باب 1

الدوال الخطية الكسرية

1.1 الدوال الخطية الكسرية

1.1.1 الخصائص العامة للدوال الخطية الكسرية

تعريف 1.1.1

الدالة الخطية الكسرية و تسمى كذلك دالة موبيوس هي دالة التي تأخذ الشكل التالي:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

حيث $ad - bc \neq 0$.

ملاحظات 1.1.1

1. إذا كان $ad = bc$ فإن الدالة $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ثابتة.

2. الدالة الخطية الكسرية $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ حيث $ad - bc \neq 0$ معرفة على $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ إذا كان $c \neq 0$.

   نضيف للمجموعة $\mathbb{C}$ عنصرا آخر نسميه ∞ و نعرف $f(\dfrac{-d}{c}) = \infty$ و $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$ إذا كان $c \neq 0$ و $f(\infty) = \infty$ إذا كان $c = 0$.

   المجموعة $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ تسمى المستوي المركب الموسع و نرمز له بـ $\mathbb{C}_\infty$.

   الدالة الخطية الكسرية تصبح معرفة على $\mathbb{C}_\infty$ وتأخذ قيمها في نفس المستوي الموسع $\mathbb{C}_\infty$.

3. كل دالة خطية كسرية هي دالة تقابل من $\mathbb{C}_\infty$ إلى $\mathbb{C}_\infty$.

إذا كان $w \in \mathbb{C}_\infty$، فإن

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow z = \frac{-dw+b}{cw-a} = f^{-1}(w)$$

وهي دالة خطية كسرية.

4. مجموعة الدوال الخطية الكسرية $\mathcal{H}$ تمثل زمرة.

5. المعامل a, b, c, d ليست وحيدة لتعريف دالة خطية كسرية، لأنه يمكن ضرب كل هذه الأعداد بعدد غير صفري و لا تتغير الدالة.

6. لتكن f دالة خطية كسرية، $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
يمكن أن نفترض أن $ad - bc = 1$، و نسند للدالة f المصفوفة $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. هذه المصفوفة في الزمرة الخطية الخاصة $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$، للزمرة $\mathbb{C}^2$.
عكسيا إذا كانت مصفوفة $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$، نسند لها الدالة الخطية الكسرية $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
نلاحظ كذلك أن المصفوفة $-M_f$ تعرف نفس الدالة الخطية الكسرية.
إذاً يمكن تطابق زمرة الدوال الخطية الكسرية مع الزمرة $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$، و هي زمرة المصفوفات من الدرجة 2×2 حيث محددها 1، و نتطابق المصفوفة A مع المصفوفة $-A$.

7. لتكن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ مصفوفتين في $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$، $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ و $g(z) = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$.
الدالة $f \circ g$ هي كذلك دالة خطية كسرية و المصفوفة المسندة لها هي AB.

8. إذا كانت f دالة خطية كسرية مسندة إلى المصفوفة A، فإن f^{-1} هي الدالة الخطية الكسرية المسندة إلى المصفوفة A^{-1}.

9. فيما يلي، نعتبر مستقيم في $\mathbb{C}_\infty$ هو مستقيم في $\mathbb{C}$ مع إضافة النقطة ∞.
كذلك نعرف الدائرة العامة في $\mathbb{C}_\infty$، كل دائرة أو مستقيم في $\mathbb{C}_\infty$.

مبرهنة تمهيدية 1.1.1
الدالة الخطية الكسرية $f(z) = \dfrac{1}{z}$ تحول دائرة عامة إلى دائرة عامة في $\mathbb{C}_\infty$.

