الفصل الرابع عشر

الأشكال ، الأشكال الموجهة ، الآلات

١٤-١ مقدمة

المصطلح « شكل » فى الرياضيات له معان مختلفة . ولقد سبق أن عرفنا « شكل » الدالة و« شكل » العلاقة . فى هذا الفصل سوف نستخدم الكلمة « شكل » بمفهوم آخر - وهو المشار اليه فى بند ٦-١٣ ، حيث تكلمنا عن الشكل الموجه للعلاقة .

الأشكال ، بصفة خاصة أشكال الشجرة والأشكال الموجهة تظهر فى أماكن كثيرة فى علوم الحاسب والمعلومات . الخرائط التوضيحية ، مثلا ، الموضحة فى الفصل الخامس ، هى أشكال موجهة . تعالج أمثلة أخرى فى هذا الفصل . وننهى الفصل بتعريف الآلة ذات الحالات المحدودة . والتى أحد أمثلتها الحاسب .

١٤-٢ الأشكال والأشكال المتعددة

الشكل G يتكون من شيئين :

(i) فئة V تسمى عناصرها رؤوس ، نقط أو عقد .

(ii) فئة E من الأزواج غير المرتبة من الرؤوس المختلفة . تسمى حواف .

ونرمز للشكل بالرمز $G(V, E)$ عندما نريد التأكيد على جزئى G .

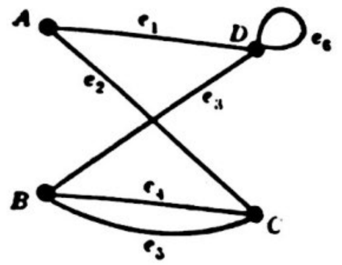
الرأسان u و v يقال أنهما متجاوران إذا وجدت حافة $\{u$ و $v\}$.

نرسم الأشكال بمخططات فى المستوى بالطريقة العادية . أى أن كل رأس v فى V يمثل بنقطة (أو دائرة صغيرة) وكل حافة $e = \{v_1, v_2\}$ تمثل بمنحنى يصل بين النهايتين v_1 و v_2

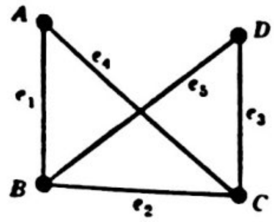
مثال ١٤-١

(أ) شكل ١٤-١ (أ) يمثل الشكل G الذى له أربعة رؤوس A ، B ، C و D وخمس حواف : $e_1 = \{A, B\}$ ، $e_2 = \{B, C\}$ ، $e_3 = \{C, D\}$ ، $e_4 = \{A, C\}$ ، $e_5 = \{B, D\}$. عادة نوضح الشكل برسم مخططة أفضل من سرد رؤوسه وحوافه تفصيلا .

(ب) شكل ١٤-١ (ب) ليس شكلا ولكن شكل متعدد . والسبب هو أن e_4 ، e_5 حافتان متعددتان أى أنهما حافتان توصلان نفس النهايتين ، و e_6 هى عروة (حلقة) ، أى أنها حافة نهايتاها هما نفس الرأس . تعريف الشكل لا يسمح بالحواف المتعددة أو بالحلقات ، بعبارة أخرى يمكن تعريف الشكل بأنه شكل متعدد بدون حواف متعددة وبدون حلقات . يقال أن الشكل المتعدد محدود إذا كان له عدد محدود من الرؤوس وعدد محدود من الحواف . الأشكال المتعددة فى هذا الكتاب سوف تكون محدودة ما لم يذكر خلاف ذلك . لاحظ أن الشكل الذى له عدد محدود من الرؤوس ، تلقائياً له عدد محدود من الحواف وبالتالى يجب أن يكون محدوداً .



(ب) شكل متعدد



(أ) شكل

شكل ١٤-١

ليكن $G(V, E)$ شكلا . لتكن V' فئة جزئية من V و E' فئة جزئية من E حيث نقط النهايات تنتمى إلى V' . $G(V', E')$ يكون شكلا ويسمى شكلا جزئياً من $G(V, E)$. إذا كانت E' تحوى جميع حواف E التى نقط نهاياتها توجد فى V' ، فإن $G(V', E')$ يسمى الشكل الجزئى المنشأ بـ V' .

١٤-٣ درجة الرأس

إذا كانت v هى نهاية حافة e ، فإننا نقول أن e ساقطة على v . درجة الرأس v ، وتكتب $\deg(v)$ تساوى عدد الحواف التى تسقط على v . (الرأس ذو الدرجة صفر ، أى الرأس الذى لا ينتمى إلى أى حافة ، يسمى رأساً معزولا) . بما أن كل حافة تعد مرتين فى حساب درجات رؤوس الشكل ، فإن لدينا النتيجة البسيطة ، لكنها هامة ، التالية .

نظرية ١٤-١ : مجموع درجات الرؤوس لشكل ما يساوى ضعف عدد الحواف .

مثال ١٤-٢ فى الشكل ١٤-١ (أ) ،

$$\deg(A) = 2 \text{ ، } \deg(B) = 3 \text{ ، } \deg(C) = 3 \text{ ، } \deg(D) = 2$$

مجموع الدرجات يساوى عشرة ، وذلك ، كما هو متوقع ، ضعف عدد الحواف . يسمى الرأس زوجياً أو فردياً حسب كون درجته عدداً زوجياً أم فردياً . وبالتالى A ، D رأسان زوجيان بينما B و C رأسان فرديان .

نظرية ١٤-١ تنطبق أيضاً على الأشكال المتعددة إذا أحصيت الحلقة مرتين فى حساب درجة نقطة نهايتها . ففى الشكل ١٤-١ (ب) ، يكون $\deg(D) = 4$ ، إذ أن الحافة e_6 تعد مرتين ، وبالتالى D رأس زوجى .

١٤-٤ الاتصال

الطريق فى الشكل المتعدد يتكون من متابعة من الرؤوس والحواف فى تتابع على الصورة

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$$

حيث كل حافة e_i تسقط على v_{i-1} و v_i . عدد الحواف n يسمى طول الطريق . عندما لا يكون هناك لبس نرمز للطريق بمتابعة حوافه $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ أو بمتابعة رؤوسه $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$. يقال إن الطريق مغلق إذا كان $v_0 = v_n$. فى الحالات الأخرى نقول إن الطريق هو من v_0 إلى v_n ، أو بين v_0 و v_n أو يوصل v_0 بـ v_n .

الممر هو طريق به جميع الحواف مختلفة ، والمسار هو طريق به جميع الرؤوس مختلفة ، وبالتالى المسار يجب أن يكون ممراً . الطريق الدائرى هو طريق مغلق بحيث أن جميع الرؤوس تكون مختلفة ما عدا $v_0 = v_n$. الطريق

الدائرى ذو الطول k يسمى طريقاً دائرياً $-k$ فى أى شكل ، أى طريق دائرى يجب أن يكون طوله (عدد الحواف أو عدد الرؤوس) ثلاثة أو أكثر .

مثال ١٤-٣ اعتبر الشكل فى شكل ١٤-٢ . المتابعة

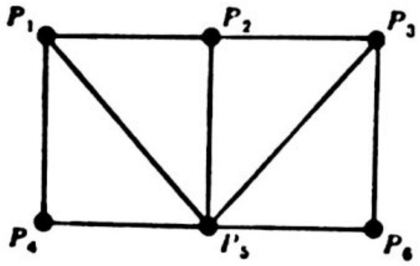
$$(P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6)$$

هى طريق من P_4 الى P_6 ولكنها ليست ممراً إذ أن الحافة $\{P_1, P_2\}$ استخدمت مرتين . المتابعة

$$(P_4, P_1, P_5, P_2, P_6)$$

ليست طريقاً إذ لا توجد حافة $\{P_2, P_6\}$. المتابعة

$$(P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6)$$



شكل ١٤-٢

هى ممر إذ لم تستخدم أى حافة مرتين ، لكنها ليست مساراً إذ أن الرأس P_5 قد استخدم مرتين المتابعة .

$$(P_4, P_1, P_5, P_3, P_6)$$

هى مسار من P_4 الى P_6 . المسار الأقصر (بالنسبة للطول) من P_4 الى P_6 هو (P_4, P_5, P_6) ، الذى هو طوله 2 .

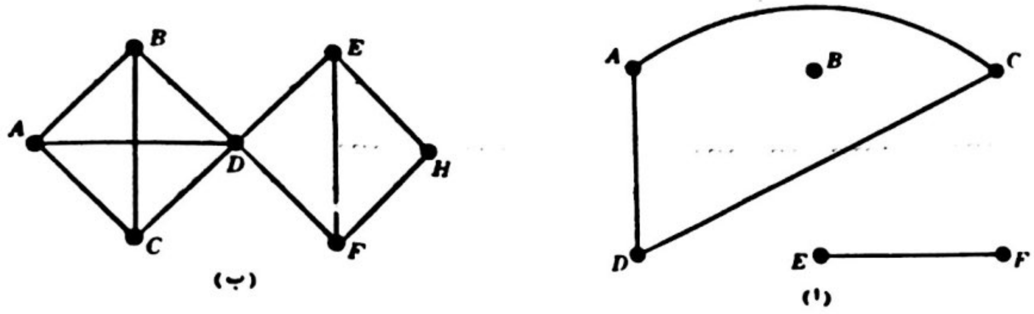
بحذف الحواف غير اللازمة ، ليس من الصعب اثبات أن بأى طريق من رأس u الى رأس v يمكن استبدال مسار من u الى v . نصيغ هذه النتيجة فى الصورة :

نظرية ١٤-٢ : يوجد طريق من رأس u إلى رأس v إذا وفقط إذا وجد مسار من u الى v .

يسمى الشكل متصلا إذا وجد مسار بين كل اثنين من رؤوسه . الشكل فى شكل ١٤-٢ متصل ، ولكن الشكل فى ١٤-٣ (أ) غير متصل ، لأنه لا يوجد مسار بين D و E مثلا . الشكل الجزئى المتصل من شكل G يسمى مركبة متصلة لـ G إذ لم يكون محتوى فى شكل جزئى متصل أكبر منه .) واضح بديهياً أن أى شكل يمكن تجزيئه إلى مركباته المتصلة . فمثلا ، الشكل فى شكل ١٤-٣ (أ) له ثلاث مركبات متصلة . أى شكل متصل يحوى نفسه كمركبة متصلة وحيدة .

المسافة بين الرأسين u و v لشكل متصل G ، ونكتب $d(u, v)$ هى طول أقصر مسار بين u, v قطر الشكل المتصل G هو أكبر مسافة بين أى اثنين من رؤوسه . فى شكل ١٤-٣ (ب) لدينا $d(A, F) = 2$ وقطر الشكل هو 3 . (مع أى الحافتين $\{A, D\}$ و $\{B, C\}$ رسمتا متقاطعتين فى الشكل ١٤-٣ (ب) فهما لا تتقابلان عند رأس) .

افرض أن v هى رأس فى شكل G . نعنى بـ $G - v$ الشكل الذى نحصل عليه من G بعد حذف v وجميع الحواف الساقطة عليها . الرأس v فى شكل متصل G يسمى نقطة قطع إذا كان $G - v$ غير متصل . الرأس D فى الشكل ١٤-٣ (ب) هو نقطة قطع .



شكل ١٤ ـ ٣

١٤ ـ ٥ أنواع خاصة من الأشكال

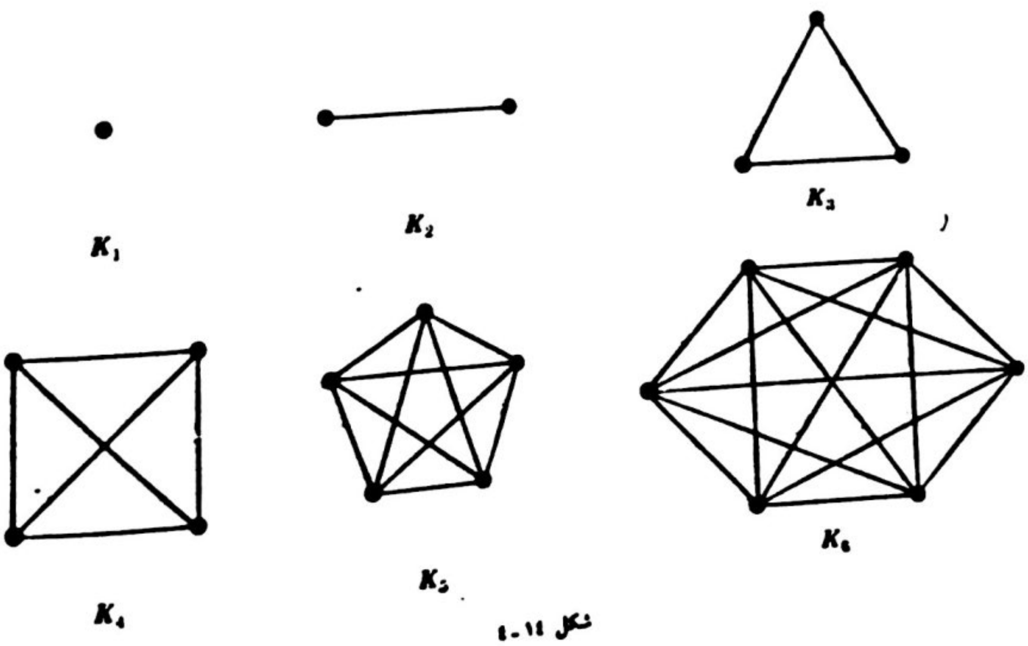
توجد أنواع مختلفة كثيرة من الأشكال ، نذكر هنا أربعة منها .

الأشكال الكاملة

يكون الشكل كاملا إذا كان كل رأس متصلا بكل رأس آخر . الشكل الكامل الذى له n من الرؤوس يرمز له بـ K_n . شكل ١٤ ـ ٤ يوضح الأشكال K_1 ، K_2 ، . . . . ، K_6 . الشكل K_1 ، وهو رأس معزول ، يسمى الشكل التافه .

الأشكال المنتظمة

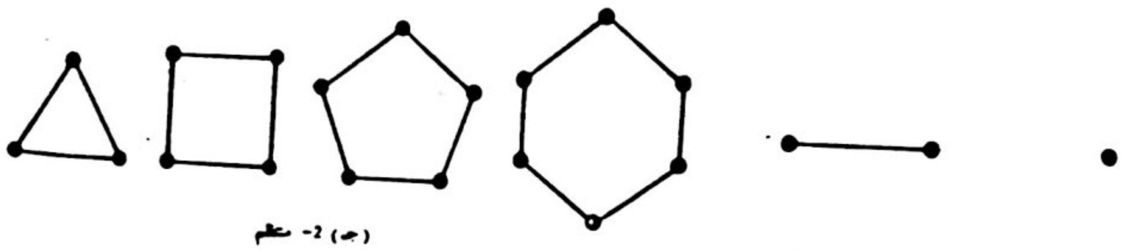
الشكل أو الشكل المتعدد يكون منتظماً من درجة k أو منتظم $-k$ إذا كان كل رأس من درجة k . الأشكال المنتظمة المتصلة من الدرجات 0 ، 1 أو 2 يمكن وصفها بسهولة . الشكل المتصل المنتظم -0 هو الشكل التافه . الشكل المتصل المنتظم -1 هو الشكل الذى له رأسان وحافة واحدة تصل بينهما . الشكل المتصل المنتظم -2 الذى له



شكل ١٤ ـ ٤

... n من الرؤوس هو الشكل المكون من طريق دائرى $-n$ واحد . (الطريق الدائرى -2 هو شكل متعدد .) أنظر الشكل ١٤ـ٥ .

الشكل المنتظم -3 يجب ، من نظرية ١٤ـ١ ، أن يحتوى على عدد زوجى من الرؤوس . الشكل ١٤ـ٦ ، يعطى مثالين للأشكال المتصلة المنتظمة -3 المحتوية على ستة رؤوس . بصفة عامة ، الأشكال المنتظمة يمكن أن تكون معقدة للغاية . فمثلا ، يوجد تسعة عشر شكلا منتظماً -3 لكل عشرة رؤوس . نذكر أن الشكل الكامل الذى له n من الرؤوس ، K_n ، هو منتظم من درجة $n - 1$.

