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) X_n(x)|$$

$\sinh(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{n\pi}{2}} - e^{-\frac{n\pi}{2}}) = \frac{e^{\frac{n\pi}{2}}}{2}(1 - e^{-n\pi})$, $u_n = (1 - e^{-\pi})\frac{e^{\frac{n\pi}{2}}}{2}$

$u_n \to \frac{1}{2}$ as $n \to \infty$. $\quad |u_n - \frac{1}{2}| < \epsilon \quad \forall n > N$

$-\epsilon + \frac{1}{2} < u_n < \frac{1}{2} + \epsilon$ نأخذ $\epsilon = \frac{1}{4}$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$\frac{1}{4} < u_n < \frac{3}{4} \quad \forall n \geq N$

$u_n > \frac{1}{4} \quad \forall n \geq N$ إذن

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة ..... الموضوع: .....

$$\frac{2K\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cosh(\frac{n\pi y}{L})}{\sinh(\frac{n\pi L}{L})} \geq$$

$\sinh(\frac{n\pi L}{L}) \geq (\frac{1}{4}) e^{\frac{n\pi L}{L}}$ نعلم أن N كبيرة جداً بحيث يكون:

بما أن $n \geq N$ فإن $n \geq N$ إذاً لدينا

$$\frac{\pi}{L} \sum_{n=N}^{\infty} |n A_n \cosh \frac{n\pi y}{L} X_n(x)| \leq \frac{2K\pi}{L} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n e^{n\pi y/L}}{(\frac{1}{4}) e^{n\pi L/L}}$$

$$= \frac{8K\pi}{L} \sum_{N}^{\infty} n e^{-n\pi(L-y)/L}$$

$$\leq \frac{8\pi K}{L} \sum_{N}^{\infty} e^{-n\pi(\frac{L}{2}-y)/L}$$

$$= \frac{8\pi K}{L} \sum_{N}^{\infty} n \lambda^n$$

حيث $\lambda = e^{-\pi(\frac{L}{2}-y)/L} < 1$ ، $0 \leq x \leq L$ ، $0 < y < \frac{L}{2}$

وبما أن $\sum_{N}^{\infty} n\lambda^n$ متقاربة إذاً المتسلسلة

$\sum_{1}^{\infty} A_n \frac{d}{dy} \sinh(\frac{n\pi y}{L}) X_n(x)$ متقاربة بانتظام بما أن

$0 \leq x \leq L$ ، $0 < y \leq \frac{L}{2}$ وبالتالي نستطيع استخدام طريقة الفصل

(2) بالتعويض في (1) بما أن $0 \leq x \leq L$ ، $0 < y \leq \frac{L}{2}$ فإن

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\pi}{L} \sum_{1}^{\infty} n A_n \cosh \frac{n\pi y}{L} X_n(x) \quad (3)$$

وبتفاضل المعادلة (3) نحصل على

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{1}^{\infty} n^2 A_n \sinh(\frac{n\pi y}{L}) X_n(x) \quad (33)$$

وحيث أن $X_n''(x) = \frac{-n^2\pi^2}{L^2} X_n(x)$

بتعويض المعادلتين (1) ، (33) في

$0 < y < \frac{L}{2}$ ، $0 \leq x \leq L$ ، $\Delta V = 0$ ، $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ أي أن

$(x_0, y_0) \in (0, L) \times [0, \frac{L}{2}]$ في داخل المستطيل $\Delta V = 0$ إذا

نظرية وحدانية الحل: لتكن f دالة متصلة على $[0, L]$ ، (حيث نرغب

في وجود الحل V على $(P.W.C.)$ $[0, L]$) ولتكن g_1, g_2 دالتين f متصلة

R ... V ... متصلة في ...
فإذا كانت V_1 ، V_2 حلين لهذه المسألة فإن $V(x,y) = V_1 - V_2$ يكون توافقية في داخل R
$V(x,y) = 0$ على $B(R) \Leftarrow V(x,y) = 0$ في R حسب ... الأعظم
$\Rightarrow V(x,y) = 0$ on $\bar{R}$ $\Rightarrow V_1(x,y) = V_2(x,y)$
$\forall (x,y) \in \bar{R}$ ... دون ...

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة .... الموضوع: ....

على $[0, L]$ وتزيد f (P.w.c.) وأن $f(0) = f(L) = 0$

<u>لنفترض الآن الشروط المناسبة الآتية:</u>

(34) $V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$; $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L'$

متصلة

وأن المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لـ V متصلة على $0 < x < L$, $0 < y < L'$ (35)

لنفرض الآن أنه يوجد حلان $V_1(x,y)$ ، $V_2(x,y)$ تحققان

المسألة المطلوبة. ولنأخذ الفرق: $V(x,y) = V_1(x,y) - V_2(x,y)$

وفي هذه الحالة لدينا: $V(x, L') = V_1(x, L') - V_2(x, L') = 0$

حيث $0 < x < L$

لدينا أيضاً $V \Delta V = 0$; $R \left\{ \begin{matrix} 0 < x < L \\ 0 < y < L' \end{matrix} \right\}$

ومنه

$$\iint_R V \Delta V = 0$$

وباستخدام قاعدة جرين نجد:

$$\oint_{B(R)} V \frac{\partial V}{\partial n} ds - \iint_R |\nabla V|^2 dA = 0$$

حيث $\frac{\partial V}{\partial n}$ المشتقة الاتجاهية لـ V وفي الاتجاه العمودي على المنحنى المغلق $B(R)$.

وحيث أن $V \equiv 0$ على $B(R)$ فإذاً $\oint_{B(R)} V \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0$

فإذاً لدينا

$$\iint_R |\nabla V|^2 dA = 0 \Rightarrow \nabla V \equiv 0 \text{ on } R.$$

وهذا يعني أن V يجب أن تكون دالة ثابتة في R.