البرهان

ليكن $a \in \mathbb{C}$، $r > 0$ و $\mathscr{C}(a,r)$ الدائرة التي مركزها a و نصف قطرها r.

$$z \in \mathscr{C}(a,r) \iff |z-a|^2 = r^2 \iff |z|^2 - 2\operatorname{Re} z\bar{a} = r^2 - |a|^2.$$

الحالة الأولى: إذا كان $|a| = r$. في هذه الحالة يكون $0 \in \mathscr{C}(a,r)$.
و يعني هذا أن القطب 0 للدالة f موجود فوق الدائرة $\mathscr{C}(a,r)$.
ليكن $w = \frac{1}{z}$، إذاً

$$z \in \mathscr{C}(a,r) \iff 1 - \operatorname{Re} \bar{w}\bar{a} = 0.$$

إذاً صورة الدائرة $\mathscr{C}(a,r)$ بالدالة f في $\mathbb{C}_\infty$ هي المستقيم التي معادلته: $1 - \operatorname{Re} \bar{w}\bar{a} = 0$.

الحالة الثانية: $|a| \neq r$. في هذه الحالة يكون القطب 0 للدالة f ليس فوق الدائرة $\mathscr{C}(a,r)$.

$$z \in \mathscr{C}(a,r) \iff |w|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{w}\left(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}\right) + \frac{1}{|a|^2 - r^2} = 0$$

وهي معادلة الدائرة و التي نصف قطرها R، حيث $R^2 = \frac{1}{r^2 - |a|^2} - \frac{|a|^2}{(r^2 - |a|^2)^2}$، $R = \frac{r}{|r^2 - |a|^2|}$ و مركزها $\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}$.

نستنتج أنه إذا كان قطب الدالة f فوق الدائرة $\mathscr{C}(a,r)$، فإن صورة هذه الدائرة هي مستقيم، و إذا كان القطب ليس فوق الدائرة، فإن صورة الدائرة بالنسبة للدالة f هي دائرة.
باستعمال خصائص المجموعات المترابطة، نستنتج أن

1. إذا كان $0 \in \mathscr{C}(a,r)$، فإن صورة القرص $D(a,r)$ بالنسبة للدالة f هي نصف المستوي المحدود بالمستقيم $f(\mathscr{C}(a,r))$.

2. إذا كان $0 \in D(a,r)$، فإن صورة القرص $D(a,r)$ بالنسبة للدالة f هو مكمل القرص $D(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{|r^2 - |a|^2|})$.

3. إذا كان 0 هو في مكمل القرص $D(a,r)$، فإن صورة هذا القرص بالنسبة للدالة f هي القرص $D(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{|r^2 - |a|^2|})$.

ملاحظة 1.1.1
بما أن $f \circ f = \operatorname{Id}$، نستنتج أن صورة المستقيم الذي يمر من 0 بالنسبة للدالة f هي المستقيم الذي يمر من 0، و صورة f لدائرة التي تمر من 0 هو مستقيم و صورة دائرة أو مستقيم الذي لا يمر من 0

بالنسبة للدالة f هي دائرة.

1.1.2 ثبات مجموعة الدوائر و المستقيمات بالنسبة للدوال الخطية الكسرية

مبرهنة 1.1.2
كل دالة خطية كسرية تحول دائرة عامة إلى دائرة عامة في $\mathbb{C}_\infty$.

إذا كان ∞ قطب، في هذه الحالة $f(z) = az$، مع $a \neq 0$.

البرهان

لتكن f دالة خطية كسرية، $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

1. إذا كان $c = 0$، $f(z) = |\dfrac{a}{d}|e^{i\theta}z + \dfrac{b}{d}$، و بذلك تكون الدالة f تحصيل إنسحاب، دوران و تمدد. و هذه الدوال تحفظ مجموعة الدائرات العامة في $\mathbb{C}_\infty$.

2. إذا كان $c \neq 0$، فإن $f(z) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cz+d)}$.

لتكن $f_1(z) = cz$، $f_2(z) = z + d$، $f_3(z) = \dfrac{1}{z}$، $f_4(z) = \dfrac{bc-ad}{c}z$ و $f_5(z) = \dfrac{a}{c}z$.