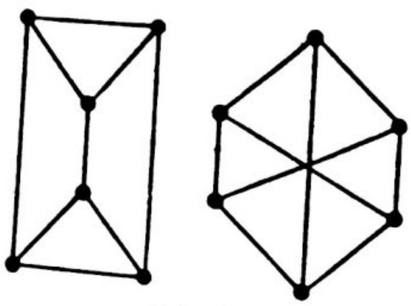


(جـ) $2-$ منتظم

(ب) $1-$ منتظم

(أ) $0-$ منتظم

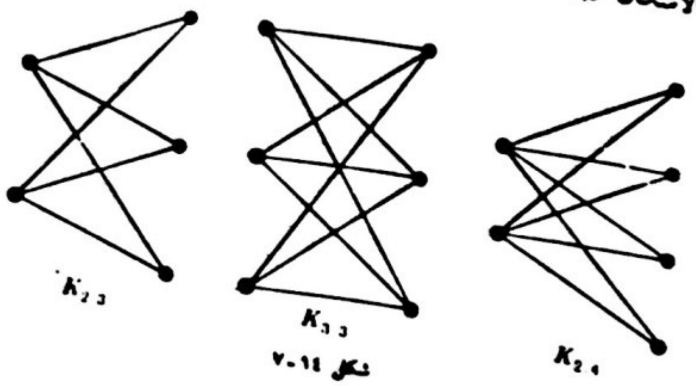
شكل ١٤ـ٥



شكل ١٤ـ٦

الأشكال ذات القسمين

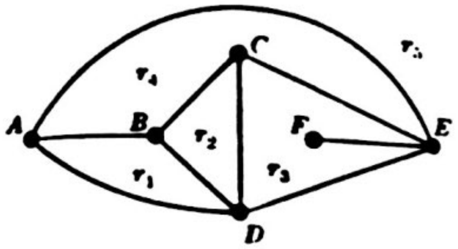
يقال أن الشكل G ذو قسمين إذا كانت فئة رؤوسه V يمكن تجزيئها الى فئتين جزئيتين M و N بحيث أن كل حافة من G تصل رأساً من M مع رأس من N . نعنى بالشكل الكامل ذى قسمين ، أن كل رأس فى M متصلة بكل رأس فى N ، هذا الشكل يرمز له بـ $K_{m,n}$ ، حيث m عدد الرؤوس فى M و n عدد الرؤوس فى N ، وللانضباط ، نأخذ $m \le n$. الشكل ١٤ـ٧ يوضح الأشكال $K_{2,3}$ ، $K_{3,3}$ ، $K_{2,4}$. واضح أن $K_{m,n}$ له mn حافة .



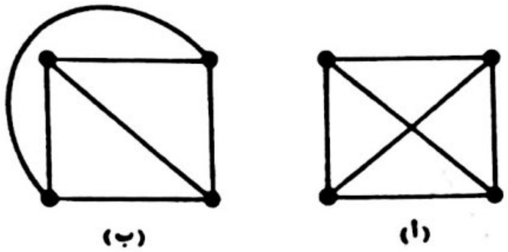
شكل ١٤ـ٧

الأشكال المستوية

الشكل أو الشكل المتعدد الذى يمكن رسمه فى مستوى وحوافه لا تتقاطع ، يقال إنه شكل مستو . مع أن الشكل الكامل الذى له أربعة رؤوس ، K_4 ، يرسم عادة بحواف متقاطعة كما فى الشكل ١٤ ـ ٨ (أ) ، فإنه يمكن رسمه أيضاً بدون تقاطع الحواف ، كما فى الشكل ١٤ ـ ٨ (ب) وبالتالى K_4 هو شكل مستو .



شكل ١٤ ـ ٩



شكل ١٤ ـ ٨

أى تمثيل مستو خاص لشكل متعدد مستو محدود يسمى خريطة . نقول إن الخريطة متصلة إذا كان الشكل المتعدد المعطى متصلا . أى خريطة معطاه تقسم المستوى الى مناطق متعددة . فمثلا الخريطة فى شكل ١٤ ـ ٩ تقسم المستوى الى خمس مناطق . لاحظ أن أربعاً من المناطق محدودة ، لكن المنطقة الخامسة ، خارج المخطط ، غير محدودة . وبالتالى يمكننا عامة احصاء عدد المناطق إذا اعتبرنا أن الخريطة محتواة فى مستطيل كبير بدلاً من المستوى بأكمله .

أعطى أويلر صيغة تربط عدد الرؤوس V وعدد الحواف E وعدد المناطق R لأى خريطة متصلة .

نظرية ١٤ ـ ٣ (أويلر) : $V - E + R = 2$

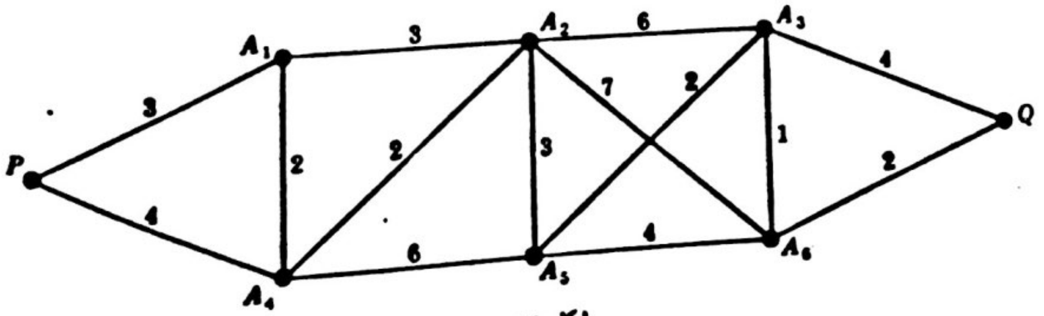
مثال ١٤ ـ ٤ فى الشكل ١٤ ـ ٩ لدينا $V = 6$ ، $E = 9$ ، $R = 5$ ، وذلك يتفق مع صيغة أويلر

$$V - E + R = 6 - 9 + 5 = 2$$

صيغة أويلر تنطبق أيضاً على الخرائط غير المتصلة إذا ما أبدلنا $1 + v$ بالثابت 2 ، حيث v هى عدد المركبات المتصلة فى الخريطة .

١٤ ـ ٦ الأشكال المميزة

يسمى الشكل G شكلا مميزاً إذا كانت حوافه و/أو رؤوسه مخصص لها بيانات من نوع أو آخر . بصفة خاصة ، إذا كانت كل حافة e فى G مخصص لها عدد غير سالب $l(e)$ فإن $l(e)$ يسمى وزن أو طول e . الشكل ١٤ ـ ١٠ يوضح



شكل ١٤ ـ ١٠

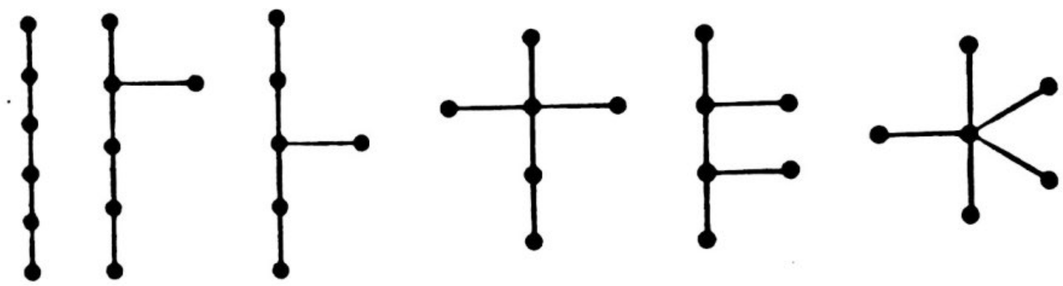
شكلا مميزاً حيث وزن كل حافة موضح بالطريقة المعتادة . فى الغالب يكون من المهم إيجاد مسار له أقل وزن بين راسين معطيين من شكل مميز . مسار ذات أقل وزن بين P و Q فى الشكل ١٤ ـ ١٠ يعطى بالمتابعة

$$(P, A_1, A_2, A_5, A_3, A_6, Q)$$

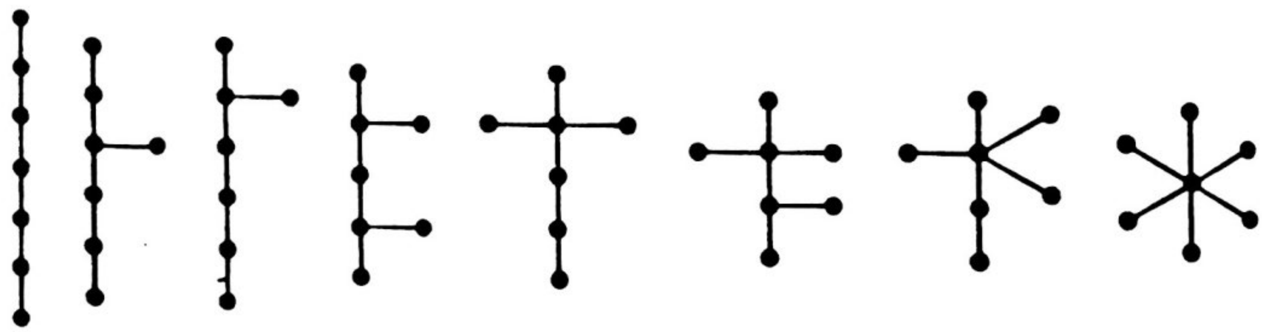
وهوله الوزن 14 (أوجد مسارا اخر ذا أقل وزن بين نفس الراسين) .

١٤ـ٧ أشكال الشجرة

يقال أن الشكل G بدون طرق دائرية أو خال من الطرق الدائرية إذا لم يحتو على أى طرق دائرية . الشجرة هى شكل متصل بدون طرق دائرية . الغابة هى شكل بدون طرق دائرية ؛ وبالتالى المركبات المتصلة للغابة هى أشجار . الشكل ١٤ ـ ١١ (أ) يوضح جميع الأشجار ذات الرؤوس الستة . والشكل ١٤ ـ ١١ (ب) يوضح ثمانية من الأشجار ذات الرؤوس السبعة .



(أ)



(ب)

شكل ١٤ـ١١

يوجد عدد من الطرق المكافئة لتعريف الشجرة ، كما هو موضح بالنظرية التالية .

نظرية ١٤ ـ ٤ : ليكن G شكلا له أكثر من رأس واحد . التعريفات التالية متكافئة :

(i) G ، هو شجرة .

(ii) كل زوج من الرؤوس متصل بمسار واحد فقط .

(iii) G متصل ، ولكن إذا حذفت أى حافة فإن الشكل الناتج يكون غير متصل .

(iv) G خال من الطرق الدائرية ، ولكن إذا أضيفت أى حافة للشكل فإن الشكل الناتج يحوى طريقاً دائرياً واحداً .

فى حالة ما تكون الأشكال محدودة ، يكون لدينا طرق اضافية لتعريف الشجرة .

نظرية ١٤ـ٥ : ليكن G شكلا محدوداً له $n > 1$ من الرؤوس . التعريفات التالية متكافئة :

(i) G هو شجرة .

(ii) G خال من الطرق الدائرية وله $n - 1$ حافة .

(ii) G متصل وله $n - 1$ حافة .

بصفة خاصة ، النظرية ١٤ـ٥ تخبرنا أن الشجرة المحدودة لها رأس واحد ، أكثر من حوافها . (هذا ينطبق أيضاً على الشجرة التافهة ، $n = 1$) .

بعض الخواص العامة للأشجار هى :

(١) الشجرة هى شكل ذو قسمين .

(٢) الشجرة هى شكل مستو .

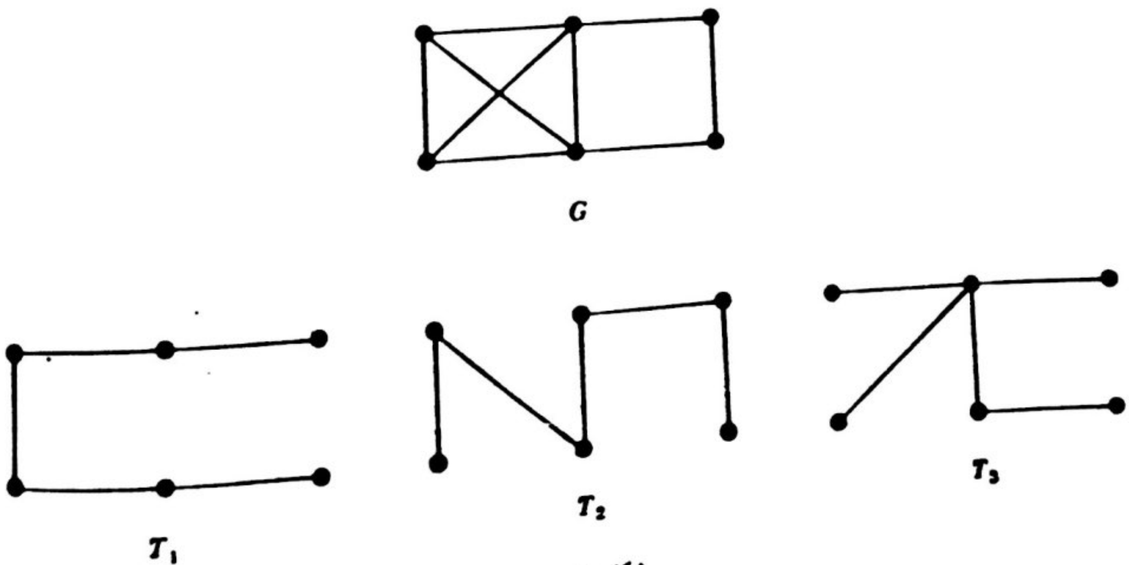
(٣) الشجرة المحدودة غير التافهة لها على الأقل نقطتا نهاية (رأسان من درجة ١) .

(٤) فى الشجرة غير التافهة ، كل رأس هو نقطة نهاية أو نقطة قطع .

الأشجار المنشئة

الشكل الجزئى T من الشكل G يسمى شجرة منشئة لـ G إذا كانت T شجرة و T تحوى جميع رؤوس G . الشكل ١٤ـ١٢ يوضح شكلا G وأشجاراً منشئة T_1 ، T_2 ، T_3 لـ G . إذا كان G شكلا حوافه لها أوزان ، فإن أى شجرة منشئة صغرى لـ G هى شجرة منشئة لـ G بحيث أن مجموع أوزان حوافها يكون أصغر ما يمكن بين جميع الأشجار المنشئة لـ G .

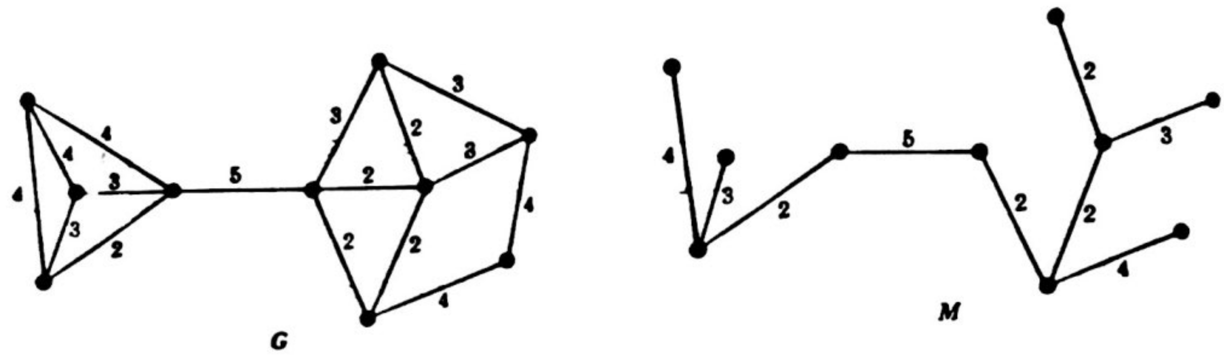
نعطى نظامين حسابين لإيجاد شجرة منشئة صغرى لشكل G مميز ومتصل ومحدود وله m من الرؤوس . أولا ، رتب حواف G ترتيباً تناقصياً بالنسبة للأوزان . نفذ بتتابع ، حذف كل حافة لا تجعل الشكل غير متصل حتى تبقى $m - 1$ حافة . هذه الحواف سوف تكون شجرة منشئة صغرى لـ G . هذا النظام الحسابى يعتمد على معرفة ما إذا كان الشكل متصلا أم لا ، وهذا بصفة عامة ليس من السهل برمجته .



