الفصل الثامن : جبر بوول والمسامات المنطقية

(٧ ـ ٢) الجبر البوليني (الجبر الثنائي) :

عبارة عن :

(١) مجموعة من العناصر $a, b, c, \ldots$

(٢) الجمع $+$

(٣) الضرب $*$

(٤) المكمل $'$

(٥) صفر 0

(٦) واحد 1

مثال :

$$Z = a * b + c'$$

$$Z = a * b$$

* مقارنة :

المجموعات	حسابات الصواب	الجبر الثنائي
$\cap$	$\wedge$	$*$
$\cup$	$\vee$	$+$
A^c	$\vee$	$'$
ϕ	F	0
$\mathcal{U}$	T	1

* في نظام الجبر البوليني (الثنائي) لابد من توفر المسلمات التالية :

(١) أن تكون العملية إبدالية :

$$a + b = b + a$$

$$a * b = b * a$$

(٢) أن تكون محققة لقانون التوزيع :

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

(٣) أن تكون محايدة :

$$a + 0 = a$$

$$a * 1 = a$$

(٤) قانون المكمل :

$$a + a' = 1$$

$$a * a' = 0$$

ملاحظة :

بالإمكان حذف العملية * في جبر بوول أي : $a * b \xrightarrow{\text{نكتبها}} ab$

* الأولية في تنفيذ العمليات :

(١) الأقواس .

(٢) المكمل .

(٣) الضرب .

(٤) الجمع .

(٧-٣) التوافق (الترافق) :

$$* \longleftrightarrow +$$

$$0 \longleftrightarrow 1$$

مثال (١) :

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

المرافق للمعادلة السابقة هو :

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

نظرية (٧-١) :

المرافق لأي نظرية في الجبر الثنائي هي أيضاً نظرية .

(٧-٤) نظريات أساسية :

نظرية (٧-٢) :

إذا كانت a, b, c عناصر في الجبر الثنائي فإن :

(١)
$$a + a = a$$
$$a * a = a$$

(٢)
$$a + 1 = 1$$
$$a * 0 = 0$$

(٣)
$$a + (a * b) = a$$
$$a * (a + b) = a$$

(٤)
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

مثال (٢) :

أثبت أن $a * (a + b) = a$ (أ)

$a + (a * b) = a$ (ب)

الحل

(أ) $a * (a + b) = (a + 0) * (a + b)$

$= a + (0 * b)$

$= a + 0$

$= a$ وهو المطلوب إثباته

(ب) $a + (a * b) = (a * 1) + (a * b)$

$= a * (1 + b)$

$= a * 1$

$= a$ وهو المطلوب إثباته

نظرية (٧ - ٣) :

ليكن a عنصر في B

(١) إذا كان $a + x = 1$ و $a * x = 0$ فإن $x = a'$

(٢) $(a')' = a$ قانون تكامل الكامل

(٣) $1' = 0$

$0' = 1$

نظرية (٧ - ٤) :

قانون دي مورجان

$(a + b)' = a' * b'$

$(a * b)' = a' + b'$

(٦ ـ ٧) تعبيرات الجبر الثنائي (بوول)، صورة مجموع حواصل الضرب :

- تعبيرات الجبر الثنائي :

عبارة عن متغيرات تستخدم + ، × ، ′ ، مثل :

(i) $E = xy + zx$

(ii) $E = x + y'z + xz'$

- صورة مجموع حواصل الضرب :

يقال إن التعبير الثنائي E في صورة مجموع حاصل الضرب إذا كان :

١) ـ E هو حاصل ضرب حد أساسي ، أو مجموعة من الحدود فواصل الضرب الأساسية .

٢) ـ أنه لا يكون أحد الحدود متضمناً في الآخر (أي لا يكون محتوى) .

مثال (٢) :

$E = xz'$ ← حاصل ضرب أساسي .

$E = xy'z$ ← 〃 〃 〃 .

$E = xyzy'$ ← ليس حاصل ضرب أساسي لوجود y و y' .

$E = xzyz$ ← 〃 〃 〃 〃 〃 z مرتين .

مثال (٤) :

$E = x'z + x'yz$ ← $x'z$ متضمناً في الحد $x'yz$.

$E = xzy + x'yzw$ ← xzy ليس متضمناً في الحد $x'yzw$.