إذاً $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$، تحصيل إنسحاب، دوران، تمدد وانقلاب. كل هذه الدوال تحفظ مجموعة الدائرات العامة في $\mathbb{C}_\infty$.

□

ملاحظة 1.1.2
نستنتج مم سبق أنه إذا كان قطب الدالة الخطية الكسرية f فوق الدائرة العامة، فإن صورة هذه الدائرة بالنسبة للدالة f هي مستقيم و إذا كان القطب ليس فوق الدائرة العامة، فإن صورة هذه الدائرة العامة هي دائرة .

أمثلة 1.1.1

1. ليكن $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$، $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ y = 0\}$ و $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$. $f(D) = D$ و $f(i) = \frac{1+i}{2}$، إذاً $f(\mathcal{H}^+) = \mathcal{H}^+$.

2. لتكن $Q = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x > 0\}$، $\Delta = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x = 0\}$ و $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

إذاً قطب الدالة ليس فوق المستقيم Δ، إذاً $f(\Delta)$ هي دائرة.

لمعرفة هذه الدائرة، يكفي معرفة صورة ثلاث نقاط من Δ، نجد أن صورة Δ هي الدائرة التي نصف قطرها $\frac{1}{2}$ و مركزها $\frac{1}{2}$ و بما أن $f(1) = \infty$، فإن صورة Q بالنسبة للدالة f هو مكمل القرص المغلق والذي نصف قطره $\frac{1}{2}$ و مركزه $\frac{1}{2}$.

3. لتكن $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$، D قرص الوحدة و $\mathscr{C}$ دائرة الوحدة.
بما أن قطب الدالة هو فوق الدائرة $\mathscr{C}$، فإن $f(\mathscr{C})$ هو مستقيم.
و لمعرفة هذا المستقيم، يكفي أن نعرف صورة نقطتين من الدائرة $\mathscr{C}$.
$f(\mathrm{i})$ و $f(-\mathrm{i})$ فوق المستقيم و معادلته هي $x = \frac{1}{2}$.
بما أن $f(0) = 1$، فإن $f(D)$ هو نصف المستوي $\{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C};\ x > \frac{1}{2}\}$.

ملاحظات 1.1.2

1. كل دالة خطية كسرية ليست دالة الوحدة لها نقطتين ثابتتين كحد أقصى.
المعادلة $z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ إذا كان $z \neq \infty$ متكافئة مع $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ و هذه لها حلين على أقصى حد في $\mathbb{C}$ و حلين في $\mathbb{C}_\infty$.

2. نستنتج أنه إذا كانت دالتان خطيتان كسريتان تتساويان في ثلاث نقاط في $\mathbb{C}_\infty$ هما متساويتان.

1.1.3 The Cross Ratios النسبة المتبادلة

تعريف 1.1.2
ليكن $\alpha, \beta\gamma \in \mathbb{C}_\infty$ ثلاث عناصر مختلفة.
نعرف الدالة الخطية الكسرية و نسميها النسبة المتبادلة *cross-ratio* بما يلي:

$S(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma) = \dfrac{z-\beta}{z-\gamma}\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}$، إذا كان $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

$S(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma) = \dfrac{z-\beta}{z-\gamma}$، إذا كان $\alpha = \infty$.

$S(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma) = \dfrac{\alpha-\gamma}{z-\gamma}$، إذا كان $\beta = \infty$.

و $S(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma) = \dfrac{z-\beta}{\alpha-\beta}$، إذا كان $\gamma = \infty$.

ملاحظات 1.1.3

1. التحويل S هو الدالة الخطية الكسرية الوحيدة التي تحقق $S(\alpha) = 1$، $S(\beta) = 0$ و $S(\gamma) = \infty$.

