# الفصل السادس : الفئات والعلاقات

(٦-١) : مقدمة :

للفئات لغة ورموز خاصة بها وتعد في حقيقة الأمر أساساً ومنطلقاً لكثير من فروع الرياضيات المختلفة وتسمى الأشياء التي تتألف منها مجموعة ما عناصر هذه المجموعة (الفئة) أو نقاطها .

(٦-٢) : الفئات (المجموعات) والعناصر :

الفئات : هي مجموعة من العناصر لها خاصية مشتركة .

للدلالة على الفئات ← $A , B , X , Y$ رموز كبيرة .

للدلالة على العناصر ← $a , b , x , y$ رموز صغيرة .

طرق كتابة المجموعات :

١) - طريقة سرد العناصر .

مثال :

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

أو $B = \{x, y, z, p, t\}$

٢) طريقة كتابة الخاصية المشتركة لعناصر الفئة أو وصف لعناصر الفئة .

مثال :

$A = \{x : \text{عدد زوجي } x\}$

أو

$B = \{x : \text{عدد صحيح } x \text{ و } x > 0\}$

تعريفات :

١) - $\in$ ينتمي .  ٢) $=$ يساوي

$\notin$ لا ينتمي .  $\neq$ لا يساوي

} بين المجموعات

أمثلة (١) :

① إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}$ فأكمل الفراغ التالي :

$3 \boxed{\in} A$

$9 \boxed{\notin} A$

② إذا كانت $B=\{x : x$ عدد موجب $, x \geq 10\}$ فأكمل التالي :

$12 \boxed{\in} A$

$15 \boxed{\in} A$

$4 \boxed{\notin} A$

$-6 \boxed{\notin} A$

$10 \boxed{\in} A$

③ إذا كانت :

$A=\{4,8,16\}$ $\quad E=\{16,4,8\}$

$B=\{2^2,2^3,2^4\}$ $\quad F=\{4,4,16,8\}$

$D=\{5,9,13\}$

فأكمل الفراغات التالية :

$A \boxed{=} B$ , $A \boxed{\neq} D$ , $A \boxed{=} E$ , $B \boxed{\neq} D$

$D \boxed{\neq} E$ , $A \boxed{=} F$

(٦-٣) المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية :

- المجموعة الشاملة :

مجموعة كبيرة ثابتة تشتمل على جميع المجموعات .

$U=\{A,B,C,\dots\}$

- المجموعة الخالية :

هي المجموعة التي لا يوجد بها عناصر وترمز بالرمز $\phi$ .

$\phi=\{\ \}$

مثال :

$B=\{x : x$ عدد موجب $, x<0\}$ . $\#$ $B=\phi=\{\ \}$ .

## (٦-٤) المجموعات الجزئية :

نستخدم الرمزين $\subset$ مجموعة جزئية .

$\not\subset$ ليست مجموعة جزئية .

إذا كان كل عنصر في المجموعة $A$ هو عنصر في المجموعة $B$ فإن $A \subset B$

أي أن $A$ جزئية في المجموعة $B$ .

### مثال (٢) :

إذا كانت : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $C = \{3, 5\}$

$B = \{3, 4, 5\}$ ، $D = \{1, 2, 3, 6\}$

أكمل الفراغات التالية :

$C \boxed{\subset} A$ , $C \boxed{\subset} B$ , $D \boxed{\not\subset} A$ , $B \boxed{\subset} A$

$D \boxed{\not\subset} C$ , $D \boxed{\not\subset} B$ , $A \boxed{\not\subset} B$

### نظرية (١) :

(i) لأي مجموعة $A$ فإن $\phi \subset A \subset U$ .

(ii) لأي مجموعة $A$ فإن $A \subset A$ .