مثال (٥) :

هل تعبير بوول (الجبر الثنائي) $E = xyz' + xyzx + xyy'$ في صورة مجموع حواصل الضرب ؟

الحل

لا ليس في مجموع حواصل الضرب وذلك لعدم توفر الشرط الأول حيث $xyzx$ ليس حاصل ضرب أساسي ، وكذلك xyy' ليس حاصل ضرب أساسي

قاعدة : أي حاصل ضرب ثنائي يمكن إختزاله إلى الصفر أو حاصل ضرب أساسي

مثال (٦) :

$$\begin{aligned}(i)\quad E &= xyzy' \\ &= xzyy' \\ &= xz(0) \quad \text{------} \quad yy' = 0 \\ &= 0 .\end{aligned}$$

لأن $yy' = 0$

$$\begin{aligned}(ii)\quad E &= xzyz \\ &= xy(zz) \\ &= xyz \quad \text{------} \quad zz = z\end{aligned}$$

لأن $zz = z$

$$\begin{aligned}(iii)\quad E &= xyz' + xy'zx + xyy' \\ &= xyz' + y'z(xx) + x(yy') \\ &= xyz' + y'zx + x(0) \\ &= xyz' + y'zx .\end{aligned}$$

مثال (٧) :

$$E = xz' + y'z + xyz'$$

(أ) هل E على صورة مجموع حواصل ضرب ؟

(ب) هل يمكن وضعه في صورة حواصل ضرب ؟

الحل

(أ) E ليست على صورة مجموع حواصل ضرب وذلك لعدم توفر الشرط الثاني .

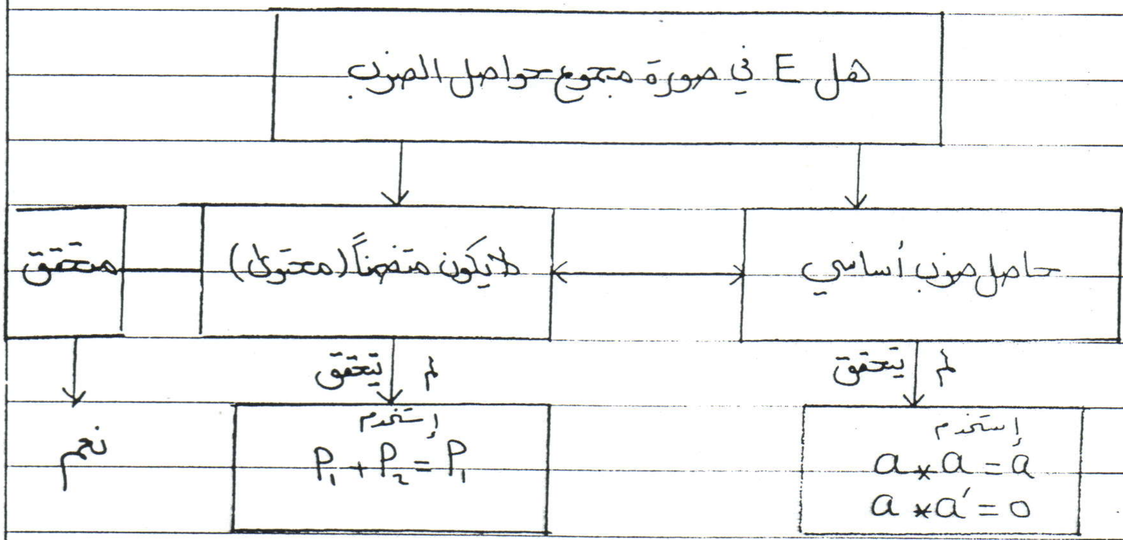
(ب) نعم ، وللتخلص من الاحتواء وذلك لأن xz' متضمناً في xyz'

نستخدم القانون $a + a*b = a$

$$xz' + xz'y = xz'$$

$$\therefore E = y'z + xz' .$$

قاعدة : إذا كان الحد P_1 متضمناً في الحد P_2 من قانون الامتصاص $P_1 + P_2 = P_1$



خلاصة :

أي تعبير جبر ثنائي غير صفري (E) يمكن وضعه في صورة مجموع حواصل ضرب بالطرق التالية :

١- إستخدم نظرية (٧-٤) دى مورجان وقانون مكمل المكمل.

٢- إستخدم قانون التوزيع.

٣- إستخدم قانون التبديل مع قوانين نظرية (٧-٢).