فإذاً حسب V ثابتة في R (حيث أن V توافقية في R) وأن $V \equiv 0$ على المنحنى $B(R)$

وأن V متصلة على $0 \le x \le L$ ، $0 \le y \le L'$ وبموجب المبدأ الأعظم $\Leftarrow$

$V(x,y) = 0$ في $R \Leftarrow V_1(x,y) = V_2(x,y)$ في $\bar{R}$ مصغراً يكون حل

وحيدة ... تحت الشروط (34) ، (35):

بما أن V ثابتة و V متصلة على $\bar{R}$ ... (147) ... $V(x,y) = 0 \Leftarrow V(x,y) \equiv 0$ $\bar{R}$
... $(a,b) \in B(R)$ ... $\forall (x,y) \in \bar{R}$ ... $V_1(x,y) = V_2(x,y)$
$V(x,y) = c$ ... $V(x,y) = V(a,b)$
$\forall (x,y) \in \bar{R}$

وفي حسابات معقدة، يزحمه الحل باليد- كالمساحة، المعطاة بالمعادلة (29)
تحقق الشرطين (34)، (35). بدأ من هذا تمرين (المرجع 1) الكتاب:

Applied Partial Differential equations

المؤلف Donald W. TRIM صفحة (213):

وبالتالي فإنه من الخطأ يصبح وصفياً.

6.8 استخدم فصل المتغيرات لحل المسألة الحدية:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x, \quad 0 < x < \pi$$

6.8 : $u_{tt} = 4u_{xx}$ Put $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

$\Rightarrow X\cdot T'' = 4X''\cdot T \xrightarrow{\div XT} \frac{T''}{T} = 4\frac{X''}{X}$

$\Rightarrow \frac{T''}{T} = -\lambda^2$ and $\frac{4X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X = c_1\cos(2\lambda x) + c_2\sin(2\lambda x)$

$T = c_3\cos(\lambda t) + c_4\sin(\lambda t)$

$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)\,T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 = c_1 \Rightarrow X = c_2\sin(2\lambda x)$

$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow X(\pi)\,T(t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0 = c_2\sin(2\lambda\pi) \Rightarrow 2\lambda\pi = n\pi$

$\lambda = \frac{n}{2}$

$\Rightarrow X = c_2\sin(nx)$

$u(x,0) = 0 \Rightarrow X\cdot T(0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0 = c_3 \Rightarrow T = c_4\sin(\frac{nt}{2})$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)\sin(\frac{nt}{2})$

$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} c_n \sin(nx)\cos(\frac{nt}{2})$

$u_t(x,0) = x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} c_n \sin(nx) = x$

$\frac{n}{2} c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

$\frac{n}{2} c_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}$

$c_n = \frac{4}{n\pi}\left[-\pi\frac{(-1)^n}{n}\right] = \frac{+4\pi(-1)^{n+1}}{n^2\pi}$

~~$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)\cos(\frac{nt}{2})$~~

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\sin(nx)\sin(\frac{nt}{2})$

Put $\frac{n}{2} = k \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2$

$n+1 = (2k+1)$

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k^2}\sin(2kx)\sin(kt)$

روابط:

https://www.youtube.com/watch?v=4UtGyd86FjI

https://www.youtube.com/watch?v=CP3jFBR5xls

6.12 أعط تفسيراً فيزيائياً للمسألة الحدية،

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l$$

حيث تمثل g عجلة الجاذبية ثم أوجد الحل $u(x,t)$ الذي يحققها

https://www.youtube.com/watch?v=3HB66sF3228

حلول تمارين مقرر 425 ريض- كتاب أ.د. محمد القويز

الفصل السابع : معادلة الحرارة

7.1 أوجد حل المسألة التالية:

$$u_t = k u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1, \ t > 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

ج:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^1 f(\tau) \sin(n\pi\tau) d\tau \, e^{-n^2\pi^2 k t} \sin(n\pi x)$$

7.1 : $u(x,t) = X(x)\cdot T(t) \Rightarrow u_t = X\cdot T',\ u_{xx} = X''\cdot T$

in PDE $\rightarrow X\cdot T' = K\cdot X''\cdot T \xrightarrow{\div X\cdot T} \frac{T'}{T} = k\cdot\frac{X''}{X} = -\lambda^2$

$\Rightarrow T' = -\lambda^2 T = \ln(T) = -\lambda^2 t + c_1 \Rightarrow T = C e^{-\lambda^2 t}$

$X'' + \frac{\lambda^2}{K} X = 0 \Rightarrow X = c_1\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{K}}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{K}}x\right)$

$u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 = c_1 \Rightarrow X = c_2 \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{K}}x\right)$

$u(1,t) = X(1)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0 = c_2 \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{K}}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{K}}\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt{K}\,n$; $n \in$

$\Rightarrow X = c_2 \sin(n\pi x)$, $T = C e^{-k\pi^2 t}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-k\pi^2 t\cdot n^2}\cdot \sin(n\pi x)$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)$$

~~$C_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx$~~

$$C_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\int_0^1 f(\tau)\sin(n\pi\tau)\,d\tau \cdot e^{-n^2\pi^2 k t}\cdot \sin(n\pi x)$$

7.3 أوجد حل المسألة التالية:

$$u_t = u_{xx},\ 0<x<\pi,\ t>0,$$
$$u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=1,\ t>0,$$
$$u(x,0)=x,\ 0<x<\pi$$

ج:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi^2}\left[(-1)^n(\pi^2-1)+1\right]e^{-n^2t}\sin(nx)+\frac{x}{\pi}$$

https://www.youtube.com/watch?v=G6OZ1lyhg9s