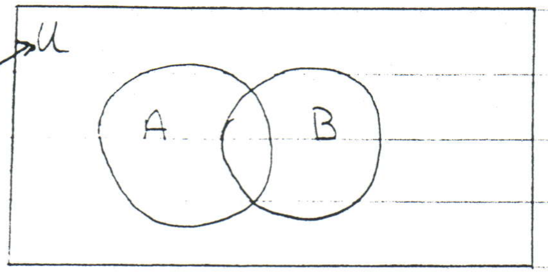
(iii) إذا كانت $A \subset B$ و $B \subset C$ فإن $A \subset C$ .

(iv) $A = B$ إذا وفقط إذا كانت $A \subset B$ , $B \subset A$

## (٦-٥) أشكال ڤن Venn Diagram :

هي عبارة عن تمثيل مصور للمجموعات وبشكل عام تمثل كالتالي :

المجموعة الشاملة $U$ .




$A \subset U$ , $B \subset U$

## (٦-٦) الاتحاد والتقاطع :

* يرمز لاتحاد مجموعتين $\Leftarrow$ $A \cup B$

أي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى $A$ أو $B$ .

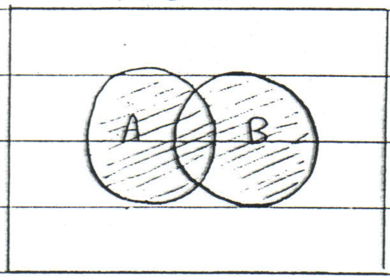
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$

* يرمز لتقاطع مجموعتين $\Leftarrow$ $A \cap B$

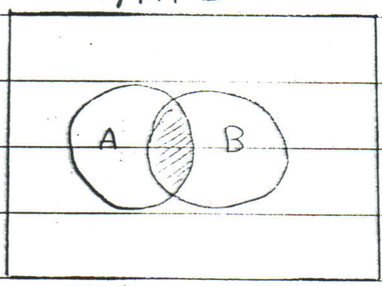
أي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى $A$ و $B$ .

$A \cap B = \{x : x \in A \ , \ x \in B\}$

$A \cup B$




$A \cap B$




مثال (٣) :

إذا كانت : $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{b\}$ ، $C = \{d, c, f\}$

أوجد ما يلي :

$A \cap C = \{c\}$ .

$B \cup C = \{b, d, c, f\}$ .

$B \cap C = \{\phi\}$ .

$A \cup B = \{a, b, c\}$ .

$A \cap B = \{b\}$ .

$A \cup C = \{a, b, c, d, f\}$ .

نظرية (٢) :

إذا كانت $A \subset B$ فإن : (i) $A \cap B = A$

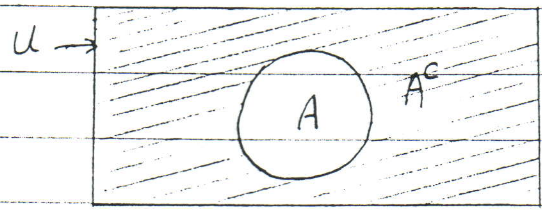
(ii) $A \cup B = B$

(٦-٧) المكملات :

تذكر أن جميع الفئات التي تتعامل معها في وقت ما هي فئات جزئية من فئة شاملة ثابتة $U$ ،

المكمل المطلق أو مكمل الفئة $A$ : هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى $U$ ولا تنتمي إلى $A$ ... ويرمز له بالرمز $A^c$ أي أن :

$$A^c=\{x : x\in U , x\notin A\}$$




إذا كان لدينا مجموعتين $A$ , $B$ فمكمل $B$ بالنسبة لـ $A$ يطلق عليه اسم المكمل النسبي ويرمز له بالرموز التالية :

(i) $A\setminus B$

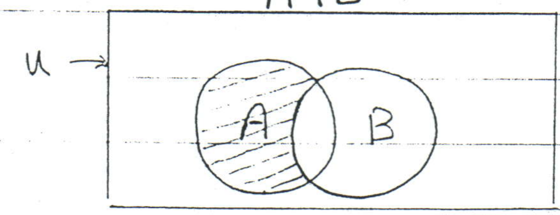
(ii) $A-B$

(iii) $A-\{A\cap B\}$

ويعرف كما يلي :