مثال (٨) :

ضع تعبير الحد الثنائي (بوول) $E = x(y'z)'$ في صورة مجموع حواصل ضرب ؟

الحل

$$E = x(y'z)'$$
$$= x((y')' + z') \quad \text{.......... نظرية دي مورجان}$$
$$= x(y + z') \quad \text{.......... قانون مكمل المكمل}$$
$$= xy + xz' \quad \text{.......... قانون التوزيع}$$

مثال (٩) :

ضع تعبير الجبر الثنائي : $E = ((xy')z)'z + yz$ في صورة مجموع مواصل ضرب ؟

الحل

$$E = ((xy')z)'z + yz$$
$$= ((xy')' + z')z + yz$$
$$= ((x' + (y')') + z')z + yz$$
$$= ((x' + y) + z')z + yz$$
$$= x'z + yz + z'z + yz$$
$$= x'z + yz \quad \text{------} \quad z'z = 0 \,،\, yz + yz = yz \text{ لأن}$$

- الصورة الكاملة لمجموع مواصل الضرب :

يقال أن التعبير الجبر الثنائي E في الصورة الكاملة لمجموع مواصل ضرب إذا كان :

١- أن تكون E في صورة مجموع مواصل الضرب .

٢- كل حاصل ضرب يحتوي على جميع المتغيرات .

مثال (١٠) : ضع التعبير الثنائي E في الصورة الكاملة لمجموع مواصل الضرب :

$$E = xy + xz + yz$$

الحل

$$E = xy + xz + yz$$
$$= xy(z + z') + xz(y + y') + yz(x + x')$$
$$= xyz + xyz' + xzy + xzy' + yzx + yzx'$$

مثال (١١) : ضع التعبير الثنائي E في الصورة الكاملة لمجموع مواصل الضرب :

$$E = x'z + y'$$

الحل

$$E = x'z + y'$$
$$= x'z(y+y') + y'(x+x')$$
$$= x'zy + x'zy' + y'x + y'x'$$
$$= x'zy + x'zy' + y'x(z+z') + y'x'(z+z')$$
$$= x'zy + x'zy' + y'xz + y'xz' + y'x'z + y'x'z'$$

قاعدة : أي تعبير جبر ثنائي غير صفري يمكن وضعه في الصورة الكاملة لمجموع حواصل الضرب وهذا التمثيل وحيد .

مثال (١٢) : ضع تعبير بول (التعبير الثنائي) التالي :

$$E = (x'y)'(x' + xyz')$$

أ) في صورة مجموع حواصل ضرب

ب) ثم في الصورة الكاملة لمجموع حاصل الضرب .

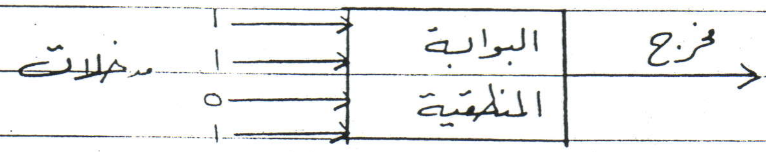
الحل

أ)
$$E = (x'y)'(x' + xyz')$$
$$= ((x')' + y')(x' + xyz')$$
$$= (x + y')(x' + xyz')$$
$$= x(x' + xyz') + y'(x' + xyz')$$
$$= xx' + xxyz' + y'x' + y'xyz'$$
$$= xyz' + y'x'$$

ب)
$$E = xyz' + y'x'$$
$$= xyz' + y'x'(z + z')$$
$$= xyz' + y'x'z + y'x'z'.$$

(٧-٧) الصمامات المنطقية :

في هذا البند نبدأ دراسة نوع معين من الدوائر تسمى الدوائر المنطقية ، هذه الدوائر يمكن تصورها كـ كينات تحتوى على جهاز أو أكثر للإدخال وجهاز إخراج واحد فقط .



- البوابة المنطقية :

هي أجهزة كهربائية أو الكترونية لها عدة مداخل ومخرج واحد فقط .

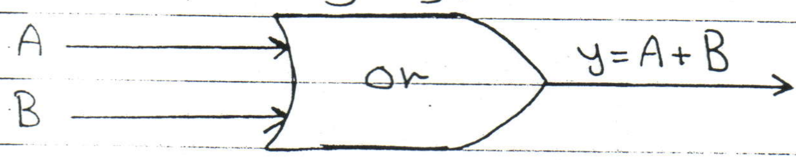
- الهدف : تصميم الدوائر المنطقية وبأبسط صورة ولتحقيق غاية معينة .

