الاشتقاق الجزئي

تعريف: لتكن f دالة ذي متغيرين x , y , والنقطة $(a,b) \in D_f$

(1) الاشتقاق الجزئي الأول حسب المتغير الأول (أ , الثاني)

عند النقطة (a,b) هو القيمة، إن وجدت ، التالية (مع الرمز)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \quad \text{أو} \right)$$

(2) الاشتقاق الجزئي من الرتبة الثانية عند النقطة (a,b)

$$f_{xx}(a,b) = f_{x^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(a,b)$$

$$f_{xy}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(a,b)$$

$$f_{yx}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(a,b)$$

$$f_{yy}(a,b) = f_{y^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(a,b)$$

مثال (1):

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}^2$$

عند النقطة $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x^2+y^2)-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

عند النقطة $(x,y)=(0,0)$:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x\cdot0}{x^2+0^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

إذن $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

$$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=\lim_{y\to0}0=0$$

إذن $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

وبالتالي:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الاشتقاق الجزئي الثاني عند النقطة $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{0}{x^4}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{y(y^2)}{y^4}-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{1}{y^2}=+\infty$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{x^4}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0}{y^4}-0}{y}=\lim_{y\to0}0=0$$

وبالتالي: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ غير موجود ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ غير موجود.

مثال 2: لتكن
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

أوجد $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ إن وجدت لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

الحل: عند النقطة: $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x(x,y)=\frac{2x(x^2+y^2)-x^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-x^2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

عند النقطة: $(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{x^2+0^2}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\pm\infty$$

$f_x(0,0)$ غير موجودة.

$$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0^2}{0+y^2}-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=\lim_{y\to0}0=0$$

إذن $\boxed{f_y(0,0)=0}$

ملاحظة:
$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases},\quad h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 3 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نثبت أن $g_x(0,0)=0$ و $g_y(0,0)$ غير موجودة.

$h_x(0,0)$ غير موجودة و $h_y(0,0)$ غير موجودة.

الاشتقاق الجزئي الثاني للدالة f عند النقطة $(0,0)$

بما أن $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ غير موجود فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ كل منهما غير موجود.

ولدينا:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{0}{x^4}-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

إذن $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0$

ولدينا:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$$
$$=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0}{y^4}-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=\lim_{y\to0}0=0$$

إذن $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$

ملاحظة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}^2$$

نعلم f ليست لها نهاية عند النقطة $(0,0)$

وبالتالي f ليست متصلة عند النقطة $(0,0)$

وحسب ما سبق f لها مشتقات أولى جزئية عند النقطة $(0,0)$

مثال 3 ص 57: إذا كانت $f(x,y)=xe^{y^2}+\ln(x^2+y^2+1)$

أوجد $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

ثم أوجد الاشتقاقات الجزئية الثانية عند النقطة (x,y):

الحل: عند النقطة $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y)=e^{y^2}+\frac{2x}{x^2+y^2+1}$$

$$f_y(x,y)=2yxe^{y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

الاشتقاق الجزئي الثاني:

$$f_{x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)=\frac{2(x^2+y^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{2(-x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)=2ye^{y^2}+\frac{-2x\,2y}{(x^2+y^2+1)^2}=2y\left(e^{y^2}-\frac{2x}{(x^2+y^2+1)^2}\right.$$

$$f_{yx}(x,y)=$$

$$f_{y^2}(x,y)=$$

مثال ٥٤٤ : لنكن

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

أوجد $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ إن وجدت لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

الحل : عند النقطة $(x,y)=(0,0)$

لدينا : $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{0}{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=\lim 0=0$

ولدينا : $\displaystyle\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0}{y^2}-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=\lim 0=0$

إذن : $f_x(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $f_y(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

عند النقطة $(x,y)\neq(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^4y+3x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4+3x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^4+3x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad ; \quad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نجد كل من $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ ونقارن بينهما

لدينا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial (f_x)}{\partial y}(0,0) = ?$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{-\frac{y^5}{y^4} - 0}{y} = \lim_{y \to 0} -1 = -1$$

اذن:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1}$$

ولدينا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial (f_y)}{\partial x}(0,0) = ?$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^5}{x^4} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

اذن:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1}$$

ملاحظة:

$$-1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$$

مثال 8 ص 60: أوجد المشتقات الجزئية للدالة $w=(x^2+y^2+1)^{x+y}$

الحل: لدينا: $\ln(w(x,y))=(x+y)\cdot\ln(x^2+y^2+1)$

وبالتالي: $\dfrac{w_x(x,y)}{w(x,y)}=\ln(x^2+y^2+1)+(x+y)\cdot\dfrac{2x}{x^2+y^2+1}$

فإن: $\boxed{w_x(x,y)=\left(\ln(x^2+y^2+1)+\dfrac{2x(x+y)}{x^2+y^2+1}\right)(x^2+y^2+1)^{x+y}}$

ونثبت: $w_y(x,y)=\left(\ln(x^2+y^2+1)+\dfrac{2y(x+y)}{(x^2+y^2+1)}\right)(x^2+y^2+1)^{x+y}$

مبرهنة: لتكن f دالة في متغيرين x و y وحيث

إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

عند النقطة (a,b) متصلة:

فإن
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

ملاحظة: حسب المبرهنة ،

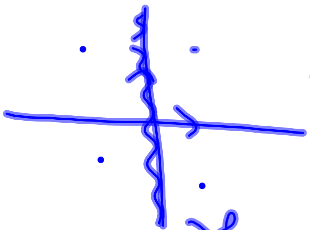
إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ فإن: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ أو $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ غير متصل عند (a,b)

مثال 13 ص66: لتكن الدالة: $f(x,y)=x^{c}e^{-\frac{y}{x}}$

حيث $x\neq 0$، أوجد قيمة العدد c لكي تحقق المعادلة:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

الحل:



$$D=D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y):\ x=0\}$$

لدينا: لكل $(x,y)\in D$ ؛

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=cx^{c-1}e^{-\frac{y}{x}}+x^{c}\left(\frac{y}{x^2}\right)e^{-\frac{y}{x}}$$

$$=\left(cx^{c-1}+yx^{c-2}\right)e^{-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^{c}\left(-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{y}{x}}=-x^{c-1}e^{-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-x^{c-1}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{y}{x}}=x^{c-2}e^{-\frac{y}{x}}$$

وبالتالي المعادلة:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

تكافئ المعادلة:

$$\left(cx^{c-1}+yx^{c-2}\right)e^{-\frac{y}{x}}=yx^{c-2}e^{-\frac{y}{x}}-x^{c-1}e^{-\frac{y}{x}}$$

بما أن: $e^{-\frac{y}{x}}\neq 0$ لكل $(x,y)\in D$ فإن:

$$cx^{c-1}+yx^{c-2}=yx^{c-2}-x^{c-1}$$

وبالتالي

$$cx^{c-1}=-x^{c-1}$$

وبما أن $x\neq 0$ فإن: $\boxed{c=-1}$

مثال 16 ص 68: هل توجد دالة f في متغيرين x و y
مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة
عند كل نقطة $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ بحيث يكون

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y - x$$

الحل: نفرض أنه توجد الدالة f حيث مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$.

حسب المبرهنة السابقة لدينا

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{لكل } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ولدينا f تحقق

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y - x$$

بأن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -1$$

بأنه لا توجد دالة تحقق السؤال.