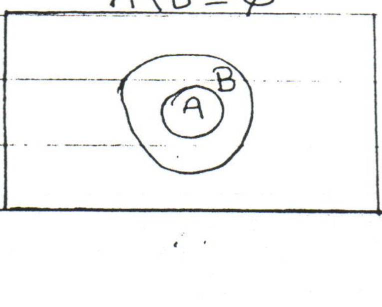
$$A\setminus B=\{x : x\in A , x\notin B\}$$

$A\setminus B$

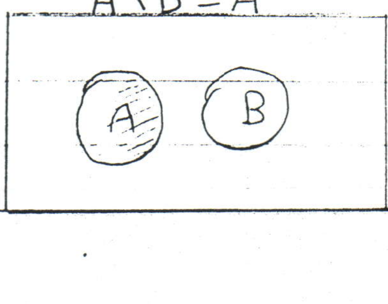



ملاحظة : في حالات خاصة إذا كانت $A\subset B$ أو كانت $A,B$ مجموعتين منفصلتين فإن $A\setminus B$ يصبح كتالي :

$A\setminus B=\emptyset$




$A\setminus B=A$



مثال (٤) :

إذا كانت المجموعة الشاملة $U$ هي : $U = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$

وكانت $A = \{1,2,3,4,5\}$ & $B = \{4,5,6,7\}$ & $C = \{1,3,5,7,9\}$

فأوجد ما يلي :

$A^c = \{6,7,8,9\}$ .  $A \setminus B = \{1,2,3\}$ .

$B^c = \{1,2,3,8,9\}$ .  $B \setminus A = \{6,7\}$ .

$C^c = \{2,4,6,8\}$ .  $A \setminus C = \{2,4\}$ .

---

مثال (٥) :

لتكن $U = \{1,2,3,\dots\}$ هي الفئة الشاملة هي الأعداد الصحيحة الموجبة ، ولتكن $A = \{1,2,3,4\}$ & $B = \{3,4,5,6,7\}$ ولتكن $E = \{2,4,6,8,\dots\}$ هي الأعداد الزوجية فأوجد مكمل $A, B, C$ ؟ الحل

$A^c = \{5,6,7,\dots\}$ .

$B^c = \{1,2,8,9,10,\dots\}$ .

$E^c = \{1,3,5,7,\dots\} \rightarrow$ الأعداد الفردية .

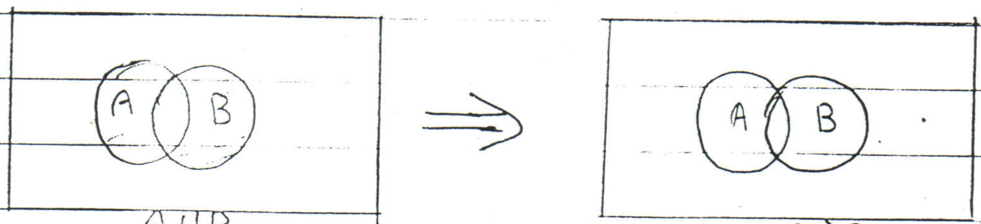
---

مثال (٦) :