شكل ١٤ـ١٢

أما فى النظام الحسابى الثانى ، فترتب الحواف ترتيباً تصاعدياً بالنسبة للأوزان . ثم بالبدء فقط برؤوس G ، نضيف حافة بعد أخرى حيث كل حافة لها أقل وزن ولا تكون أى طريق دائرى . بعد إضافة $m-1$ من الحواف نحصل على أصغر شجرة منشئة صغرى .

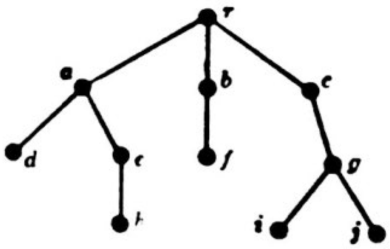
نظراً لأن بعض الحواف يمكن أن يكون لها نفس الوزن ، فنؤكد أنه يمكننا الحصول على أشجار منشئة صغرى مختلفة . الشكل ١٤ ـ ١٣ يعطى شكلا متصلا مميزاً G وشجرة منشئة صغرى M .



شكل ١٤ ـ ١٣

١٤ ـ ٨ الأشجار المتشعبة (المتفرعة)

الشجرة المتشعبة (المتفرعة) R تتكون من شكل شجرة مع رأس معين r يسمى أصل الشجرة . طول المسار الوحيد من الأصل r الى أى رأس v يسمى مستوى أو عمق أو جيل v . نقط الانتهاء فى R (باستثناء r إذا كانت نقطة انتهاء) تسمى أوراق الشجرة المتشعبة . شكل ١٤ ـ ١٤ يوضح شجرة متشعبة حيث الأصل r رسم فى قمة الشجرة . الشجرة بها خمس أوراق d ، f ، h ، i و j . مستوى a هو 1 ، مستوى f هو 2 ومستوى j هو 3 . نؤكد أن أى شجرة يمكن جعلها شجرة متشعبة باختيار أى واحد من الرؤوس كأصل .



شكل ١٤ ـ ١٤

الحقيقة أنه يوجد مسار واحد من الأصل الى أى رأس فى R تعطى اتجاهاً لحواف R . المسار الموجه المستمر من الأصل r الى ورقة يسمى فرعاً من R . سوف نقول إن الرأس u يسبق الرأس v أو أن v يلى u ، إذا كان المسار من الأصل r الى v يحتوى على u . بصفة خاصة نقول ان v يلى u مباشرة إذا كان v يلى u ومجاوراً له فى الشكل ١٤ ـ ١٤ ، الرأس j يلى c ، لكن يلى g مباشرة . لاحظ أن كل رأس غير الأصل r يلى مباشرة رأساً واحداً ولكن يمكن أن يليه مباشرة أكثر من رأس واحد ، فمثلا الرأسان i و j كلاهما يلى g مباشرة .

الأشجار المتشعبة المرتبة

الشجرة المتشعبة R ، التى بها الحواف التى تترك كل رأس مرتبة خطياً ، تسمى شجرة متشعبة مرتبة . افرض أن e و e' حافتان فى R تتركان الرأس v ، متجهتين الى الرأسين a و b ، على الترتيب . إذا كانت e تسبق e' فى ترتيب R ، فإننا نرسم e على يسار e' ، كما فى الشكل ١٤ ـ ١٥ ، ونخصص نفس ترتيب الحافتين e و e' للرأسين a و b ، أى أن a تسبق b . (تذكر أن هذا الترتيب لرؤوس R ليس له أى ارتباط مع الترتيب بالفروع الموضح سابقاً) .

الأشجار المتشعبة المرتبة تظهر فى مواضع كثيرة فى علوم الحاسب والمعلومات ، كما هو موضح فى المثالين التاليين .

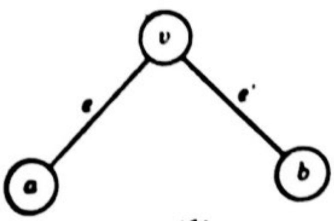
مثال ١٤ ـ ٥ (التعبيرات الحسابية) : أى تعبير جبرى متضمناً عمليات ثنائية ، مثلا ، الجمع ، الطرح ، الضرب ، والقسمة ، يمكن تمثيله بشجرة متشعبة مرتبة . فمثلا التعبير الحسابى

$$(a - b)/((c \times d) + e)$$

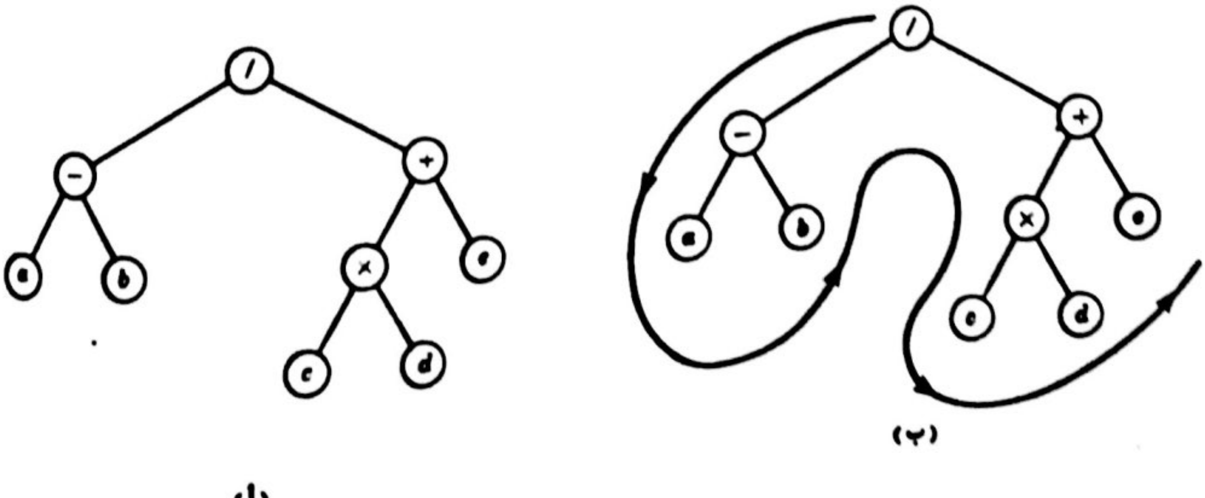
يمكن تمثيله بالشجرة المتشعبة المرتبة فى الشكل ١٤ ـ ١٦ (أ) . لاحظ أن المتغيرات فى التعبير ، a ، b ، c ، d ، e ، تظهر كأوراق ، والعمليات تظهر كالرؤوس الأخرى . الشجرة يجب أن ترتيب $a - b$ أما $b - a$ فيعطى نفس الشجرة ولكن ليس نفس الشجرة المرتبة .

الرياضى البولندى لوكاسيفتش لاحظ أنه بوضع رمز العملية الثنائية قبل عنصريها فمثلا ،

$+ab$ بدلا من $a + b$ و $/cd$ بدلا من c/d



شكل ١٤ ـ ١٥



(ب)

(أ)

شكل ١٤ ـ ١٦

يمكن تجنب استخدام الأقواس . هذه الرمزية تسمى الرمزية البولندية فى الصورة المحددة مقدماً . (بالمثل يمكن وضع الرمز بعد العنصرين ، وتسمى الرمزية البولندية فى الصورة المحددة مؤخراً) . باعادة كتابة التعبير الحسابى السابق فى الصورة المحددة مقدماً ، نحصل على

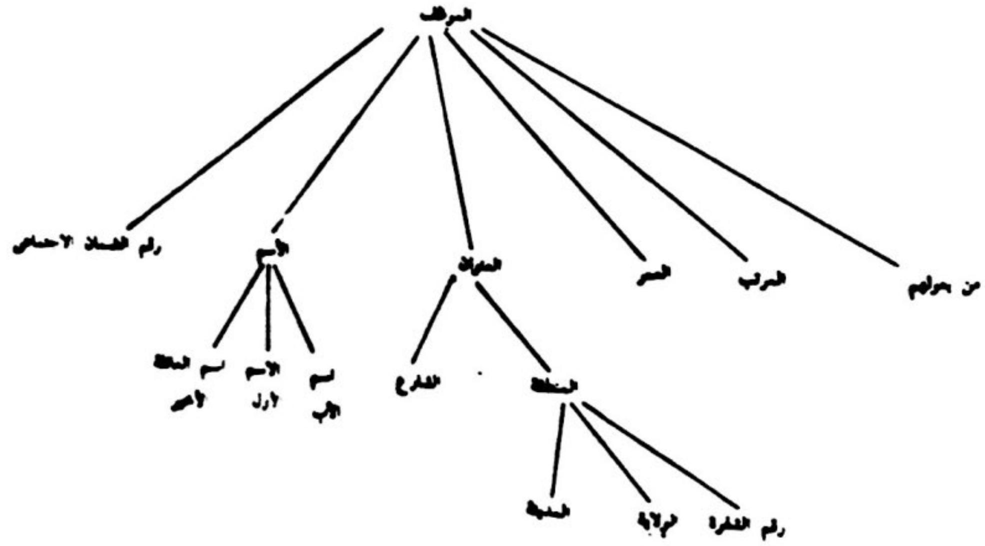
$$/ - a b + \times c d e$$

لاحظ أن هذا بالضبط هو ترتيب الرؤوس عند مسح الشجرة كما هو موضح فى الشكل ١٤-١٦ (ب) .

مثال ١٤-٦ (بناء السجل) . غالباً ماترتب البيانات كمسلسل من المجالات والسجلات والملفات ، كما يلى . السجل هو تجمع من عناصر بيانات ، مرتبطة ببعضها ، تسمى أيضاً مجالات ، تعالج كوحدة ؛ والملف هو تجمع من السجلات المتشابهة . فمثلا السجل الشخصى لموظف يمكن أن يحتوى على عناصر البيانات :

رقم الضمان الاجتماعى ، الاسم ، العنوان ، العمر ، المرتب ، من يعولهم ملف موظفى الشركة يحتوى على قائمة سجلات الموظفين .

مع أن الملف يكون فى العادة قائمة خطية من السجلات ، فإن عناصر البيانات فى السجل فى العادة تكون شجرة متشعبة مرتبة . والسبب هو أن بعض عناصر البيانات قد تكون عناصر مجمعة ، أى عناصر تتكون من اثنين أو أكثر من العناصر الجزئية ، بدلا من عناصر أولية أى لا يمكن تجزئتها . فمثلا السجل الشخصى السابق ، للموظف ، يمكن أن يكون الشجرة المتشعبة المرتبة الموضحة فى الشكل ١٤-١٧ . لاحظ أن الاسم هو عنصر مجمع ، حيث العناصر الجزئية هى الأخير (اسم العائلة) ، الإسم و MI (الاسم الأول الأوسط) (اسم الأب) . أيضاً ، العنوان هو عنصر مجمع ، حيث العناصر الجزئية هى عنوان الشارع وعنوان المنطقة ، حيث المنطقة بها عنصر مجمع له العناصر الجزئية المدينة ، الولاية ورقم الشفرة Zip . يوجد إحدى عشر عنصراً أولياً هى أوراق الشجرة .



شكل ١٤-١٧

الشجرة المتشعبة المرتبة السابقة يمكن وصفها أيضاً بدلالة مستويات الرؤوس :

00 الموظف
01 رقم الضمان الاجتماعى
01 الاسم
02 الأخير (اسم العائلة)
02 الاسم الأول
02 اسم الأب
01 العنوان
02 الشارع
02 المنطقة
03 المدينة
03 الولاية
03 رقم الشفرة Zip
01 العمر
01 المرتب
01 من يعولهم

هذا السرد يكافىء مسح الشجرة بالطريقة الموضحة فى الشكل ١٤ـ١٦ (ب) ؛ والذى بواسطته ، يمكننا قراءة السجل بأكمله ، للحاسب ، بطريقة خطية .

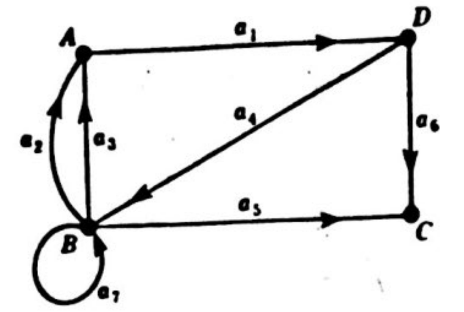
١٤ـ٩ الأشكال الموجهة

لقد رأينا فى البند ١٤ـ٨ ، أن الأشجار المتشعبة لها اتجاه طبيعى معرف على كل حافة وبالتالى يمكن اعتبارها أشكالا موجهة . بصفة عامة ، الشكل الموجه هو شكل متعدد مع اتجاه مخصص لكل حافة . تسمى الحواف الموجهة أقواساً ، ونكتب $a = \langle u, v \rangle$ لأى واحد من الأقواس التى تربط نقطة البداية u بنقطة النهاية v .

مثال ١٤ـ٧ الشكل ١٤ـ١٨ يمثل شكلا موجهاً له أربعة رؤوس وسبعة أقواس . لاحظ الحلقة الموجهة ، $a_7 = \langle B, B \rangle$. الأقواس مثل a_2 و a_3 ، التى لها نفس نقطة البداية ونفس نقطة النهاية يقال أنها متوازية .

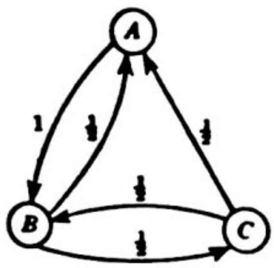
افرض أن D شكل موجه . يقال ان القوس $a = \langle u, v \rangle$ يبدأ عند نقطة البداية له u وينتهى عند نقطة النهاية له v . درجة الخارج ودرجة الداخل لرأس v تساوى عدد الأقواس التى تبدأ وعدد الأقواس التى تنتهى عند v على الترتيب . حيث أن كل قوس يبدأ وينتهى عند رأس ، فاننا نرى أن مجموع درجات الخارج للرؤوس يساوى مجموع درجات الداخل لها ؛ والذى يساوى عدد الأقواس . الرأس الذى درجة الداخل له صفر يسمى منبعاً ، والرأس الذى درجة الخارج له صفر يسمى مهبطاً . فى الشكل ١٤ـ١٨ ، الرأس C مهبط ، ولكن الشكل الموجه ليس له منابع . أيضاً درجة الخارج لـ D هى 2 ودرجة الداخل له 1 .

إذا كانت الأقواس و/أو الرؤوس للشكل الموجه مميزة بنوع من البيانات ، فإنه يكون لدينا شكل موجه مميز . مثل هذه الأشكال تستخدم فى تصوير الحالات الدينامكية . فمثلا ، الخرائط التوضيحية هى أشكال موجهة بها الرؤوس (الأشكال الرمزية) مميزة ، والأقواس من الأشكال الرمزية الخاصة بالقرارات مميزة . فيما يلى مثال آخر .



شكل ١٤ - ١٨

مثال ١٤ - ٨ ثلاثة أولاد A ، B ، C ، يرمون كرة فيما بينهم بحيث أن A دائماً يرمى الكرة لـ B ، ولكن B و C ، لهما أن يرميا الكرة لـ A كما لهما أن يرميا الكرة لبعضهما . الشكل ١٤ - ١٩ يوضح هذه الحالة الدينامكية ، حيث الأقواس ميزت بالاحتمالات المناظرة ، أى أن A يرمى الكرة لـ B باحتمال 1 ، B يرمى الكرة لكل من A و C باحتمال $\frac{1}{2}$ ، و C يرمى الكرة لكل من A ، B باحتمال $\frac{1}{2}$.



شكل ١٤ - ١٩

الأشكال الموجهة والعلاقات

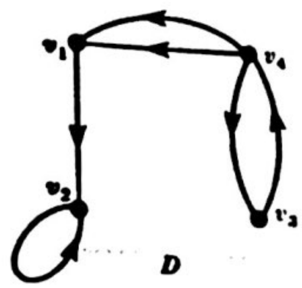
اعتبر الشكل الموجه D والذى لا يحتوى على أقواس متوازية ؛ افرض أن V هى فئة رؤوسه و A هى فئة أقواسه . حيث أن الأقواس تمثل أزواجاً مرتبة مختلفة من الرؤوس ، فإن A هى فئة جزئية من $V \times V$ وبالتالى A هى علاقة على V . وبالعكس ، إذا كانت R هى علاقة على فئة V ، فإن V يمكن أخذها كفئة الرؤوس و R كفئة الأقواس لشكل موجه ، $D(V, R)$ ، لا يحوى أقواساً متوازية . وبالتالى مفاهيم العلاقات على الفئات ، والأشكال الموجهة بدون أقواس هى نفسها . فى الواقع أننا فى الفصل السادس تعرفنا على الشكل الموجه المناظر لعلاقة على فئة .