2. النسبة المتبادلة غير متغير بالدوال الخطية الكسرية (يعني إذا كانت T دالة خطية كسرية، فإن

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) = (T(z), T(\alpha), T(\beta), T(\gamma)).$$

ليكن S_1 النسبة المتبادلة المعرف بما يلي: $S_1(z) = (z, T(\alpha), T(\beta), T(\gamma))$،
التحويل S_1 يحقق: $S_1(T(\alpha)) = 1,$ $S_1(T(\beta)) = 0$ و $S_1(T(\gamma)) = \infty$.
إذاً $S_1 \circ T(\alpha) = 1,\ S_1 \circ T(\beta) = 0$، $S_1 \circ T(\gamma) = \infty$، و $S_1 \circ T = S$.

3. لكل $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ مختلفة و $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ مختلفة كذلك، توجد دالة خطية كسرية وحيدة تحول z_1 إلى w_1، z_2 إلى w_2 و z_3 إلى w_3.
لتكن $S_1(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ و $S_2(z) = (z, w_1, w_2, w_3)$. الدالة الخطية الكسرية $T = S_2^{-1} \circ S_1$ تحقق المطلوب.

4. كل دالة خطية كسرية حافظة للزوايا.

مبرهنة تمهيدية 1.1.3
العدد $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ يمثل عددا حقيقيا إذا و إذا فقط إذا كان كل الأعداد z_1, z_2, z_3, z_4 موجودة على نفس الدائرة. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $[z_1, z_2, z_3, z_4] < 0$، فإن الأعداد z_1, z_2, z_3, z_4 تظهر تباعا على الدائرة.

البرهان
لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة الوحيدة التي تمر من النقاط z_2، z_3 و z_4 و لتكن f الدالة الخطية الكسرية الوحدية التي تحقق $f(z_2) = 0$، $f(z_3) = 1$ و $f(z_4) = \infty$.
إذاً $f(\mathscr{C}) = \mathbb{R}$.
إذا كان $z_1 \in \mathscr{C}$ فإن $f(z_1) \in f(\mathscr{C}) = \mathbb{R}$، و هذا يبرهن الجزئ الأول من المبرهنة التمهيدية.
إذا كان $f(z_1) < 0$، فإن $f(z_j)$ تظهر على المستقيم في الترتيب التالي:
$f(z_1) < f(z_2) < f(z_3) < f(z_4)$، و يبقى هذا صحيح بالنسبة للصورة العكسية. □

مبرهنة 1.1.4 (Ptolemy's Theorem)
لتكن A, B, C, D أربع نقاط في المستوي، فإن.

$$\overline{AB}\ \overline{CD} + \overline{BC}\ \overline{AD} \geq \overline{AC}\ \overline{BD}.$$

و تكون المساواة إذا و إذا فقط إذا A, B, C, D موجودة على نفس الدائرة و تظهر في نفس الترتيب الأبجدي (الإتجاه المعاكس لعقارب الساعة).

البرهان
ليكن z_1, z_2, z_3, z_4 الأعداد المركبة المرتبطة على التوالي بالنقاط A, B, C, D. يمكن إثبات ما يلي بكل سهولة.

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4).$$

باستعمال متباينة المثلث نثبت أن

$$|z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3| \geq |z_1 - z_3||z_2 - z_4|,$$

و هذا يثبت الجزئ الأول من المبرهنة.
و تكون المساواة إذا كان المتجهين لهما نفس نفس الإتجاه، و هذا يعني أن:

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \in \mathbb{R}^+.$$

و هذا متكافئ مع أنه إذا كان النسبة المتبادلة $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ هو عدد حقيقي سالب.

1.1.4 الدوال الخطية الكسرية و التناظر

تعريف 1.1.3
نقول أن العددين z_1 و z_2 متناظرين بالنسبة للدائرة $\mathscr{C}(a, r)$ إذا كان: a, z_1 و z_2 على نفس نصف المستقيم الذي رأسه a و $|z_1 - a||a - z_2| = r^2$.

