| جامعة الملك سعود King Saud University | كلية العلوم – قسم الرياضيات | الاختبار الشهري الأول للمقرر<br>111 ريض للفصل الأول<br>1439-1438 هـ |
|---|---|---|
| | الإسم: ..........................................<br>الرقم الجامعي:..........................................<br>أستاذ المقرر:.......................................... | الزمن: ساعة ونصف.<br>الدرجة: |

ملاحظات : **1**. عدد الورقات 3 **2** . ممنوع استخدام الالة الحاسبة.

**<u>السؤال الأول (3 درجات):</u>** استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_0^2 (6x-5)\,dx$ .

[redacted] $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right)$$

$a=0 \;;\; b=2 \;;\; f(x)=6x-5$

[redacted]

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \;;\quad x_k = a+k\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{2k}{n} \;;\; 0\le k\le n$

$f(x_k) = 6\left(\frac{2k}{n}\right)-5 = \frac{12k}{n}-5$

$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{12}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - 5\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{12}{\cancel{n}}\,\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} - 5n = 6(n+1)-5n$
$= n+6$

$\int_0^2 (6x-5)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[n+6\right] = \underline{\underline{2}}.$

<u>check</u>: $\int_0^2 (6x-5)\,dx = \left[3x^2-5x\right]_0^2 = 12-10 = 2.$

**<u>السؤال الثاني (3 درجات):</u>** أوجد قيمة $c$ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{x+2}$ على الفترة $[-1,2]$ .

بما أن $f$ متصلة على $[-1,2]$ فإنه يوجد $c\in(-1,2)$ بحيث

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

$a=-1 \;;\; b=2 \;;\; f(x)=\sqrt{x+2}$

[redacted] $\int_{-1}^{2} \sqrt{x+2}\,dx = (2-(-1))\sqrt{c+2}$

$\frac{2}{3}\left[(x+2)^{3/2}\right]_{-1}^{2} = 3\sqrt{c+2}$

[redacted]

$\frac{2}{3}\left[4^{3/2}-1\right] = 3\sqrt{c+2} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}\left[2^3-1\right] = 3\sqrt{c+2}$

$\frac{14}{3} = 3\sqrt{c+2}$

$\frac{14}{9} = \sqrt{c+2}$

$c = \left(\frac{14}{9}\right)^2-2 = \underline{\frac{34}{81}} \in (-1,2)$

**السؤال الثالث (3 درجات):** إذا كانت $F(x)=\int_{2x-3}^{x^2}\ln(t^2)\,dt$ فأوجد $F'(2)$ .

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x)$$

[redacted]

$$F'(x) = 2x\,\ln(x^4) - 2\ln((2x-3)^2)$$

$$F'(2) = 4\ln(2^4) - 2\ln 1 = 16\ln 2$$

**السؤال الرابع (4 درجات):** احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

(أ) $y=\sqrt{x}\ \ln x$ (درجة)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

[redacted]

(ب) $y=\left(\tan^{-1}x\right)^{\sin x}$ (3 درجات)

[redacted]

$$\ln|y| = \ln|(\tan^{-1}x)^{\sin x}|$$

$$\ln|y| = \sin x\ \ln|\tan^{-1}x|$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x\ln(|\tan^{-1}x|) + \sin x\ \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\tan^{-1}x}$$

$$y' = \left[\cos x\ln(|\tan^{-1}x|) + \frac{\sin x}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\right](\tan^{-1}x)^{\sin x}$$

**السؤال الخامس (12 درجات):** احسب التكاملات التالية:

(1) $\int\sqrt{x}\,(x+1)^2\,dx$ (درجتان)

[redacted]

$$\int\sqrt{x}\,(x+1)^2dx = \int x^{1/2}(x^2+2x+1)\,dx$$

$$\int\sqrt{x}\,(x+1)^2dx = \int\left[x^{5/2}+2x^{3/2}+x^{1/2}\right]dx$$

$$= \frac{2}{7}x^{7/2}+2\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+c$$

(2) $\int\frac{x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx$ (درجتان)

$$\int\frac{x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx = \int x\,(x^2+1)^{-1/5}dx$$

[redacted]

$u = x^2+1$

$du = 2x\,dx$

$x\,dx = \frac{1}{2}du$

[redacted]

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/5}\,du$$

[redacted]

$$= \frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\,u^{4/5}+c = \frac{5}{8}(x^2+1)^{4/5}+c$$

(3) $\int \frac{x^2+\cos x}{x^3+3\sin x}dx$ (درجتان)

$$\int \frac{x^2+\cos x}{x^3+3\sin x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3\cos x}{x^3+3\sin x}\,dx$$

[redacted]

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+3\sin x| + cst$$

(4) $\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}dx$ (درجتان)

$$\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx = \int \csc^2 x \; e^{\cot x}\,dx$$

$u = \cot x$

$du = -\csc^2 x\,dx$

[redacted]

$$= -\int e^u\,du$$

$$= -e^u + cst$$

$$= -e^{\cot x} + cst$$

(5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ (درجتان)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2\int \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

[redacted]

$u = 1+\ln x$

$du = \frac{dx}{x}$

$$= 2\sqrt{u} + c$$

[redacted]

$$= 2\sqrt{1+\ln x} + c$$

(6) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}}dx$ (درجتان)

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}}\,dx = \int \frac{3^x}{\sqrt{1-(3^x)^2}}\,dx$$

$u = 3^x$

[redacted]

$du = (\ln 3)\, 3^x\,dx$

$3^x dx = \frac{1}{\ln 3}\,du$

$$= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\ln 3}\sin^{-1}(u) + c$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\sin^{-1}(3^x) + C\,.$$

[redacted]