الأشكال الموجهة والمصفوفات

ليكن D شكلا موجهاً رؤوسه هى v_1 ، v_2 ، ... ، v_m . مصفوفة D هى المصفوفة $m \times m$ ، $M_D = (m_{ij})$ ، حيث

m_{ij} = عدد الأقواس التى تبدأ عند v_i وتنتهى عند v_j

إذا كان D ليس به أقواس متوازية ، فإن عناصر M_D ستكون صفراً وواحداً ؛ فى الحالات الأخرى العناصر ستكون أعداداً صحيحة غير سالبة . بالعكس ، كل مصفوفة M من النوع $m \times m$ ، حيث العناصر أعداداً صحيحة غير سالبة ، تعرف شكلا موجهاً وحيداً له m من الرؤوس . الشكل ١٤ - ٢٠ يوضح شكلا موجهاً D والمصفوفة المناظرة M .



شكل ١٤ - ٢٠

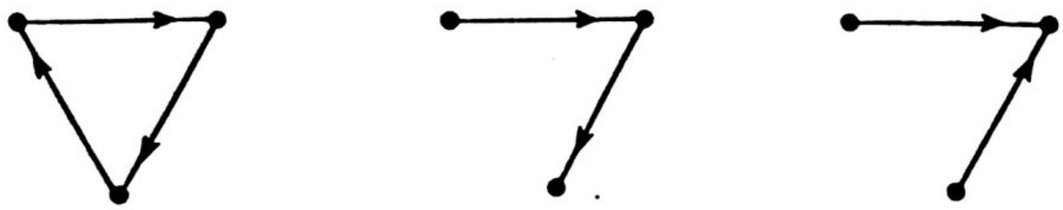
١٤ - ١٠ الأشكال الموجهة المتصلة

تنطبق هنا أيضاً مفاهيم الطريق ، الممر ، المسار والطريق الدائرى للأشكال غير الموجهة ما عدا أن اتجاه الطريق ، . . . الخ ، يجب أن تتفق مع اتجاهات الأقواس . أكثر تخصيصاً الطريق (الموجه) W فى شكل موجه D هو متابعة تبادلية من الرؤوس والأقواس

$$W = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, v_n)$$

بحيث أن كل قوس a_i يبدأ عند v_{i-1} وينتهى v_i شبه الطريق هو مثل الطريق ماعدا أن القوس a_i قد يبدأ عند أى من v_{i-1} أو v_i وينتهى عند الرأس الآخر ، بعبارة أخرى شبه الطريق هو نفسه طريق فى الشكل المتعدد غير الموجه D . شبه الممر وشبه المسار لهما تعريف مشابه .

توجد ثلاثة أنواع من اتصال فى الشكل الموجه D . نقول إن D ضعيف الاتصال أو ضعيف إذا كان يوجد شبه مسار بين أى رأسين u و v فى D . نقول إن D متصل فى اتجاه واحد أو أحادى الاتجاه إذا كان ، لأى رأسين u و v من D ، يوجد اما مسار من u إلى v أو مسار من v الى u . نقول إن D قوى الاتصال أو قوى ، إذا كان لأى رأسين u و v من D ، يوجد مسار من u و v وآخر من v إلى u . لاحظ أن الاتصال القوى يحتم الاتصال فى اتجاه واحد ، وأن الإتصال فى اتجاه واحد يحتم الاتصال الضعيف . نقول إن D أحادى الاتجاه فقط إذا كان أحادى الاتجاه وليس قويا ، ونقول إن D ضعيف فقط إذا كان ضعيفا ولكن ليس احادى الاتجاه . فمثلا ، الشكل ١٤ - ٢١ يوضح شكلا (أ) ضعيفا فقط ، وشكلا (ب) أحادى الاتجاه فقط وشكلا (جـ) قوياً .



شكل ١٤ - ٢١

بدلالة الطرق المنشئة (الطرق التى تحوى جميع رؤوس شكل موجه) ، يمكن تمييز الاتصال كما يلى :

نظرية ١٤ - ٦ : اذا كان D شكلا موجها محدودا ، فإن

(أ) D يكون ضعيفا إذا وفقط إذا كان D له شبه طريق منشىء .

(ب) D يكون أحادى الاتجاه إذا وفقط إذا كان D له طريق منشىء .

(جـ) D يكون قويا إذا وفقط إذا كان D له طريق منشىء مغلق .

المصفوفة M للشكل الموجه D مفيدة فى عدد الطرق فى D . فى الواقع لدينا :

نظرية ١٤ ـ ٧ : اذا كانت M هى مصفوفة الشكل الموجه D ، فان العنصر (i,j) فى المصفوفة M^n يعطى عدد الطرق ذات الطول n من الرأس v_i الى الرأس v_j .

الأشكال المتعددة التى لها منابع ومهابط تظهر فى كثير من التطبيقات (مثلا ، مخططات التدفق) . شرط كاف لوجود مثل هذه الرؤوس هو كمايلى :

نظرية ١٤ ـ ٨ : اذا كان شكل متعدد محدود D لايحتوى على طرق دائرية (موجهة) ، فإن D يحوى على الأقل منبع واحد ، وعلى الأقل مهبط واحد .

١٤ ـ ١١ الآلات ذات الحالات المحدودة

يمكننا اعتبار الحاسب الرقمى كآلة فى « حالة داخلية » معينة فى أى لحظة معطاه . الحاسب « يقرأ » رمزاً داخلا ، ثم « يطبع » رمزا خارجا ويغير « حالته » . رمز الخارج يعتمد فقط على رمز الداخل والحالة الداخلية للآلة ، والحالة الداخلية للآلة تعتمد فقط على الحالة السابقة للآلة والرمز الداخل السابق . عدد الحالات ورموز الداخل ورموز الخارج يفترض أنها محدودة . هذه الفكرة تصاغ فى التعريف التالى .

الآلة ذات الحالات المحدودة (أو الآلة كاملة التتابع) تتكون من خمسة أشياء :

(١) فئة محدودة A من رموز الداخل .

(٢) فئة محدودة S من الحالات الداخلية .

(٣) فئة محدودة Z من رموز الخارج .

(٤) دالة الحالة التالية f من $S\times A$ إلى S .

(٥) دالة الخارج g من $S\times A$ الى Z .

هذه الآلة M يرمز لها بـ $M=\langle A,S,Z,f,g\rangle$ ، عندما نريد توضيح أجزائها الخمسة . أحياناً نعطى أيضاً حالة ابتدائية q_0 فى S ، وبالتالى الآلة M تعرف بالسداسى $M=\langle A,S,Z,q,f,g\rangle$.

مثال ١٤ ـ ٩ التالى يعرف آلة ذات حالات محدودة لها رمزان للداخل ، ثلاث حالات داخلية وثلاثة رموز للخارج :

(١) $A=\{a,b\}$

(٢) $S=\{q_0,q_1,q_2\}$

(٣) $Z=\{x,y,z\}$

(٤) دالة الحالة التالية $f:S\times A\to S$ تعرف بـ

$$f(q_0,a)=q_1 \quad f(q_1,a)=q_2 \quad f(q_2,a)=q_0$$
$$f(q_0,b)=q_2 \quad f(q_1,b)=q_1 \quad f(q_2,b)=q_1$$

(٥) دالة الخارج $g:S\times A\to Z$ تعرف بـ

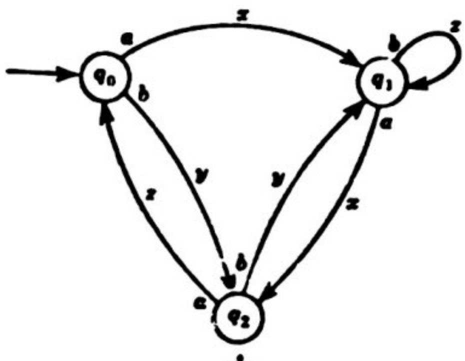
$$g(q_0,a)=x \quad g(q_1,a)=x \quad g(q_2,a)=z$$
$$g(q_0,b)=y \quad g(q_1,b)=z \quad g(q_2,b)=y$$

من المتعارف عليه استخدام الحرف q لحالة الآلة واستخدام الرمز q_0 للحالة الابتدائية .

توجد طريقتان لتمثيل آلة ذات حالات محدودة فى صورة مختصرة . مخطط الحالة D لآلة ذات حالات محدودة $M=\langle A,S,Z,f,g\rangle$ هو شكل موجه مميز D . رؤوس D هى الحالات S الخاصة بـ M ، واذا كان

$$g(q_i,a_j)=z_r \quad \text{و} \quad f(q_i,a_j)=q_k$$

فإنه يوجد قوس من q_i إلى q_k يميز بالزوج a_j و z_r عادة نضع رمز الداخل a_j بالقرب من قاعدة السهم الممثل للقوس (قرب q_i) والرمز الخارج Z_r بالقرب من منتصف السهم . فى حالة أن نعطى الحالة الابتدائية q_0 ، فإننا نميز الرأس q_0 برسم سهم إضافى إلى q_0 . فمثلا ، الشكل ١٤ ـ ١٢ (أ) هو مخطط الحالة للآلة فى المثال ١٤ ـ ٩ ، حيث q_0 هى الحالة الابتدائية .



(أ)

	a	b
q_0	q_1, x	q_2, y
q_1	q_2, x	q_1, z
q_2	q_0, z	q_1, y

(ب)

شكل ١٤ ـ ٢٢

بديلا لذلك ، الآلة يمكن أن تمثل بجدول الحالة لها ، والذى يعطى لكل تركيبة من الحالة والداخل ، الحالة التالية والخارج . الشكل ١٤ ـ ٢٢ (ب) هو جدول الحالة للآلة فى المثال ١٤ ـ ٩ .

١٤ ـ ١٢ السلاسل . شرائط الداخل والخارج

البند السابق لم يوضح النوعية الديناميكية للآلة . افرض أنه أدخل لآلة ذات حالات محدودة M سلسلة من رموز الداخل :

$$U=a_1a_2\ldots a_n$$

نتصور هذه الرموز على « شريط داخل » الآلة M « تقرأ » رموز الداخل هذه واحدا تلو الآخر وفى نفس الوقت تتغير تبعا لسلسلة الحالات

$$V=s_0s_1s_2\ldots s_n$$

حيث s_0 هى الحالة الابتدائية ، بينما هى « تطبع » سلسلة رموز الخارج

$$W=z_1z_2\ldots z_n$$

على « شريط خارج » الحالة الابتدائية s_0 وسلسلة الداخل U تحددان السلسلتين V و W بـ

$$z_i = g(s_{i-1}, a_i) \quad \text{و} \quad s_i = f(s_{i-1}, a_i)$$

حيث $i= 1,2,\ldots n$. (لاحظ أن كلمة « سلسلة » تستخدم لمتابعة محدودة بدلا من « المرتبات ـ n » أو « قائمة ») .

مثال ١٤ - ١٠ افرض أن q_0 هى الحالة الابتدائية للآلة فى المثال ١٤ - ٩ ، وافرض أنه أعطى للآلة سلسلة الداخل $abaab$. نحسب سلسلة الحالات وسلسلة رموز الخارج من مخطط الحالة بالابتداء عند الرأس q_0 وتتبع الأسهم المميزة برموز الداخل :

$$q_0 \xrightarrow{a,x} q_1 \xrightarrow{b,z} q_1 \xrightarrow{a,x} q_2 \xrightarrow{a,z} q_0 \xrightarrow{b,y} q_2$$

هذا يعطى السلسلتين التاليتين للحالات ولرموز الخارج :

$$xzxzy \text{ و } q_0q_1q_1q_2q_0q_2$$

نريد الآن شرح آلة يمكنها تنفيذ الجمع الثنائى . باضافة 0,s فى بداية الأعداد ، يمكننا التأكد أن الأعداد لها نفس العدد من الأرقام . إذا أعطيت الآلة الداخل

$$\begin{array}{r} 1101011 \\ +0111011 \\ \hline \end{array}$$

فإننا نريد أن يكون الخارج هو المجموع الثنائى

$$10100110$$

أكثر تحديداً ، الداخل هو السلسلة من أزواج الأرقام لتجمع :

$$11,\ 11,\ 00,\ 11,\ 01,\ 11,\ 10,\ b$$

حيث b ترمز إلى أماكن خالية ، والخارج يجب أن يكون السلسلة

$$0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1$$

نريد أيضاً أن تسجل الآلة حالة تسمى « قف » عندما تنتهى الجمع .
رموز الداخل هى

$$A = \{00,\ 01,\ 10,\ 11,\ b\}$$

ورموز الخارج هى

$$Z = \{0,1,b\}$$

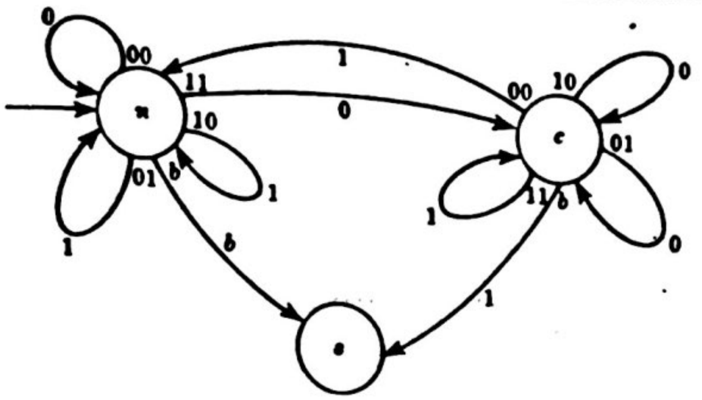
الآلة التى « نكونها » سيكون لها الحالات الثلاث :

S= { رحل (c) ، لاترحل (n) قف (s) }

هنا n هى الحالة الابتدائية . الآلة مخططة فى الشكل ١٤ - ٢٣ .
لتوضيح عجز هذه الآلات ، نصيغ النظرية التالية .

نظرية ١٤ - ٩ : لاتوجد الآلات ذات حالات محدودة يمكنها إجراء الضرب الثنائى .

ولكن ، إذا حددنا حجم الأعداد المراد ضربها ، فإنه توجد مثل هذه الآلات الحاسبات هى أمثلة هامة للآلات ذات الحالات المحدودة التى تضرب الأعداد المحدودة .



شكل ١٤ - ٢٣

١٤ - ١٣ الآليات المحدودة

الآلية المحدودة تشبه الآلة ذات الحالات المحدودة عدا أن الآلية المحدودة لها الحالتان « مقبول » و « مرفوض » بدلا من الخارج . أكثر تخصيصاً ، الآلية المحدودة M تتكون من خمسة أشياء :

(١) فئة محدودة A من رموز الداخل .

(٢) فئة محدودة S من الحالات الداخلية .

(٣) فئة جزئية T من S (عناصرها تسمى حالات قبول) .

(٤) حالة ابتدائية q_0 فى S .

(٥) دالة الحالة التالية f من $S \times A$ إلى S .

الآلية المحدودة M يرمز لها بالرمز $M=\langle A,S,T,q_0,f \rangle$ عندما نريد توضيح الأجزاء الخمسة .

مثال ١٤ - ١١ مايلى يعرف آلية محدودة لهما رمزان للداخل وثلاث حالات :

(١) $A=\{a,b\}$ رمزا الداخل .

(٢) $S=\{q_0,q_1,q_2\}$ الحالات .

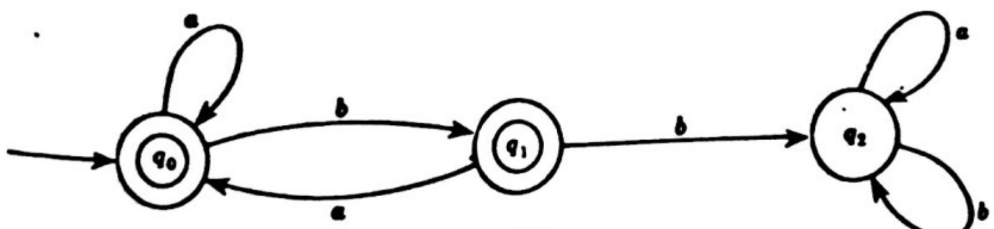
(٣) $T=\{q_0,q_1\}$ حالتا القبول .