ملاحظات 1.1.4

1. يمكن بسهولة إثبات أن كل مستقيم أو دائرة تمر من النقاط z_1 و z_2 متعامدة مع $\mathscr{C}(a, r)$.

2. إذا كان $z \in \mathbb{C}$، فإن تناظر z بالنسبة للدائرة $\mathscr{C}(a, r)$ هو $z' = a + \dfrac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}$.
سنكتب $S_{\mathscr{C}}(z) = a + \dfrac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}$ صورة تناظر z بالنسبة للدائرة $\mathscr{C}(a, r)$.
نلاحظ أن الدوال $T(z) = \overline{SS_{\mathscr{C}}(z)}$ و $H(z) = S_{\mathscr{C}}(\bar{z})$ هي دوال خطية كسرية.
ليكن $\mathscr{D}$ مستقيم و معادلته: $z = \alpha + xe^{i\theta}$ ($x \in \mathbb{R}$، α و θ في $\mathbb{R}$). العدد المركب لمتناظرالنقطة z بالنسبة للمستقيم $\mathscr{D}$ هو $z' = S_{\mathscr{D}}(z) = \alpha + e^{2i\theta}(\bar{z} - \alpha)$. كذلك الدوال $T(z) = \overline{S_{\mathscr{D}}(z)}$ و $H(z) = S_{\mathscr{D}}(\bar{z})$ هي خطية كسرية.

مبرهنة 1.1.5
كل دالة خطية كسرية تحول نقطتين متناظرتين بالنسبة لدائرة عامة إلى نقطتين متناظرتين بالنسبة لصورة اللدائرة.

البرهان
لتكن $\mathcal{F}$ دائرة عامة و f دالة خطية كسرية. ليكن $S(z)$ متناظر z بالنسبة للدائرة العامة $\mathcal{F}$.
إذا كان $H = f(\mathcal{F})$ و $T(z)$ متناظر z بالنسبة للدائرة العامة H.
لإثبات المبرهنة، يكفي أن نثبت أن $T \circ f(z) = f \circ S(z)$.
باستعمال الملاحظة السابقة $\overline{T \circ f}$ و $\overline{f \circ S}$ هي دوال خطية كسرية.
لإثبات أن $T \circ f$ و $f \circ S$ متساوية يكفي إثبات أنها متساوية في ثلاث نقاط مختلفة. و لكن الدالتين متساويتين على $\mathcal{F}$.

□

1.2 تطبيق

1. **توصيف الدوال الخطية الكسرية التي تحول قرص الوحدة على نفسه.**

لتكن h دالة خطية كسرية تحول قرص الوحدة على نفسه. و ليكن $a \in D$ بحيث $h(a) = 0$، إذًا $h(\frac{1}{\bar{a}}) = \infty$. ($\frac{1}{\bar{a}}$ هو متناظر a بالنسبة لدائرة الوحدة. و إذا كان $a = 0$، $\frac{1}{\bar{a}} = \infty$).
إذًا $h(z) = k\dfrac{a - z}{1 - \bar{a}z}$. و إذا كانت الدالة h تحول القرص D على نفسه، فإن $k = e^{i\theta}$، حيث $\theta \in \mathbb{R}$.