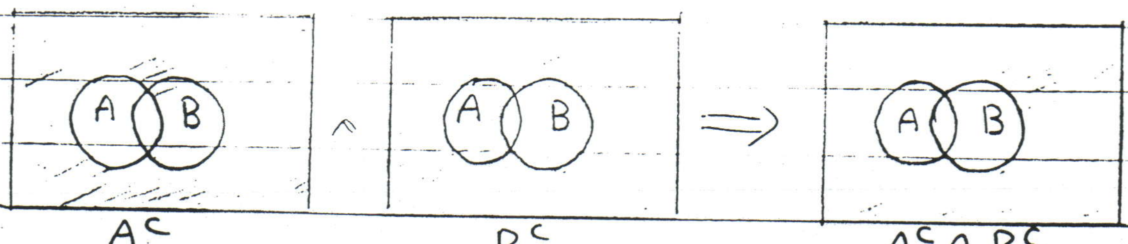
باستخدام أشكال فن أثبت ان مكمل اتحاد مجموعتين يساوي تقاطع مكملي $A, B$ أي أثبت أن : $\underbrace{(A \cup B)^c}_{(1)} = A^c \cap B^c$

الحل

(١)



$A \cup B$  $(A \cup B)^c$



$A^c$  $B^c$  $A^c \cap B^c$

(٦_٨) جبر المجموعات والتوافق :

$\cup \rightarrow \vee$ , or .

$\cap \rightarrow \wedge$ , and .

متممات $A^c \rightarrow \sim$ , not .

قوانين جبر المجموعات :

1. a) $A \cup A = A$.
   b) $A \cap A = A$.

2. a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. قانونا الدمج
   b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. a) $A \cup B = B \cup A$. قانونا التبادل
   b) $A \cap B = B \cap A$.

4. a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. قانونا التوزيع
   b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

قوانين المحايدة

5. a) $A \cup \phi = A$.
   b) $A \cap \mathcal{U} = A$.
6. a) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
   b) $A \cap \phi = \phi$.

7. $(A^c)^c = A$. قانون متمم المتمم

8. a) $A \cup A^c = \mathcal{U}$.
   b) $A \cap A^c = \phi$.

9. a) $\mathcal{U}^c = \phi$.
   b) $\phi^c = \mathcal{U}$.

10. a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
    b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

* التوافق يتم :

$$\cup \leftrightarrows \cap$$

$$\mathcal{U} \leftrightarrows \phi$$

بملاحظة قوانين جبر المجموعات السابقة أن الفقرة (b) لكل قانون هو المرافق للمعادلة في الفقرة (a) .

مثال (٧) :

أكتب المرافق في المعادلات التالية :

(أ) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup \phi$

المرافق ← $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap \mathcal{U}$

(ب) $(A \cap \mathcal{U}) \cup (B \cap A) = A$

المرافق ← $(A \cup \phi) \cap (B \cup A) = A$

مثال (٨) :

أثبت أن : (أ) $(\mathcal{U} \cap A) \cup (B \cap A) = A$

(ب) $(\phi \cup A) \cap (B \cup A) = A$

الحل

(أ) $(\mathcal{U} \cap A) \cup (B \cap A) = (A \cap \mathcal{U}) \cup (A \cap B)$ ........ قانون التبادل

$= A \cap (\mathcal{U} \cup B)$ -------- قانون التوزيع

$= A \cap \mathcal{U}$ -------- انظر قانون (٤) فقرة (b)

$= A$ -------- انظر قانون (٢) فقرة (b)

وهو المطلوب إثباته .

(ب) $(\phi \cup A) \cap (B \cup A) = (A \cup \phi) \cap (A \cup B)$

$= A \cup (\phi \cap B)$

$= A \cup \phi$

$= A$

وهو المطلوب إثباته .

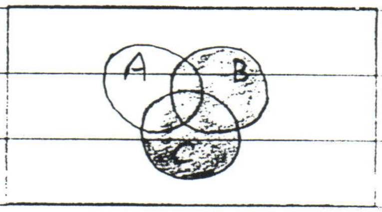
مثال (٩):

وضح قانون التوزيع بإستخدام أشكال فن:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