- أنواع البوابات المنطقية :

1) بوابة or . OR Gate
2) بوابة and . and Gate
3) بوابة not . not Gate

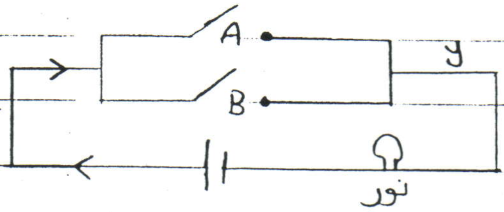
* البوابة OR (الصمام or) :

الرمز

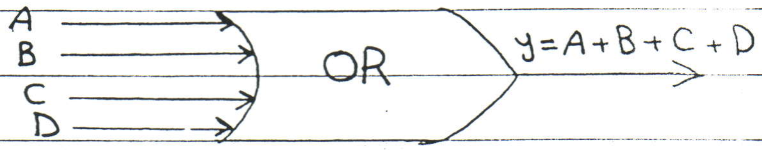


جدول الصواب

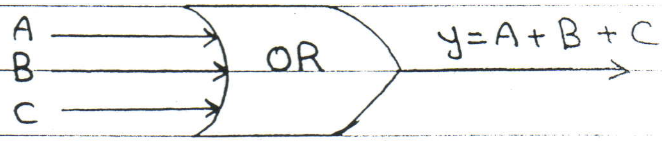
A	B	y=A+B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



التوازي



مثال (١٣) :



أوجد الخارج :

A = 10010

B = 00101

C = 10001

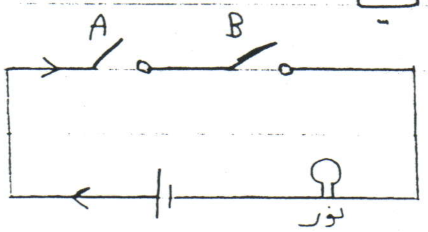
الحل

A = 10010
B = 00101
C = 10001

y = 10111

* البوابة AND (الضام) (and) :

التوالي



جدول الصواب

A	B	y= AB
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

مثال (١٧) :

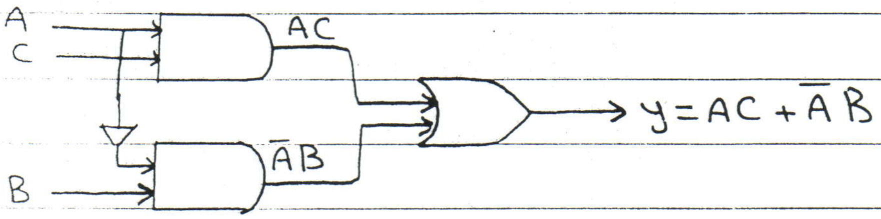
ضع الدائرة المنطقية في أبسط صورة :

$$y = ABC + A\bar{B}C + \bar{A}B$$

الحل

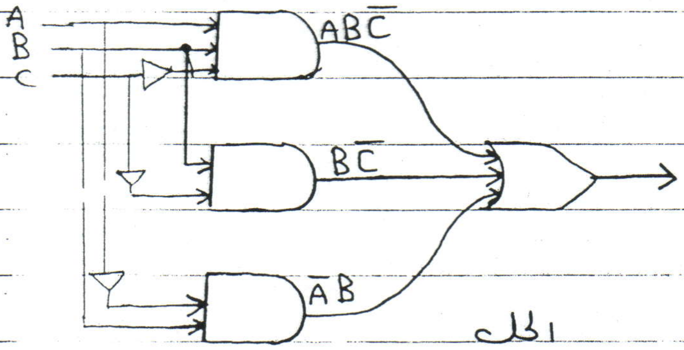
$$y = AC(B + \bar{B}) + \bar{A}B$$
$$= AC + \bar{A}B$$

تصبح الرسم :



مثال (١٨) : ١) أوجد التعبير البوليني للدائرة المنطقية الموضحة.

٢) أوجد جدول الصواب للدائرة المنطقية الموضحة



الحل

١) $y = AB\bar{C} + B\bar{C} + \bar{A}B$

٢)

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{C}$	ABC	$B\bar{C}$	$\bar{A}B$	y
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0