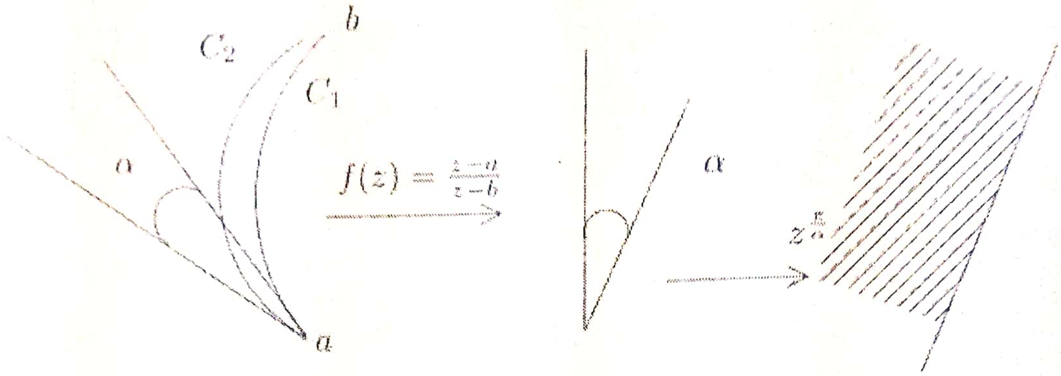
2. **توصيف الدوال الخطية الكسرية التي تحول نصف المستوي الأعلى على قرص الوحدة**

ليكن $\mathcal{H}^+$ النصف المستوي الأعلى و h دالة خطية كسرية و التي تحول $\mathcal{H}^+$ على قرص الوحدة D. يوجد $\alpha \in \mathcal{H}^+$ بحيث $h(\alpha) = 0$، إذًا $h(\bar{\alpha}) = \infty$ و بذلك $h(z) = e^{i\theta}\dfrac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$.

3. **توصيف الدوال الخطية الكسرية التي تحول هلال على نصف مستوي**

ليكن المفتوح Ω المعرف بالمنطقة الموجودة بين قوسي الدائرتين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$. (??).
Ω بسيط الترابط.
الدالة $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ المعرفة بما يلي $f(z) = \dfrac{z - a}{z - b}$ تحول المفتوح Ω إلى المفتوح Ω' المعرف بالقطاع الموجود بين نصف المستقيمين L_1 و L_2 و رأسهما 0 و الزاوية التي بين L_1 و L_2 تساوي α، حيث α هي الزاوية التي بين الدائرتين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ في النقطة a. (L_1 هي صورة قوس الدائرة

$\mathscr{C}_1$ بالدالة f و L_2 هي صورة قوس الدائرة $\mathscr{C}_2$ بالدالة f). الدالة $z \longmapsto z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ تحول المفتوح Ω' إلى نصف مستوي.



شكل 1.1:

تمرين 1.2.1

لتكن $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ |z - \frac{\mathrm{i}}{2}| < 1,\ |z + \frac{\mathrm{i}}{2}| < 1\}$.

(ا) أثبت أن Ω بسيط الترابط.

(ب) لتكن $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z-\frac{\mathrm{i}}{2}| = 1\}$، $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z+\frac{\mathrm{i}}{2}| = 1\}$، $A = -\sqrt{3}/2$ و $B = \sqrt{3}/2$. لتكن الدالة $f(z) = \dfrac{z + \sqrt{3}/2}{z - \sqrt{3}/2}$.

أ) أوجد الزاوية التي بين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في النقطة A.

ب) أوجد $f(\Omega)$ و استنتج هولومرفية تطابق بين Ω و نصف المستوي الأعلى.

الحل

(ا) Ω محدب إذًا هو بسيط الترابط.

(ب) أ) لتكن $\gamma_1(t) = \dfrac{\mathrm{i}}{2} + e^{\mathrm{i}t}$ و $\gamma_2(t) = -\dfrac{\mathrm{i}}{2} + e^{\mathrm{i}t}$ لكل $t \in [0, 2\pi]$.

$t = \dfrac{7\pi}{6} \iff \gamma_1(t) = -\sqrt{3}/2$ و $t = \dfrac{5\pi}{6} \iff \gamma_2(t) = -\sqrt{3}/2$، إذًا بما أن $\gamma_1'(t) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}$ و $\gamma_2'(t) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}$، الزاوية التي بين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في النقطة A هي $\frac{\pi}{3}$.

ب) $f(-\frac{i}{2}) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ و $f(\frac{i}{2}) = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ و $f(0) = -1$، إذاً $f(\Omega) = \{z = re^{i\theta};\ \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3},\ r > 0\}$.