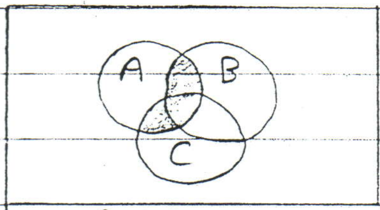
الحل

الطرف الأيسر



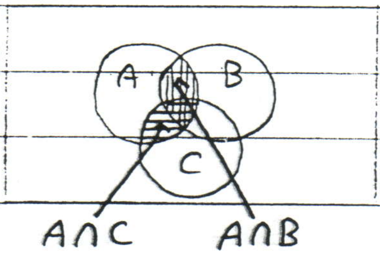

(BUC)

$\Rightarrow$

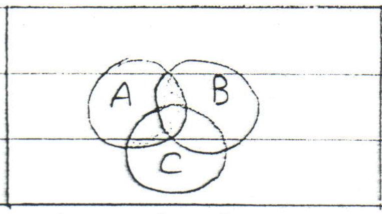



$A \cap (B \cup C)$

الطرف الأيمن




$\Rightarrow$




$(A \cap B) \cup (A \cap C$

(٦-١١): الأزواج المرتبة وضرب المجموعات:

ترتيب العناصر في المجموعة المكونة من عنصرين أو أكثر ليس له أهمية

مثلاً: $\{3,5\} = \{5,3\}$

من جهة أخرى الزوج المرتب يتكون من عنصرين ، أحدهما يسمى العنصر الأول والآخر يسمى العنصر الثاني ونكتب: $(a,b)$

حيث $a$ هو العنصر الأول.

$b$ هو العنصر الثاني.

وبالنسبة لضرب المجموعات فيعرف كالتالي:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

وكثيراً مانكتب $A^2$ بدلاً من كتابة $A \times A$.

* ملاحظة:

الزوجان المرتبان $(a,b)$ و $(c,d)$ يتساويان إذا وفقط إذا كان $a=c, b=d$.

مثال (١٠):

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{a, b\}$ فأحسب $A \times B$ ؟

الحل

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}.$$

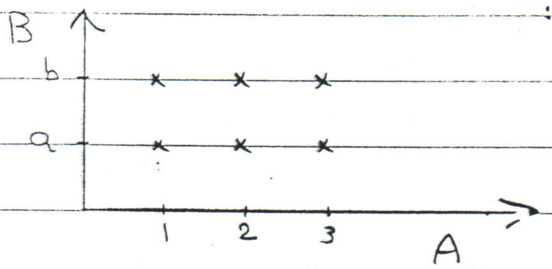
$$\therefore n(A \times B) = n(A) * n(B)$$
$$= 3 * 2$$
$$= 6.$$

حيث أن $n(A \times B) \Leftarrow$ عدد عناصر المجموعة $(A \times B)$.

$n(A) \Leftarrow$ عدد عناصر المجموعة $A$.

$n(B) \Leftarrow$ عدد عناصر المجموعة $B$.

وتمثل $A \times B$ كتالي:




$$A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A \text{ و } b \in B, c \in C\}.$$

مثال (١١):

إذا كانت $A = \{1, 2\}$

و $B = \{x, y, z\}$

$C = \{3, 4\}$

فأوجد المجموعة $A \times B \times C$ ؟

الحل

أولاً نحسب عدد عناصر المجموعة $A \times B \times C$ وهي:

$$n(A \times B \times C) = n(A) * n(B) * n(C)$$
$$= 2 * 3 * 2 = 12.$$

$$A \times B \times C = \{(1,x,3), (1,x,4), (1,y,3), (1,y,4)$$
$$(1,z,3), (1,z,4), (2,x,3), (2,x,4)$$
$$(2,y,3), (2,y,4), (2,z,3), (2,z,4)\}.$$

(٦ـ ١٢) العلاقات Relations :

لنفرض أن $A$ , $B$ مجموعتين :

① العلاقة $R$ تحدد أزواج مرتبة $(a,b)$ من $A$ إلى $B$ في $A \times B$ ، ونرمز لها بالرمز $aRb$ أي أن $a$ على علاقة بـ $b$ .