(٤) q_0 هى الحالة الابتدائية .

(٥) دالة الحالة التالية $f:S\times A \rightarrow S$ تعطى بالجدول على اليسار

	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_2	q_2

يمكننا وصف الآلية المحدودة M بايجاز بواسطة مخطط الحالة كما عملنا مع الآلات ذات الحالات المحدودة ، ماعدا أننا نستخدم هنا دوائر مزدوجة لحالات القبول ، وكل حافة تميز فقط برمز الداخل . أكثر تحديداً ، مخطط الحالة D لـ M هو شكل موجه مميز رؤوسه هى حالات S ، حالات القبول تميز بوضع دائرة مزدوجة ، وإذا كان $f(q_j,a_i)=q_k$ ، فإنه يوجد قوس من q_j إلى q_k يميز بـ a_i . أيضا ، الحالة الابتدائية q_0 يرمز لها بوضع سهم داخل للرأس q_0 . فمثلا ، مخطط الحالة للآلية M فى المثال ١٤ - ١١ معطى فى الشكل ١٤ - ٢٤ .



شكل ١٤ - ٢٤ .

إذا كانت $W=a_1a_2a_3...a_n$ سلسلة محدودة من رموز الداخل لآلية محدودة M ، فإننا نحصل على متابعة من الحالات $s_0s_1s_2...s_n$ حيث s_0 هى الحالة الابتدائية و $s_i=f(s_{i-1},a_i)$ حيث $i>0$. نقول إن M تعترف بـ أو تقبل السلسلة W إذا كانت الحالة الأخيرة s_n ، هى حالة قبول ، أى إذا كانت $s_n \in T$ سوف نفرض أن $L(M)$ ترمز لفئة جميع السلاسل المعترف بها من M . فمثلا ، يمكن إثبات أن الآلية المحدودة M فى المثال ١٤ ـ ١١ سوف تعترف بالسلاسل التى لاتحوى اثنين b متتاليين .

الآليات كآلات ذات حالات محدودة

يمكننا أيضاً اعتبار الآلية المحدودة M كآلة ذات حالات محدودة لها رمزان للخارج ، وليكن ، نعم (YES) ولا (NO) ، حيث الخارج يكون نعم إذا كانت M تتحول إلى حالة قبول والخارج يكون لا إذا كانت M تتحول إلى حالة عدم قبول . بعبارة أخرى ، نجعل M ، آلة ذات حالات محدودة بتعريف دالة الخارج g من $S\times A$ إلى $Z=\{$ نعم ، لا $\}$ كما يلى :

$g(q_i,a_j)=\{$ نعم إذا كانت $f(q_i,a_j)$ حالة قبول (تنتمى إلى T)
لا إذا كانت $F(q_i,a_j)$ حالة رفض

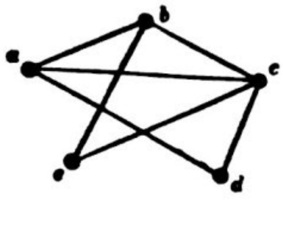
وبالعكس ، الآلة ذات الحالات المحدودة التى لها رمزان للخارج يمكن اعتبارها آلية محدودة بطريقة مشابهة .

مسائل محلولة

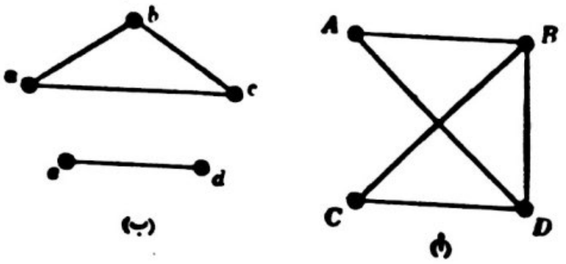
الأشكال ، الاتصال

١٤ ـ ١ ارسم مخطط الشكل G حيث : (أ) الرؤوس هى A,B,C,D والحواف هى $\{A,B\}$, $\{A,C\}$, $\{B,C\}$, $\{B,D\}$, $\{C,D\}$ (ب) الرؤوس هى a,b,c,d,e والحواف هى $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{d,e\}$. أى هذين الشكلين متصل ؟

لكل رأس v ارسم نقطة ، ولكل حافة $\{x,y\}$ ارسم منحنى بين الرأس x والرأس y كما هو موضح فى الشكل ١٤ ـ ٢٥ . الشكل (أ) متصل . ولكن الشكل (ب) غير متصل ، إذ لايوجد مثلا مسار من الرأس a إلى الرأس d .



شكل ١٤ ـ ٢٦



شكل ١٤ ـ ٢٥

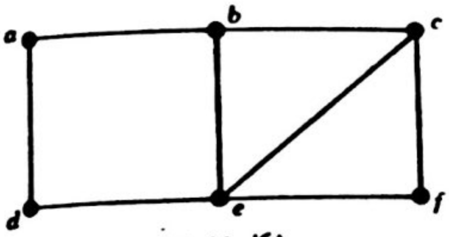
١٤-٢ اعتبر الشكل فى شكل ١٤-٢٦ . أوجد درجة كل رأس وحقق النظرية ١٤-١ لهذا الشكل .

درجة الرأس هى عدد الحواف التى تقع عليها الرأس ؛ فمثلا $\deg(a) = 3$ إذ أن a تنتمى الى الحواف الثلاث $\{a, b\}$ ، $\{a, c\}$ ، $\{a, d\}$. بالمثل $\deg(b) = 3$ ، $\deg(c) = 4$ ، $\deg(d) = 2$ ، $\deg(e) = 2$.

مجموع درجات الرؤوس هو $14 = 2 + 2 + 4 + 3 + 3$ ، وهذا فعلا يساوى ضعف عدد الحواف (2×7) .

١٤-٣ اعتبر الشكل فى شكل ١٤-٢٧ . أوجد (أ) جميع المسارات من الرأس a إلى الرأس f ، (ب) جميع الممرات من a الى f ، (جـ) المسافة بين a و f ، (د) قطر الشكل .

(أ) المسار من a إلى f هو طريق بحيث لا تتكرر الرؤوس وبالتالى لا تتكرر الحواف . يوجد سبعة من هذه المسارات :



(a, d, e, f) (a, b, c, f)
(a, d, e, b, c, f) (a, b, c, e, f)
(a, d, e, c, f) (a, b, e, f)
(a, b, e, c, f)

شكل ١٤-٢٧

(ب) الممر من a إلى f هو طريق بحيث لا تتكرر الحواف . يوجد تسعة من هذه الممرات ، المسارات السبعة من (أ) بالإضافة إلى

(a, d, e, b, c, e, f) و (a, d, e, c, b, e, f)

(جـ) المسافة من a إلى f هى 3 إذ يوجد مسار ، مثلا ، (a, b, c, f) ، من a إلى f له الطول 3 ولا يوجد مسار أقصر من ذلك من a إلى f .

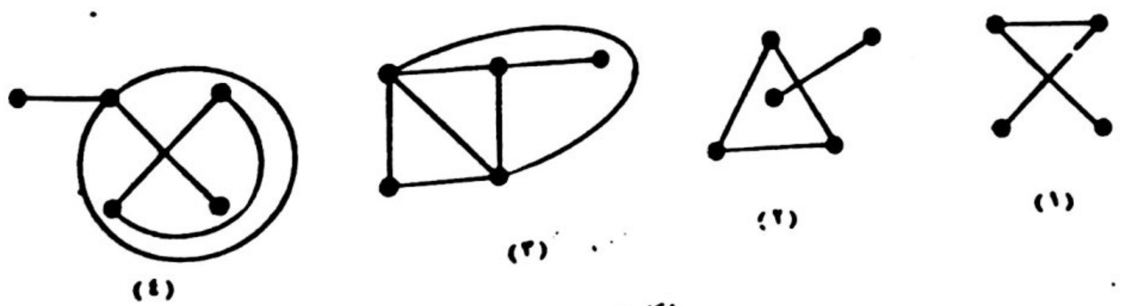
(د) المسافة بين أى رأسين ليست أكبر من 3 ، والمسافة بين a و f هى 3 ؛ وإذن قطر الشكل هو 3 .

١٤-٤ أى من الأشكال المتعددة فى شكل ١٤-٢٨ يكون (أ) متصلا ، (ب) ليس به حلقات ، (جـ) شكلا؟

(أ) فقط (i) و (ii) متصلان .

(ب) فقط (iv) به حلقة ، أى حافة لها نقطتا النهايتين واحدة .

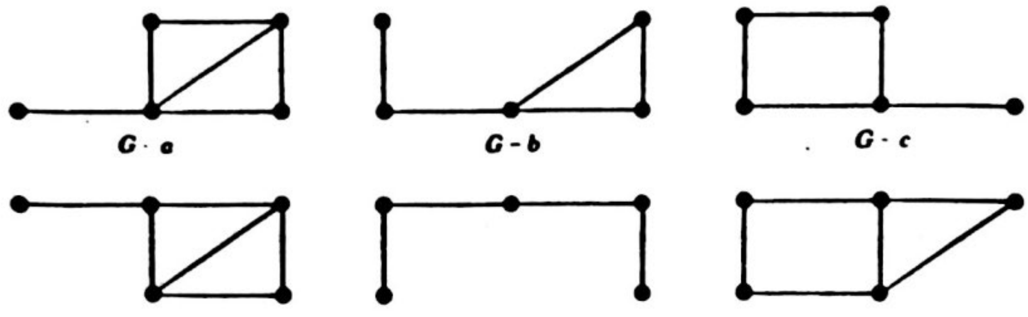
(جـ) فقط (i) و (ii) شكلان . الشكل المتعدد (iii) له حواف متعددة و (iv) له حواف متعددة وحلقة .



شكل ١٤-٢٨

١٤ـ٥ اعتبر الشكل G فى شكل ١٤ـ٢٧ (المسألة ١٤ـ٣) . أوجد الأشكال الجزئية التى نحصل عليها عند حذف كل رأس . هل الشكل به أى نقط قطع ؟

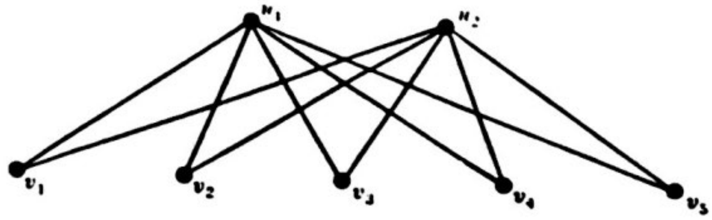
عندما نحذف رأساً من شكل ، فإننا أيضاً نحذف جميع الحواف الساقطة على الرأس . الأشكال الستة التى نحصل عليها بحذف كل رأس فى شكل ١٤ـ٢٧ موضحة فى الشكل ١٤ـ٢٩ . جميع الأشكال الستة متصلة ، وإذن لا يوجد رأس هو نقطة قطع .



شكل ١٤ـ٢٩

١٤ـ٦ ارسم الشكل $K_{2,5}$.

يتكون من سبعة رؤوس مجزأة إلى فئة M من رأسين ، مثلا u_1 و u_2 ، وفئة N من خمسة رؤوس ، مثلا v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، وجميع الحواف الممكنة من رأس u_i إلى رأس v_j . أنظر الشكل ١٤ـ٣٠ .

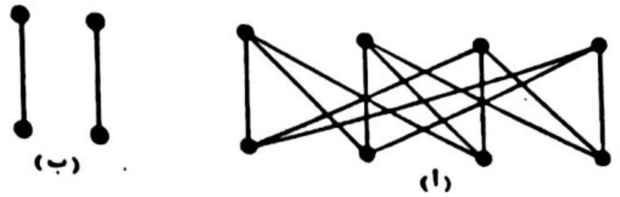


شكل ١٤ـ٣٠

١٤ـ٧ أى الأشكال المتصلة يكون منتظماً وذا قسمين ؟

الشكل ذو القسمين $K_{m,m}$ يكون متصلا ومنتظماً من درجة m ، إذ أن كل رأس متصل بـ m من الرؤوس الأخرى . إذا حذفت m من الحواف المنفصلة من $K_{m,m}$ ، فإن الشكل الناتج G_{m-1} يكون حتماً ذا قسمين ومنتظماً من درجة $m - 1$ ، ولكن ليس من الضرورى متصلا . فمثلا ، الشكل الجزئى من $K_{4,4}$ الموضح فى شكل ١٤ـ٣١ (أ) هو منتظم ـ 3 ومتصل ، بينما الشكل الجزئى من $K_{2,2}$ فى شكل ١٤ـ٣١ (ب) هو منتظم ـ 1 وغير متصل . فى أية حالة ، المركبات المتصلة لـ G_{m-1} لها جميع الخواص المرجوه .

يمكننا إكمال العملية بحذف m من الحواف المنفصلة من G_{m-1} فنتتج مركبات متصلة ذات قسمين ، ومنتظمة من درجة $m - 2$. وهكذا .



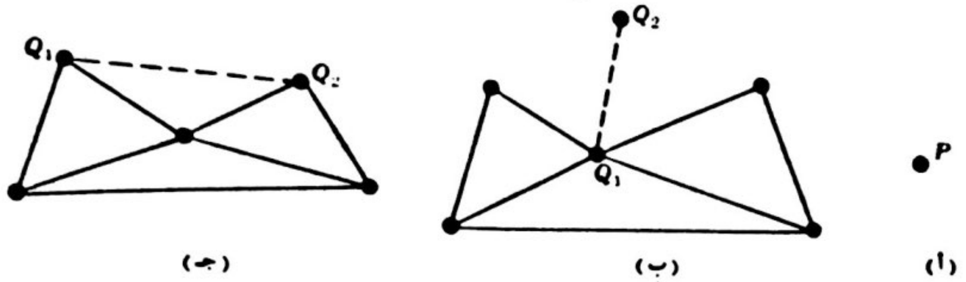
شكل ١٤-٣١

١٤-٨ أثبت النظرية ١٤-٣ .

إذا كانت الخريطة المتصلة M تتكون من رأس واحد P كما فى الشكل ١٤-٣٢ (أ) فإن $V = 1$ و $E = 0$. وتوجد منطقة واحدة ، أى أن $R = 1$. وبالتالى فى هذه الحالة $V - E + R = 2$. فى الحالات الأخرى M يمكن بناؤها من رأس واحدة بالتركيبين التاليين :

(١) أضف رأساً جديداً Q_2 وأوصله برأس موجود Q_1 بحافة لا تقطع أى حافة أخرى موجودة ، كما فى الشكل ١٤-٣٢ (ب) .

(٢) صل رأسين موجودين Q_1 و Q_2 بحافة لا تقطع أى حافة موجودة ، كما فى الشكل ١٤-٣٢ (جـ) .



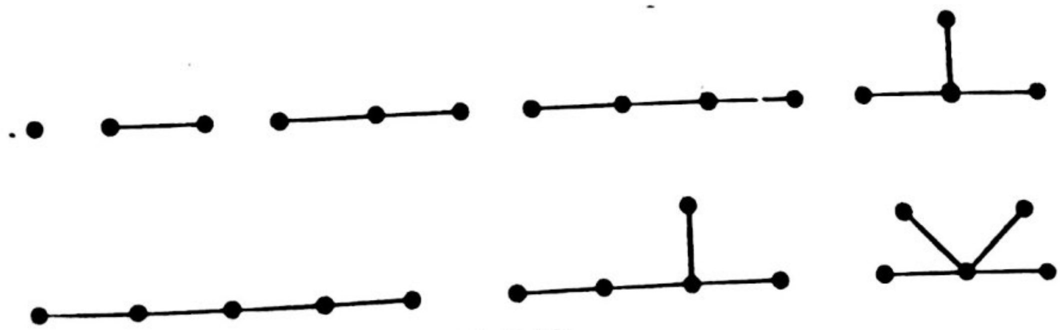
شكل ١٤-٣٢

العملية الأولى لا تغير قيمة $V - E + R$ ، إذ أن كلا من V و E يزيد بمقدار 1 وعدد المناطق R لا يتغير . العملية الثانية أيضاً لا تغير قيمة $V - E + R$ ، إذ أن V لا تتغير ، E تزيد 1 ، ويمكن إثبات أن عدد المناطق أيضاً يزيد 1 . وإذن ، M لها نفس القيمة لـ $V - E + R$ مثل الخريطة التى تتكون من رأس واحد ؛ أى أن $V - E + R = 2$ ، والنظرية أثبتت .