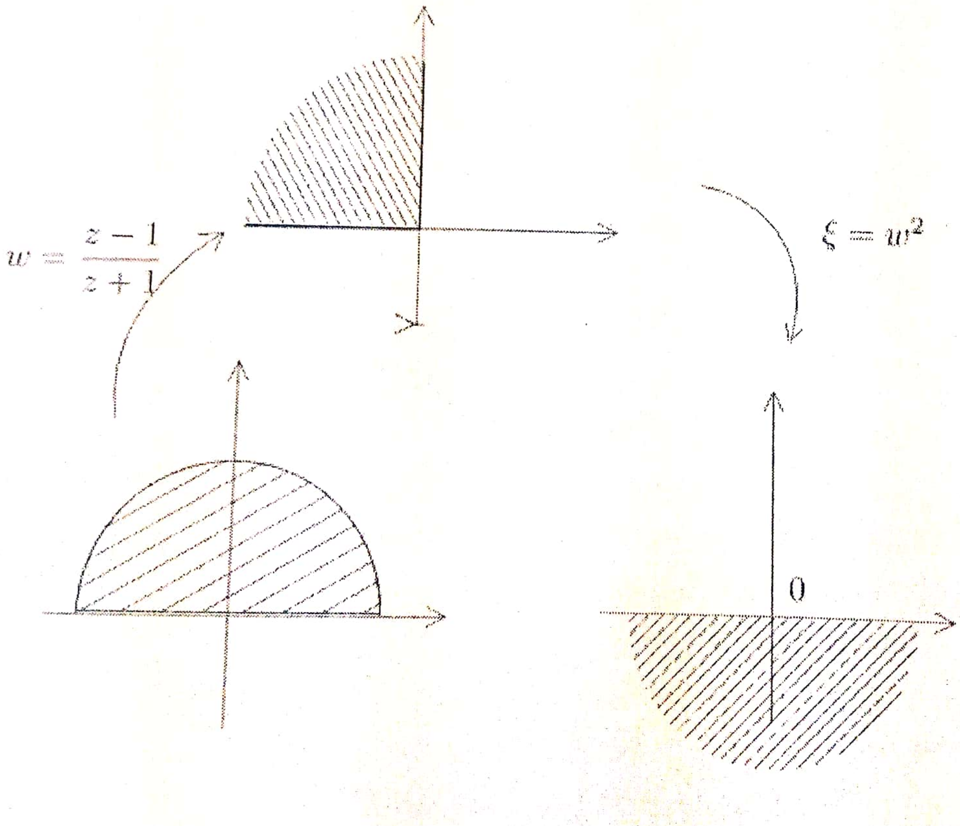
إذا كان $z = re^{i\theta}$ حيث $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}$، $z^{\frac{3}{2}} = r^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{3}{2}\theta}$ حيث $\pi < \frac{3}{2}\theta < 2\pi$.

الدالة $h(z) = \frac{z+i}{z-i}$ هي دالة هولومرفية تطابق بين نصف المستوي $\{z = re^{i\theta};\ \pi < \theta < 2\pi\}$ و قرص الوحدة. إذاً $h \circ g \circ f$ هي دالة هولومرفية تطابق بين Ω و قرص الوحدة، حيث $g(z) = z^{\frac{3}{2}}$.

4. توصيف الدوال الهولومرفية و تطابق بين نصف قرص و نصف مستوي

إذا كان Ω هو نصف القرص الموجود في النصف المستوي الأعلى و المحدود بنصف الدائرة التي مركزها 0 و نصف قطرها 1. (??).

الدالة الخطية الكسرية $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ تحول Ω إلى ربع المستوي $\{z \in \mathbb{C};\ x < 0\ \&\ y > 0\}$ و الدالة $g(z) = -z^2$ تحول هذا الربع المستوي إلى نصف المستوي الأعلى.



شكل 1.2: