مراجعة
الفصل الثاني لسنة 35/36

س١ (أ) أثبت : $(p \vee q) \to (\neg p \wedge r) \equiv \neg p \wedge (q \to r)$

$$(p \vee q) \to (\neg p \wedge r) \equiv \neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge r)$$
$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r)$$
$$\equiv \neg p \wedge (\neg q \vee r)$$
$$\equiv \neg p \wedge (q \to r)$$

(ب) أثبت أن العبارة $\neg u \to [(u \wedge v) \to w]$ مصدوقة.

$$\neg u \to [(u \wedge v) \to w] \equiv u \vee [\neg(u \wedge v) \vee w]$$
$$\equiv u \vee [(\neg u \vee \neg v) \vee w]$$
$$\equiv [u \vee (\neg u \vee \neg v)] \vee w$$
$$\equiv [(u \vee \neg u) \vee \neg v] \vee w$$
$$\equiv [T \vee \neg v] \vee w$$
$$\equiv T \vee w \equiv T$$

وبالتالي العبارة $\neg u \to [(u \wedge v) \to w]$ مصدوقة.

س 2 (أ) $k, m, n \in \mathbb{Z}$

اذا كان $k+m+n$ عدد زوجيا فإن k أو m أو n عدد زوجي

الحل: التناقض العكسي:

اذا كان k عدد فردي و m عدد فردي و n عدد فردي

فإن $k+m+n$ عدد فردي.

لنفرض أن k عدد فردي و m عدد فردي و n عدد فردي

وبالتالي يوجد $p, q, r \in \mathbb{Z}$ حيث $k = 2p+1$ و $m = 2q+1$ و $n = 2r+1$

فإن

$$k+m+n = (2p+1)+(2q+1)+(2r+1)$$

$$= 2(p+q+r)+3 = 2\underbrace{(p+q+r+1)}_{\in \mathbb{Z}} + \boxed{1}$$

فإن $k+m+n$ عدد فردي.

وبالتالي اذا كان $k+m+n$ عدد زوجي فإن k عدد زوجي أو m عدد زوجي أو n عدد زوجي

(ب) ليكن a عدد غير كسري. استخدم طريقة البرهان بالتناقض لإثبات أن $3a-2$ عدد غير كسري.

الحل: نفرض أن $3a-2$ عدد كسري

فإنه يوجد $3a-2=\frac{x}{y}\ ,\ x,y\in\mathbb{Z}$

فإن $3a=\frac{x}{y}+2$

فإن $a=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+2\right)$

فإن $a=\frac{x+2y}{3y}$

$\frac{x}{y}+2\in\mathbb{Q}$

فإن $a=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+2\right)\in\mathbb{Q}$

وبما أن $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}, 2y\in\mathbb{Z}$ فإن $x+2y\in\mathbb{Z}, 3y\in\mathbb{Z}$

وبالتالي $a=\frac{x+2y}{3y}\in\mathbb{Q}$ ولدينا $a\notin\mathbb{Q}$

وهذا تناقض

فإن $3a-2$ عدد غير كسري.

س 3 (أ): أثبت أن $1\times2\times\cdots\times n > 2^n$ لكل $n \geq 4$

$(\quad n! > 2^n \quad)$

الحل:

الخطوة الأساسية: $1\times2\times3\times4 = 24 > 2^4 = 16$ (صائبة)

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 4$

نفرض أن $1\times2\times3\times\cdots\times k > 2^k$ ، نبرهن $1\times2\times\cdots\times k(k+1) > 2^{k+1}$

لدينا: $1\times2\times3\times\cdots\times k > 2^k$ (فرضية الاستقراء)

$k+1 > 2$ (لأن $k \geq 4$)

نضرب العبارتان: $1\times2\times3\times\cdots\times k\times(k+1) > 2^{k+1}$

النتيجة: $1\times2\times3\times4\times\cdots\times n > 2^n$ ، لكل $n \geq 4$

(ب) $a_1=-1,\ a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=-\sqrt{10}$ و $a_n=a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-3}$ ، لكل $n\geq 4$

أثبت أن $a_n<0$ لكل $n\geq 1$

الحل: **الخطوة الأساسية:**

$a_1=-1<0$ و $a_2=-\frac{1}{2}<0$ ، $a_3=-\sqrt{10}<0$ (صائبة)

خطوة الاستقراء: ليكن $k\geq 3$

نفرض أن $a_1<0, a_2<0, a_3<0, \dots, a_{k-1}<0, a_k<0$ ونبرهن أن $a_{k+1}<0$

لدينا: $a_{k+1}=a_k\cdot a_{k-1}\cdot a_{k-2}$ (التعريف الاستقرائي)

وبما أن $a_k<0$ و $a_{k-1}<0, a_{k-2}<0$ (حسب فرضية الاستقراء)

فإن $a_{k+1}=a_k\cdot a_{k-1}\cdot a_{k-2}<0$

النتيجة: $a_n<0$ لكل $n\geq 1$

س4 (3)

R علاقة معرفة على $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

$\big((a,b)\in R \Leftrightarrow\big)\ aRb \Leftrightarrow a^2=b$

(i)

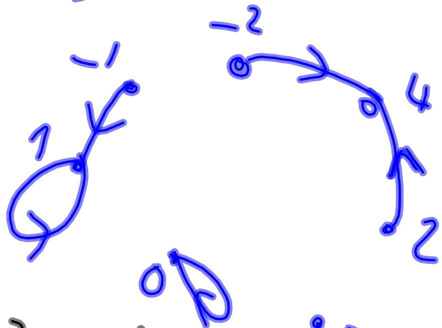
$R=\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$

(ii)

مجال العلاقة R: $D_R=\{-2,-1,0,1,2\}$

مدى العلاقة R: $Im(R)=\{4,1,0\}$

(iii)



(iv)

$$M_R=\begin{array}{c} \\ -2\\ -1\\ 0\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

(ب) $S = \{(1,1),(1,2),(3,1),(3,3)\}$ علاقة على $B=\{1,2,3\}$

(i) $S^{-1} = \{(1,1),(2,1),(1,3),(3,3)\}$

(ii) $S \cap S^{-1} = \{(1,1),(3,3)\}$

(iii) $S - S^{-1} = \{(1,2),(3,1)\}$

ملاحظة $S - S^{-1} = S \setminus (S \cap S^{-1})$

(iv) $S \circ S^{-1} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(3,1),(3,3)\}$

الفصل الاول 34/33

الجزء الثاني (1)

برهن بطريقة البرهان بالمكافئة العكسي

اذا كان $x^2+y^2 \geq 8$ فإن $x \geq 2$ أو $y \geq 2$

الحل: المكافئة العكسي للعبارة:

إذا كان $x < 2$ و $y < 2$ فإن $x^2+y^2 < 8$

نفرض $x < 2$ و $y < 2$

فإن $x^2 < 4$ و $y^2 < 4$

فإن $x^2+y^2 < 4+4=8$

وبالتالي: إذا كان $x^2+y^2 \geq 8$ فإن $x^2 \geq 2$ أو $y^2 \geq 2$

(ب) أثبت أن: $3^n > 2^{n+2}$ لكل $n \geq 4$

الخطوة الأساسية: $n = 4$

$3^4 = 81 > 2^{4+2} = 64$ (صائب)

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 4$

نفرض أن $3^k > 2^{k+2}$ ونبرهن أن $3^{k+1} > 2^{k+3}$

لدينا حسب فرضية الاستقراء: $3^k > 2^{k+2}$

ولدينا $3 > 2$

$3^k \cdot 3 > 2^{k+2} \cdot 2$

نضرب العبارتان ينتج: $3^{k+1} > 2^{k+3}$

وبالتالي

النتيجة: لكل $n \geq 4$, $3^n > 2^{n+2}$

الفصل الأول 35/36

س3 (ب)

$a_n = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{3} + 6$, $a_0 = 9$, $a_1 = 15$ لكل $n \geq 2$

أثبت أن $3 | a_n$ لكل $n \geq 0$

الحل: ← $a_0 = 9$ فإن $3|9$ (صائب)

$a_1 = 15$ فإن $3|15$

← ليكن $k \geq 1$ ونفرض أن $3|a_0$, $3|a_1$, ... , $3|a_k$

نبرهن أن $3 | a_{k+1}$

لدينا $a_{k+1} = \frac{a_k \cdot a_{k-1}}{3} + 6$ (التعريف الاستقرائي)

ولدينا $3|a_{k-1}$, $3|a_k$

فإنه يوجد $m, n \in \mathbb{Z}$ حيث $a_{k-1} = 3m$, $a_k = 3n$

فإن

$$a_{k+1} = \frac{a_k \cdot a_{k-1}}{3} + 6$$

$$= \frac{3n \cdot 3m}{3} + 6 = 3mn + 6 = 3(\underbrace{mn+2}_{\in \mathbb{Z}})$$

فإن $3 | a_{k+1}$

← وبالتالي $3 | a_n$ لكل $n \geq 0$