أشكال الشجرة

١٤-٩ ارسم جميع الأشجار ذات الرؤوس الخمسة أو أقل .

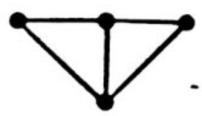
توجد ثمانية أشجار ، وهى معروضة فى الشكل ١٤-٣٣ :



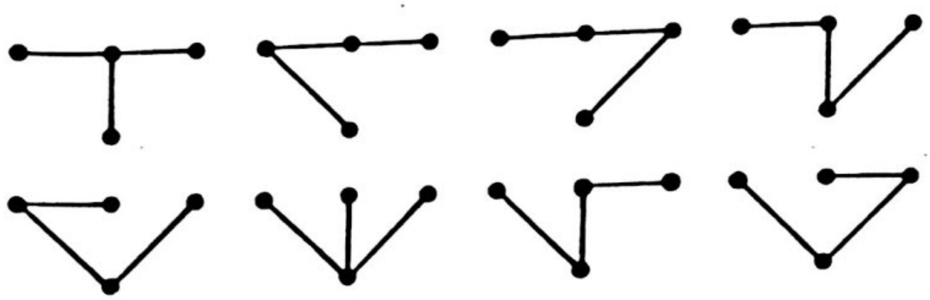
شكل ١٤-٣٣

١٤ ـ ١٠ أوجد جميع الأشجار المنشئة للشكل G الموضح فى شكل ١٤ ـ ٣٤ .

توجد ثمانية أشجار منشئة ، كما هو موضح فى الشكل ١٤ ـ ٣٥ . كل شجرة منشئة يجب أن تحوى $4 - 1 = 3$ حواف إذ أن G له أربعة رؤوس . وبالتالى كل شجرة يمكن الحصول عليها بحذف اثنتين من حواف G الخمسة . يمكن اجراء ذلك بعشر طرق إلا أن طريقتين منها تعطيان شكلين غير متصلين . وإذن الأشجار المنشئة الثمانية السابقة هى جميع الأشجار المنشئة لـ G .



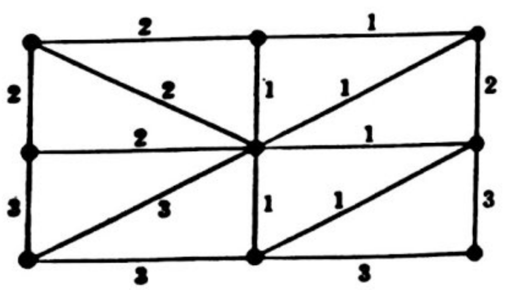
شكل ١٤ ـ ٣٤



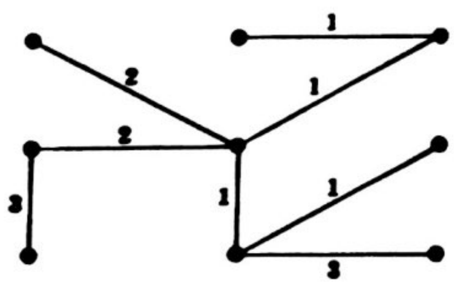
شكل ١٤ ـ ٣٥

١٤ ـ ١١ أوجد شجرة منشئة صغرى للشكل ذى الحواف المميزة فى الشكل ١٤ ـ ٣٦ .

استمر فى حذف الحواف ذات الأوزان الكبرى بحيث يظل الشكل متصلا . أو ابدأ بالرؤوس التسعة واستمر فى اضافة الحواف ذات أقل وزن دون تكوين أى طريق دائرى . كل من الطريقتين تعطى شجرة منشئة صغرى مثل تلك الموضحة فى الشكل ١٤ ـ ٣٧ .



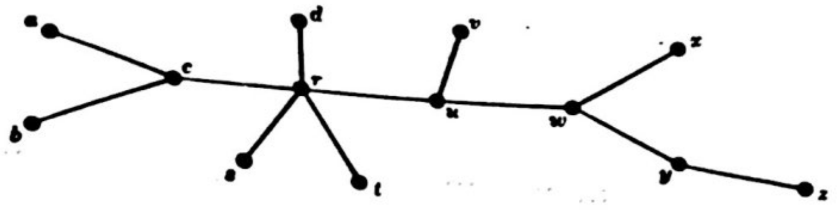
شكل ١٤ ـ ٣٦



شكل ١٤ ـ ٣٧

١٤ ـ ١٢ اعتبر الشجرة الموضحة فى الشكل ١٤ ـ ٣٨ . (أ) أى الرؤوس ، أن وجد ، نقط قطع ؟ (ب) أوجد جميع الرؤوس فى المستوى 3 إذا اختير كأصل (i) الرأس u ، (ii) الرأس w .

(أ) كل رأس من درجة أكبر من 1 هو نقطة قطع فى الشجرة ، وبالتالى c ، r ، u ، w ، y .
(ب) أوجد جميع المسارات ذات الطول 3 من الأصل للحصول على رؤوس المستوى (العمق) 3 . وبالتالى) (i) a ، b ، z ؛ (ii) c ، d ، s ، t



شكل ١٤-٣٨

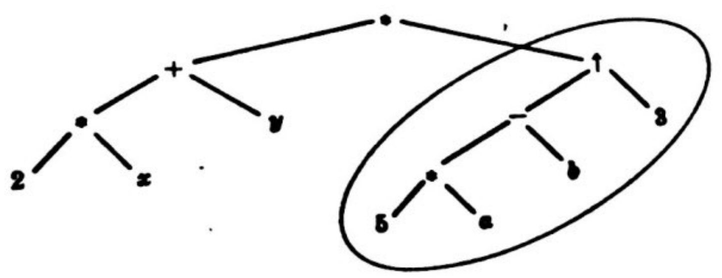
١٤-١٣ اعتبر التعبير الجبرى $(2x + y)(5a - b)^3$. (أ) ارسم الشجرة المتشعبة المرتبة المناظرة . (ب) أوجد مدى عملية إيجاد الأس . (مدى رأس v فى الشجرة المتشعبة هو الشجرة الجزئية ، التى لها الأصل v ، وتنشأ من v والرؤوس التى تلى v فى الشجرة .) (جـ) أعد كتابة التعبير فى الصورة البولندية - مقدماً .

(أ) استخدم سهماً (↑) للأس والعلامة (*) للضرب للحصول على الشجرة الموضحة فى الشكل ١٤-٣٩ .

(ب) مدى ↑ هو الشجرة المحاطة بدائرة فى الشكل ١٤-٣٩ . وهو يناظر التعبير $(5a - b)^3$.

(جـ) امسح الشجرة كما فى الشكل ١٤-١٦ (ب) للحصول على

$$* + * 2 x y \uparrow - * 5 a b 3$$



شكل ١٤-٣٩

١٤-١٤ الشكل ١٤-٤٠ (أ) يوضح العناصر فى سجل طالب . (أ) ارسم الشجرة المتشعبة المرتبة المناظرة . (ب) أى عناصر البيانات فى السجل هى عناصر مجمعة ؟ (جـ) أى منها عناصر أولية ؟

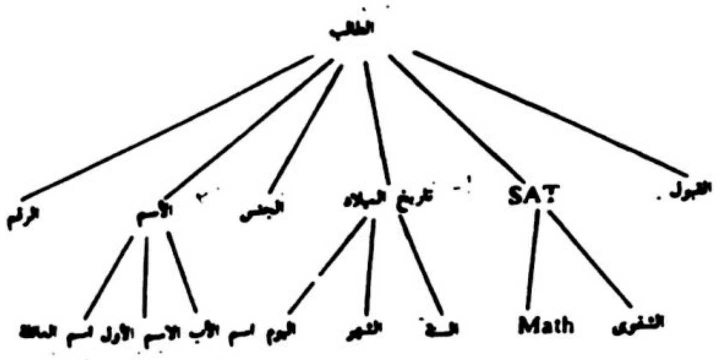
(أ) أنظر الشكل ١٤-٤٠ (ب) .

(ب) العناصر المجمعة هى عناصر البيانات التى تتكون من اثنين أو أكثر من العناصر الجزئية .. وهى الإسم ، تاريخ الميلاد ، ونتيجة الامتحان . وهى الرؤوس التى لا هى أوراق ولا أصل .

(جـ) العناصر الأولية هى عناصر البيانات غير المجزأة إلى عناصر جزئية . وهى الرقم اسم العائلة ، الأسم الأول ، اسم الأب ، النوع ، اليوم ، الشهر ، السنة ، الرياضيات ، الشفوى ، القبول . وهى أوراق الشجرة .

00 الطالب
01 الرقم
01 الاسم
02 اسم العائلة
02 الاسم الأول
02 اسم الأب
01 النوع
01 تاريخ الميلاد
02 اليوم
02 الشهر
02 السنة
01 نتيجة الامتحان
02 الشفوى
01 (تاريخ) القبول

(أ)

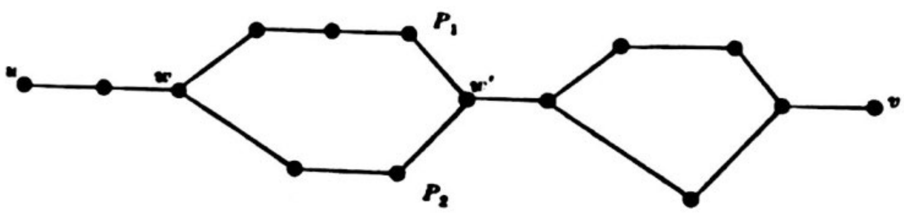


(ب)

شكل ١٤-٤٠

١٤-١٥ افرض أنه يوجد مساران مختلفان ، مثلا P_1 و P_2 ، من الرأس u إلى الرأس v فى شكل G . اثبت أن G يحوى طريقاً دائرياً .

افرض أن w رأس على P_1 و P_2 بحيث أن الرأسين التاليين على P_1 و P_2 مختلفان . ليكن w' أول رأس يلى w ويقع على كل من P_1 و P_2 . (أنظر الشكل ١٤-٤١) . المساران الجزيئان من P_1 و P_2 بين w و w' ليس لهما رؤوس مشتركة سوى w و w' وبالتالى هذان المساران الجزيئان يكونان طريقاً دائرياً .

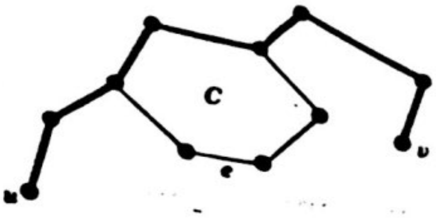


شكل ١٤-٤١

١٤-١٦ اثبت أن لأى شكل متصل : (أ) إذا كان G يحوى طريقاً دائرياً C يحتوى الحافة e ، فإن $G - e$ يظل متصلا . (ب) إذا كانت $e = \{u, v\}$ حافة بحيث أن $G - e$ غير متصل ، فإن u و v ينتميان إلى مركبتين متصلتين مختلفتين لـ $G - e$.

(أ) حيث أن G متصل ، أى رأسين u و v يكونان موصلين بمسار P . يمكننا دائماً فرض أن P لا يحتوى e ؛ لأن فى الحالات الأخرى يمكننا تكوين المسار من المسارات الجزئية لـ P ومسار جزئى من $C - e$ (أنظر الشكل ١٤-٤٢) . وبالتالى حذف e لا يجعل G غير متصل .

(ب) افرض ، بالعكس ، أن u و v ينتميان إلى إحدى المركبات المتصلة لـ $G - e$. يوجد مسار P فى $G - e$ يربط u و v . P و e معاً يكونان طريقاً دائرياً C فى G . وبالتالى من (أ) السابقة $G - e$ متصل . هذا التناقض يعطى البرهان .



شكل ١٤-٤٢

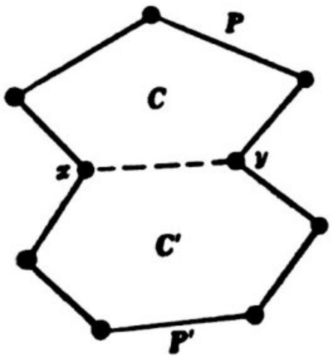
١٤-١٧ اثبت النظرية ١٤-٤ . ليكن G شكلا له أكثر من رأس واحد . العبارات التالية متكافئة : (i)G شجرة . (ii) كل زوج من الرؤوس متصل بمسار واحد فقط . (iii)G متصل ، ولكن عند حذف أى حافة فإن الشكل الناتج غير متصل . (iv)G لا يحتوى على طرق دائرية ، ولكن إذا أضيفت إليه أى حافة فإن الشكل الناتج يحتوى على طريق دائرى واحد فقط .

(i) تتضمن (ii) . افرض أن u و v رأسان فى G . حيث أن G شجرة ، إذن G متصل ويوجد على الأقل مسار واحد بين u و v . يوجد مسار واحد فقط بين u و v وإلا G سوف يحوى طريقاً دائرياً (المسألة ١٤-١٥) .

(ii) تتضمن (iii) . افرض أننا حذفنا حافة $e = \{u, v\}$ من الشكل المتصل G . بما أن e هو المسار الوحيد من u الى v ، إذن $G - e$ غير متصل .

(iii) تتضمن (iv) . من المسألة ١٤-١٦ (أ) ، G خال من الطرق الدائرية . افرض أن x و y رأسان فى G وأن H هو الشكل الذى نحصل عليه بإضافة الحافة $e = \{x, y\}$ إلى G . حيث أن G متصل ، يوجد مسار P من x إلى y فى G ؛ وإذن $C = Pe$ تكون طريقاً دائرياً فى H . افرض أن H يحوى طريقاً دائرياً آخر C' . بما أن G خال من الطرق الدائرية ، C' يجب أن يحتوى على الحافة e ، وليكن $C' = P'e$ وبالتالى $P,$ P مساران فى G من x إلى y . (أنظر الشكل ١٤-٤٣ .) من المسألة ١٤-١٥ ، G يحوى طريقاً دائرياً ، وهذا يتعارض مع الحقيقة أن G خال من الطرق الدائرية . وإذن H يحتوى على طريق دائرى واحد فقط .

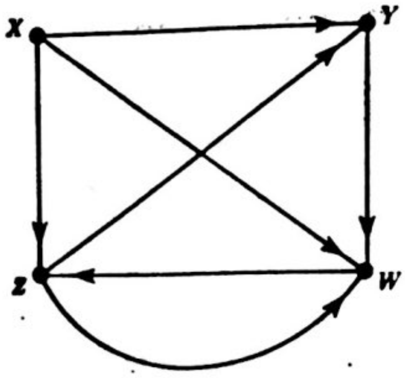
(iv) تتضمن (i) . حيث أن إضافة أى حافة $e = \{x, y\}$ إلى G تنتج طريقاً دائرياً ، إذن الرأسان x و y يجب أن يكونا متصلين فى G . وبالتالى G متصل ، ومن الفرض ، G خال من الطرق الدائرية ، وإذن G شجرة .



شكل ١٤-٤٣

الأشكال الموجهة

١٤-١٨ اعتبر الشكل الموجه D الموضح فى شكل ١٤ - ٤٤ . (أ) صف D . (ب) أوجد عدد المسارات من X إلى Z . (جـ) أوجد عدد المسارات من Y الى Z . (د) هل توجد أى منابع أو مهابط ؟ (هـ) أوجد المصفوفة M_D للشكل الموجه D . (و) هل D ضعيف الاتصال ؟ متصل فى اتجاه واحد ؟ قوى الاتصال ؟



شكل ١٤-٤٤

(أ) توجد أربعة رؤوس : X ، Y ، Z ، W وتوجد سبعة أقواس : $\langle X, Y\rangle$ ، $\langle X, W\rangle$ ، $\langle X, Z\rangle$ ، $\langle Y, W\rangle$ ، $\langle Z, Y\rangle$ ، $\langle Z, W\rangle$ ، $\langle W, Z\rangle$.

(ب) توجد ثلاثة مسارات من X الى Z : (X, Z) ، (X, W, Z) ، (X, Y, W, Z) .

(جـ) يوجد مسار واحد فقط من Y إلى Z : (Y, W, Z) .

(د) X منبع إذ أنه ليس نقطة انتهاء لأى قوس ، أى أن درجة الداخل له صفر . لا توجد مهابط إذ أن كل رأس درجة الخارج له لا تساوى صفراً ، أى أن كل رأس هو نقطة البداية لقوس .

(هـ)

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(هنا الصفوف والأعمدة لـ M_D مميزة بـ X ، Y ، Z ، W على الترتيب .) العنصر m_{ij} يرمز إلى عدد الأقواس من الرأس رقم i إلى الرأس رقم j .

(و) الشكل الموجه ليس قوى الاتصال إذ أن X منبع وبالتالى لا يوجد مسار من أى رأس آخر ، مثلا Y إلى X . ولكن ، D متصل فى اتجاه واحد لأن المسار (X, Y, W, Z) يمر بجميع الرؤوس ، وبالتالى يوجد مسار جزئى بين أى زوج من الرؤوس .

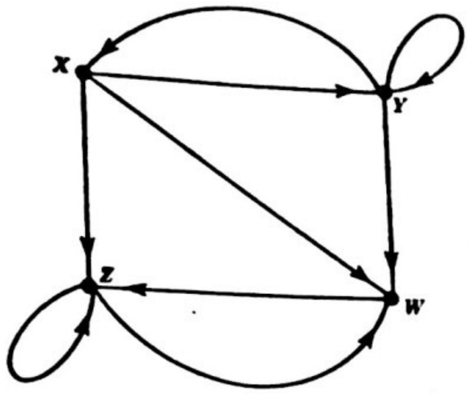
١٤-١٩ اعتبر الشكل الموجه D المرسوم فى الشكل ١٤-٤٥ (أ) هل توجد أى منابع أو مهابط ؟ (ب) أوجد المصفوفة M للشكل D . (جـ) هل D متصل فى اتجاه واحد ؟ قوى الاتصال ؟

(أ) لا توجد أى منابع أو مهابط .

(ب)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(جـ) D متصل فى اتجاه واحد ، وليس قوى الاتصال ، لأنه لا يوجد مسار من Z إلى X .



شكل ١٤-٤٥

١٤-٢٠ لتكن $V = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. ولتكن R علاقة على V معرفة بـ : xRy إذا كانت x أصغر من y و x أولية بالنسبة إلى y (أى أن x و y ليس بينهما عامل مشترك غير 1) .
(أ) اكتب R كفئة من الأزواج المرتبة . (ب) ارسم الشكل الموجه المناظر لـ R .

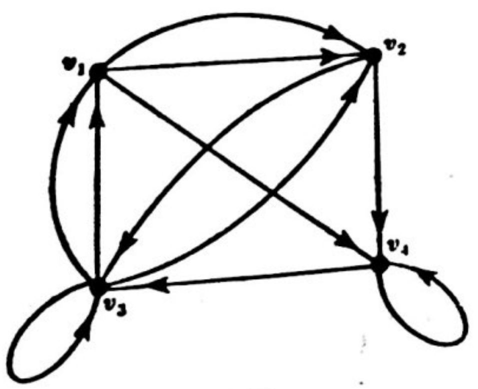
(أ) $R = \{(2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}$

(ب) نرسم قوساً من x إلى y إذا كان (x, y) ينتمى إلى R كما هو موضح فى الشكل ١٤-٤٦ .

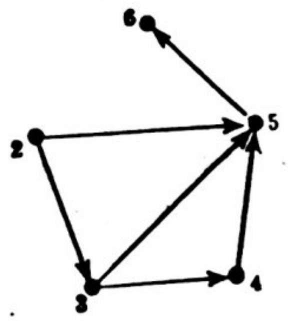
١٤-٢١ ارسم الشكل الموجه D المناظر للمصفوفة M التالية (والتى عناصرها أعداد صحيحة غير سالبة) .

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

بما أن M مصفوفة 4×4 ، إذن D له أربعة رؤوس وليكن v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 . لكل عنصر m_{ij} ، ارسم m_{ij} من الأقواس من الرأس v_i إلى الرأس v_j للحصول على الشكل الموجه فى شكل ١٤-٤٧ .

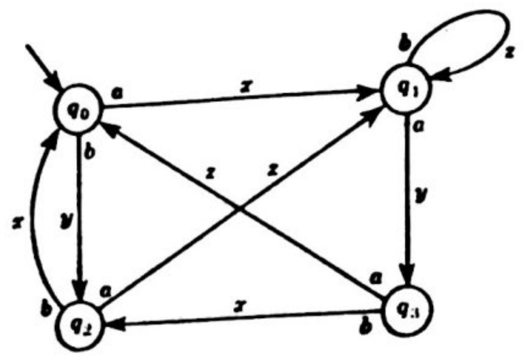


شكل ١٤-٤٧



شكل ١٤-٤٦

١٤ ـ ٢٢ اعتبر آلة ذات حالات محدودة M حيث رمزا الداخل هما a و b ورموز الخارج هى x ، y ، z ، ومخطط الحالات يعطى فى الشكل ١٤ ـ ٤٨ . (أ) أوجد جدول الحالة لـ M . (ب) حدد الخارج إذا كان الداخل هو سلسلة الرموز $W = aababaabbab$.



شكل ١٤ ـ ٤٨

(أ) نميز صفوف الجدول بالحالات الأربع q_3, q_2, q_1, q_0 وعمودية برمزى الداخل b, a ، باستخدام مخطط الحالة ـ شكل ١٤ ـ ٤٨ ـ نوجد العناصر فى الجدول كما يلى من الحالة q_0 السهم المميز بـ a يذهب إلى الحالة q_1 ويميز برمز الخارج x . وبالتالى q_1, x توضع فى الجدول فى المكان المناظر للصف q_0 والعمود a . العناصر الأخرى فى جدول الحالة التالى نحصل عيها بالمثل .

	a	b
q_0	q_1, x	q_2, y
q_1	q_1, y	q_1, z
q_2	q_1, z	q_0, x
q_3	q_0, z	q_2, x

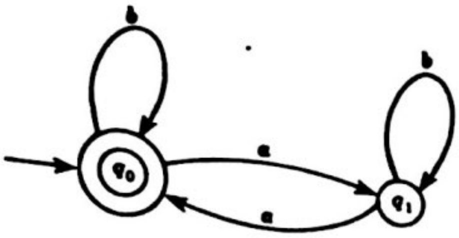
(ب) بالابتداء عند q_0 الحالة الابتدائية ، نتحرك من حالة إلى حالة بالأسهم المميزة على الترتيب برموز الداخل المعطاة :

$$q_0 \to q_1 \to q_1 \to q_2 \to q_1 \to q_1 \to q_3 \to q_0 \to q_2 \to q_0 \to q_1 \to q_1$$

رموز الخارج على الأسهم السابقة هى على الترتيب $xyxzzyzyxxz$ ،

١٤ ـ ٢٣ ليكن a و b رمزى الداخل . كون الآلية المحدودة M والتى سوف تقبل فقط السلاسل المكونة من a و b والتى بها عدد زوجى من الـ a's .

نحتاج فقط إلى حالتين ، q_0 و q_1 . نفرض أن M فى الحالة q_0 أو q_1 حسب كون عدد الـ a's حتى المرحلة المعطاة زوجيا أم فرديا . (أى أن q_0 هى حالة قبول ، ولكن q_1 ليست حالة قبول .) a فقط سوف تغير الحالة . أيضا q_0 هى الحالة الابتدائية . مخطط الحالة لـ M هو شكل ١٤ ـ ٤٩ .



شكل ١٤ ـ ٤٩

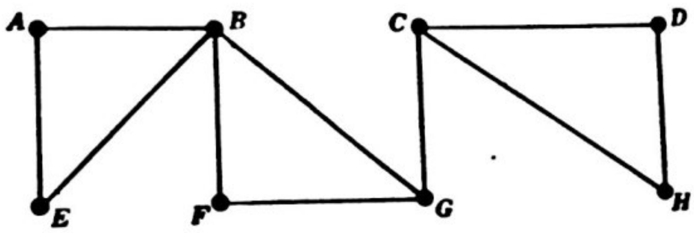
مسائل إضافية

الأشكال ، الاتصال

١٤ ـ ٢٤ أوجد قطر الشكل G الذى رؤوسه y,x,w,v,u وحوافه

(أ) $\{u, v\}, \{u, x\}, \{v, w\}, \{v, x\}, \{v, y\}, \{x, y\}$ (ب) $\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{x, y\}$

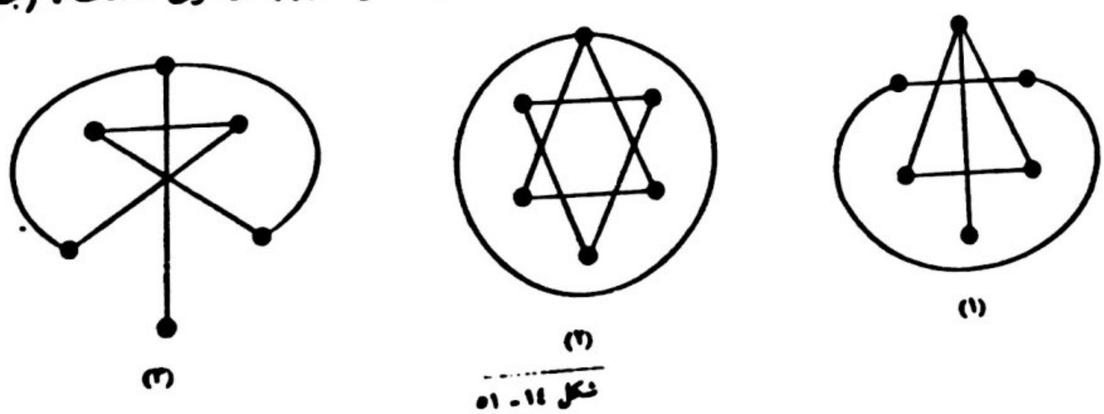
١٤ ـ ٢٥ اعتبر الشكل فى شكل ١٤ ـ ٥٠ . أوجد :(أ) جميع المسارات من الرأس A إلى الرأس H ، (ب) قطر الشكل ، (جـ) درجة كل رأس ، (د) أى الرؤوس ، إن وجد ، نقط قطع ؟ (هـ) الحافة e فى الشكل المتصل D تسمى قنطرة إذا كان $G - e$ الشكل الجزئى الذى نحصل عليه من G بحذف الحافة e ، غير متصل . أى الحواف إن وجد ، هى قناطر ؟



شكل ١٤ ـ ٥٠

١٤ ـ ٢٦ اثبت أن الحافة e تكون قنطرة لشكل متصل G إذا وفقط إذا كانت e غير محتواة فى أى طريق دائرى فى G .
(ارشاد : استخدم المسألة ١٤ ـ ١٦ (أ)) .

١٤ ـ ٢٧ اعتبر الأشكال المتعددة فى شكل ١٤ ـ ٥١ . أى منها (أ) متصل ، (ب) لايحوى حلقات ، (جـ) اشكال ؟



شكل ١٤ ـ ٥١

١٤ - ٢٨ أوجد جميع الأشكال المتصلة التى لها أربعة رؤوس .

١٤ - ٢٩ ارسم شكلين منتظمين — 3 لكل ثمانية رؤوس .

١٤ - ٣٠ أوجد قطر أى شكل كامل ذى قسمين .

١٤ - ٣١ اثبت أن الشكل يكون ذا قسمين إذا وفقط إذا كان كل من طرقه الدائرية له طول زوجى .

١٤ - ٣٢ اثبت أن أى شجرة هى شكل ذو قسمين . (إرشاد : استخدم المسألة ١٤ - ٣١) .

١٤ - ٣٣ اعتبر العمليتين التاليتين على شكل G : (أ) احذف حافة . (٢) احذف رأسا وجميع الحواف الساقطة على هذا الرأس . اثبت أن كل شكل جزئى من شكل محدود G يمكن الحصول عليه بمتابعة من هاتين العمليتين .

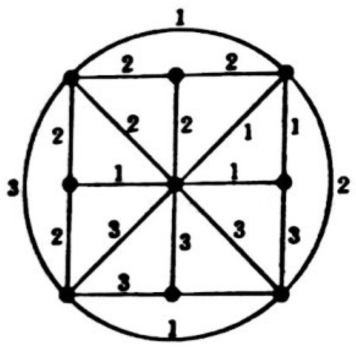
١٤ - ٣٤ اثبت أن أى شكل G يمكن تجزيئة إلى أشكال جزئية كبرى متصلة وغير متقاطعة (أى مركباتها المتصلة) باختيار علاقة التكافؤ المناسبة على رؤوس G .

أشكال الشجرة

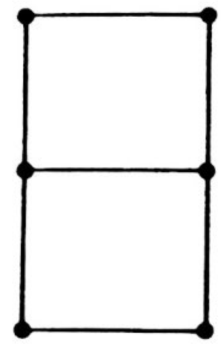
١٤ - ٣٥ شكل ١٤ - ١١ (ب) يوضح ثمانية من الأشجار التى لها سبعة رؤوس . توجد اثنتان أخريان أوجدهما .

١٤ - ٣٦ اثبت أن الشجرة المحدودة (أى تحتوى على الأقل جافة واحدة) لها على الأقل رأسان من الدرجة 1 . (ارشاد : اعتبر أحد أطول المسارات فى الشجرة) .

١٤ - ٣٧ أوجد عدد الأشجار المنشئة للشكل فى شكل ١٤ - ٥٢ .



شكل ١٤ - ٥٣



شكل ١٤ - ٥٢

١٤ - ٣٨ أوجد شجرة منشئة صغرى للشكل المميز فى شكل ١٤ - ٥٣ .

١٤ - ٣٩ اعتبر التعبير ألجبريا

$$\frac{(3x-5z)^4}{a(2b+c^2)}$$

(أ) ارسم الشجرة المتشعبة المرتبة المناظرة ، استخدم سهما (↑) للأس ، والرمز (*) للضرب والرمز (/) للقسمة .

(ب) أعد كتابة التعبير فى (i) الصورة البولندية - مقدماً ، (ii) الصورة البولندية - مؤخرا .

(جـ) أوجد مدى كل عملية ضرب .

١٤ - ٤٠ افرض أن سجل كشف مرتب موظف مرتب كما يلى : 00 الموظف ، 01 الرقم ، 01 الإسم ، 02 اسم العائلة ، 02 الأسم الأول ، 02 اسم الأب ، 01 عدد الساعات ، 02 النصاب ، 02 الساعات الزائدة ، 10 المعدل .

(أ) ارسم مخطط الشجرة المناظرة . (ب) أيها عناصر مجمعة ؟ (جـ) أيها عناصر أولية ؟

الأشكال الموجهة

١٤ - ٤١ اعتبر الشكل الموجه D فى شكل ١٤ - ٥٤ .

(أ) أوجد درجة الداخل ودرجة الخارج لكل رأس .

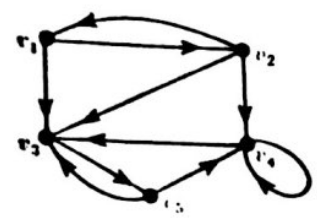
(ب) أوجد عدد المسارات من v_1 الى v_4 .

(جـ) هل توجد أى منابع أو مهابط ؟

(د) أوجد المصفوفة M لـ D .

(هـ) أوجد عدد الطرق ذات الطول 3 أو أقل من v_1 إلى v_3 .

(و) هل D متصل فى اتجاه واحد ؟ قوى الاتصال ؟



شكل ١٤ - ٥٤

١٤ - ٤٢ افرض أن D هو الشكل الموجه ذو الرؤوس v_1,v_2,v_3,v_4 المناظر للمصفوفة

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(أ) ارسم مخطط D . (ب) أوجد عدد الطرق ذات الطول 3 من v_1 إلى (i) v_1 , (ii) v_2 , (iii) v_3 , (iv) v_4

(جـ) هل D متصل فى اتجاه واحد ؟ قوى الاتصال ؟

١٤ - ٤٣ افرض أن R هى العلاقة على $V=\{2,3,4,9,15\}$ المعرفة بـ x أصغر من وأولية بالنسبة إلى y (قارن بالمسألة ١٤ - ٢٠) . (أ) ارسم مخطط الشكل الموجه لـ R . (ب) هل R ضعيفة الاتصال ؟ متصلة فى اتجاه واحد ؟ قوية الاتصال ؟

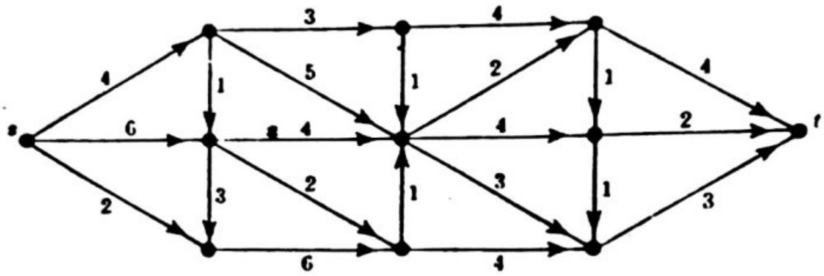
١٤ - ٤٤ الشكل الموجه D يكون تاماً إذا كان لكل زوج من الرؤوس المختلفة v_i و v_j أما $\langle v_i, v_j \rangle$ قوس أو $\langle v_j, v_i \rangle$ قوس . اثبت أن الشكل الموجه المحدود التام D له مسار يحوى جميع الرؤوس . (واضح أن هذا ينطبق على الأشكال التامة غير الموجهة .) وبالتالى D متصلة فى اتجاه واحد .

١٤ - ٤٥ اعتبر الشكل الموجه المميز فى شكل ١٤ - ٥٥ . (أ) كم عدد المسارات (الموجهة) الموجودة من الرأس s إلى الرأس t ؟ (ب) أوجد أقصر مسار من S إلى t .

الآلات ذات الحالات المحدودة

١٤ ـ ٤٦ اعتبر آلة ذات حالات محدودة M حيث رموز الداخل هى c,b,a ورموز الخارج هى z,y,x ومخطط الحالة كما هو موضح فى الشكل ١٤ ـ ٥٦ . (أ) كون جدول الحالة لـ M . (ب) أوجد الخارج إذا كان الداخل هو السلسلة $W=caabbaccab$.

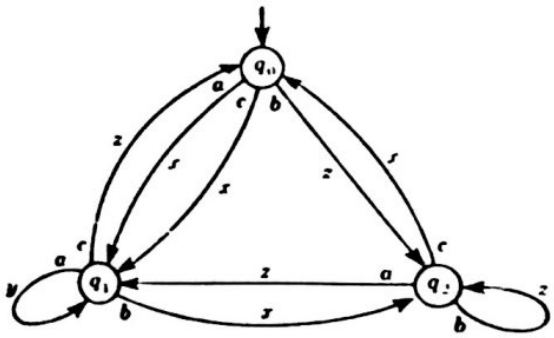
١٤ ـ ٤٧ افرض أن M آلة ذات حالات محدودة حيث جدول الحالة كما فى الشكل ١٤ ـ ٥٧ (أ) ارسم مخطط الحالة لـ M بفرض أن q_0 هى الحالة الابتدائية . (ب) أوجد الخارج إذا كان الداخل هو السلسلة $W= aabbabbaab$



شكل ١٤ ـ ٥٥

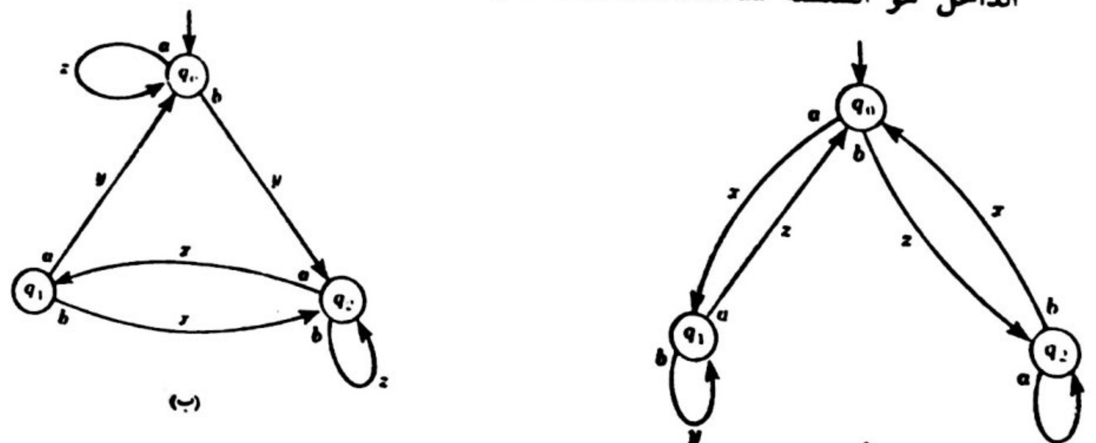
	a	b
q_0	q_1, x	q_2, y
q_1	q_3, y	q_1, z
q_2	q_1, z	q_0, x
q_3	q_0, z	q_2, x

شكل ١٤ ـ ٥٧



شكل ١٤ ـ ٥٦

١٤ ـ ٤٨ لكل من الآلتين فى شكل ١٤ ـ ٥٨ ، حيث رمزا الداخل a و b ورموز الخارج z,y,x أوجد الخارج إذا كان الداخل هو السلسلة $W=abaabbabbaabaa$.



(ب) (أ)

شكل ١٤ ـ ٥٨

١٤ ـ ٤٩ كون الآلية المحدودة M حيث رمزا الداخل هما a و b والتى سوف تقبل فقط السلاسل فى a و b بحيث أن عدد الـ $b's$ يقبل القسمة على 3 . (إرشاد : مطلوب ثلاث حالات) .

١٤ ـ ٥٠ كون الآلية المحدودة M حيث رمزا الداخل هما a و b والتى تقبل فقط السلاسل فى a و b بحيث أن $aabb$ تظهر كسلسلة جزئية . (على سبيل المثال $ba(aabb)ba$ و $bab(aabb)a$ سوف تقبلان ، ولكن $babbaa$ و $aababaa$ سوف لاتقبلان .)

أجوبة المسائل الإضافية

١٤-٢٤ (أ) قطر $G = 2$ ، (ب) قطر $G = 3$

١٤-٢٥ (أ) توجد ثمانية مسارات :

(A, B, G, C, H) (A, B, F, G, C, H) (A, B, G, C, D, H) (A, B, F, G, C, D, H)
(A, E, B, G, C, H) (A, E, B, F, G, C, H) (A, E, B, G, C, D, H) (A, E, B, F, G, C, D, H)

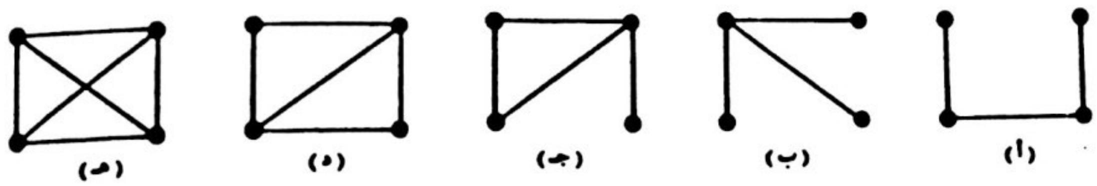
(ب) 4 (د) B, C و G

(جـ) درجة $(B) = 4$ ، درجة (C) = درجة $(G) = 3$ ؛ الأخرى لها الدرجة 2 ،

(هـ) $\{C, G\}$

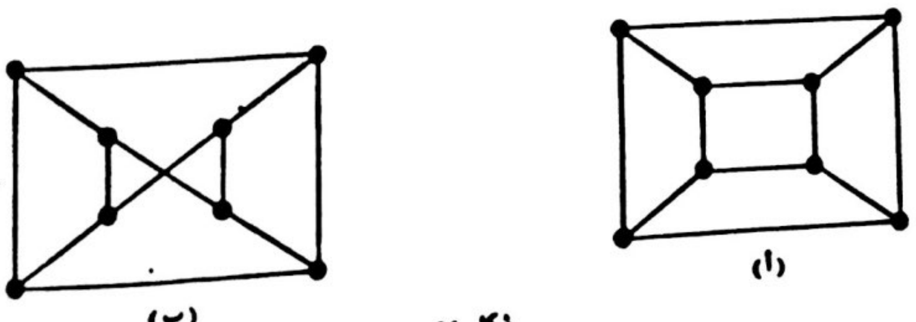
١٤ - ٢٧ (أ) (iii) ، (ب) (i) ، (iii) ، جـ (iii)

١٤-٢٨ أنظر الشكل ١٤-٥٩ .



شكل ١٤-٥٩

١٤ - ٢٩ الشكلان المنتظمان -3 الموضحان فى شكل ١٤ - ٦٠ هما شكلان مختلفان لأن (ب) به طريق دائرى -5 ولكن (أ) ليس له .

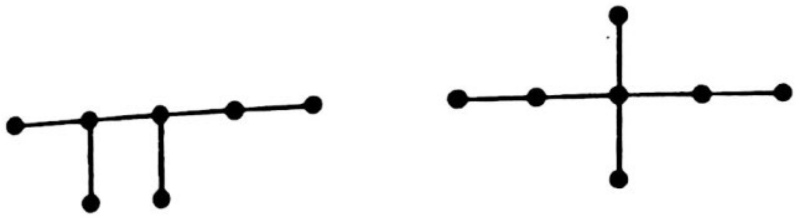


شكل ١٤-٦٠

١٤ـ٣٠ قطر $(K_{1,1})$ = 1 ؛ الأخرى جميعها لها القطر 2 .

١٤ـ٣٤ دع $u \sim v$ إذا كان $u = v$ أو إذا أوجد مسار من u إلى v . اثبت أن ~ هي علاقة تكافؤ .

١٤ـ٣٥ أنظر الشكل ١٤ـ٦١ .

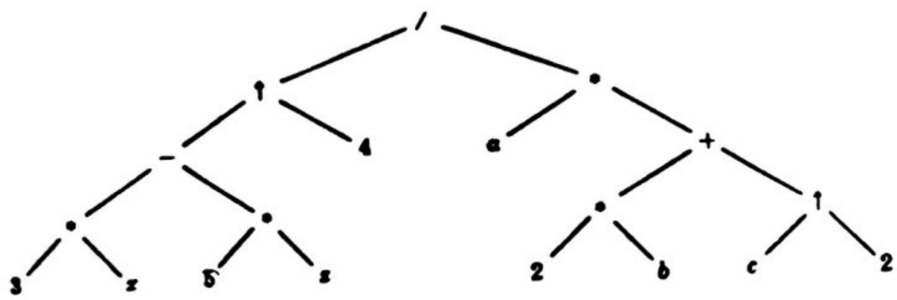


شكل ١٤ـ٦١

١٤ـ٣٧ خمس عشرة

١٤ـ٣٨ وزن 12 .

١٤ـ٣٩ (أ) أنظر الشكل ١٤ـ٦٢ .



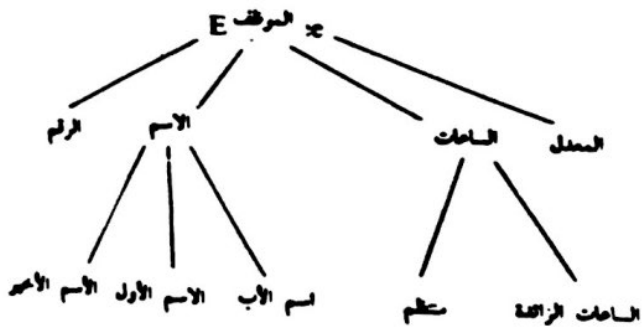
شكل ١٤ـ٦٢

(ب) (i) $/ \uparrow - * 3x * 5z\, 4 * a + * 2b \uparrow c\, 2$

(ii) $3x * 5z * - 4 \uparrow a\, 2b * c\, 2 \uparrow + * /$

(جـ) $3x,\ 5z,\ a(2b + c^2),\ 2b$

١٤ـ٤٠ (أ) أنظر الشكل ١٤ـ٦٣ .



شكل ١٤ـ٦٣

(ب) الأسم ، الساعات .

(جـ) الرقم ، اسم العائلة ، الإسم الأول ، اسم الأب ، النصاب ، الساعات الزائدة ، المعدل

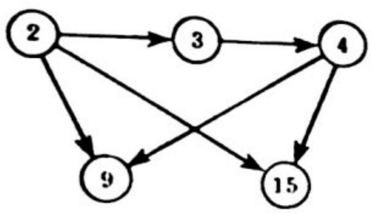
١٤-٤١ (أ) درجات الداخل : 1 ، 1 ، 4 ، 3 ، 1 . درجات الخارج : 2 ، 3 ، 1 ، 2 ، 2 .
(ب) ثلاثة
(جـ) لا .

(د)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(هـ) 5 . (و) فى اتجاه واحد وليس قوياً .

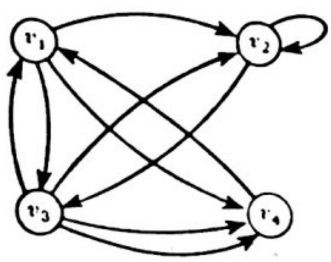
١٤-٤٢ (أ) انظر الشكل ١٤-٦٤. (ب) (i) 3 ، (ii) 5 ، (iii) 4 ، (iv) 4 . (جـ) فى اتجاه واحد وقوى .

١٤-٤٣ (أ) انظر الشكل ١٤-٦٥ . (ب) فقط ضعيف الاتصال .

١٤-٤٤ ارشاد : افرض أن $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ أحد أطول المسارات فى D وانه لا يحوى الرأس u . $\langle u, v\rangle$ و $\langle v_m, u\rangle$ ليسا أقواساً ، لأنه لو كانا أقواساً ، فإن المسار يمكن مده . وإذن $\langle v_1, u\rangle$ و $\langle u, v_m\rangle$ هما قوسان . افرض أن k هو أصغر عدد صحيح بحيث أن $\langle v_k, u\rangle$ و $\langle u, v_{k+1}\rangle$ يكونان قوسين . فيكون $(v_1, \ldots, v_k, v, v_{k+1}, \ldots, v_m)$ مساراً أطول .

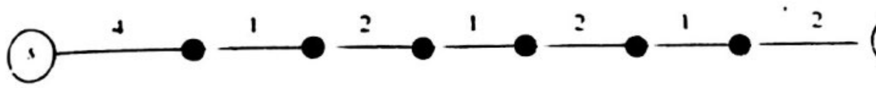


شكل ١٤-٦٥



شكل ١٤-٦٤

١٤-٤٥ (أ) 62 ، (ب)

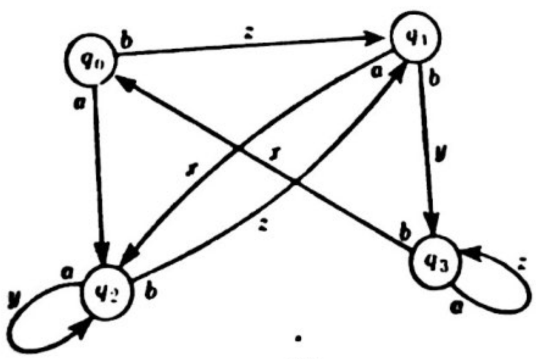


١٤-٤٦ (أ)

	a	b	c
q_0	q_1, x	q_2, z	q_1, x
q_1	q_1, y	q_2, x	q_0, z
q_2	q_1, z	q_2, z	q_0, x

(ب) xyyxzzzxyx

١٤-٤٧ أنظر الشكل ١٤-٦٦ .
(ب) yyzyzxzxyz

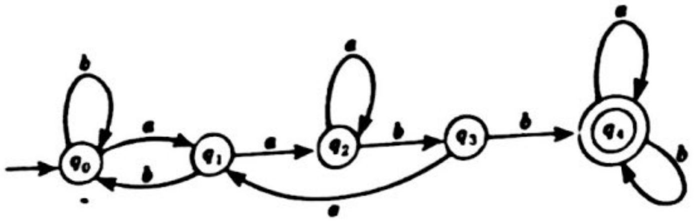


شكل ١٤-٦٦

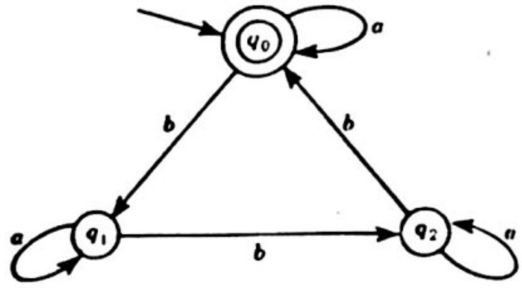
١٤ ـ ٤٨ (أ) $xyzxyyzzyyxxz.$ (ب) $zyxyyzxxzxyyxy$

١٤ ـ ٤٩ انظر الشكل ١٤ ـ ٦٧ .

١٤ ـ ٥٠ انظر الشكل ١٤ ـ ٦٨ .



شكل ١٤ ـ ٦٨



شكل ١٤ ـ ٦٧