وإذا كانت $a$ ليست لها علاقة مع $b$ فنكتب $a \not R b$ .

② العلاقة $R$ هي مجموعة جزئية من $A \times B$ .

نطاق العلاقة $R$ (Domain) :

هو مجموعة العناصر الأولى في الأزواج المرتبة .

مدى العلاقة $R$ (Range) :

هو مجموعة العناصر الثانية في الأزواج المرتبة .

مثال (١٢) :

افرض أن $A = \{1, 2, 3\}$

و $R = \{(1,2), (2,3), (2,2), (3,3)\}$ في $A \times A$

تكون $R$ علاقة على $A \times A$ ، حيث أنها مجموعة جزئية من $A \times A$

بالنسبة لهذه العلاقة :

$1R2, \ 2R3, \ 2R2, \ 3R3$

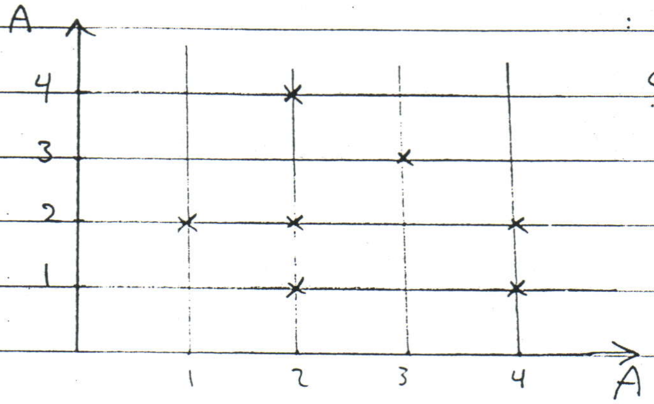
وكذلك $1 \not R 1, \ 1 \not R 3, \ 2 \not R 1, \ 3 \not R 1, \ 3 \not R 2$

نطاق العلاقة $R$ : $\{1, 2, 3\}$ .

مدى العلاقة $R$ : $\{2, 3\}$ .

مثال (١٣) :

لتكن $R$ العلاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ المعطاه في مجموعة النقاط الموضحة في الشكل $A \times A$ :




أ) أكتب $R$ كأزواج مرتبة ؟

ب) أوجد نطاق $R$ ؟

ج) أوجد مدى $R$ ؟

الحل

أ) $R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,1), (4,2)\}$

ب) نطاق $R$ = $\{1, 2, 3, 4\}$

ج) مدى $R$ = $\{1, 2, 3, 4\}$

---

* العلاقة العكسية $R^{-1}$ :

هي مجموعة الأزواج المرتبة من $B \to A$ .

في المثال (١٣) السابق تكون :

$R^{-1} = \{(2,1), (1,2), (2,2), (4,2), (3,3), (1,4), (2,4)\}$

(٦-١٣) التمثيل المصور للعلاقات :

العلاقة $R$ في $A \times B$

تمثل العلاقة $R$ بالصور التالية :

1) التخطيط الإحداثي لـ $A \times B$ .

٢) المصفوفات Matrix .

٣) الأسهم .

---

مثال (١٤) :

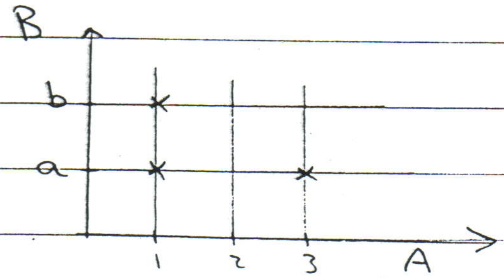
لتكن $R$ العلاقة التالية من $A = \{1,2,3\}$ إلى $B = \{a,b\}$

$$R = \{(1,a), (1,b), (3,a)\}$$

صور $R$ بالطرق الثلاثة ؟

الحل

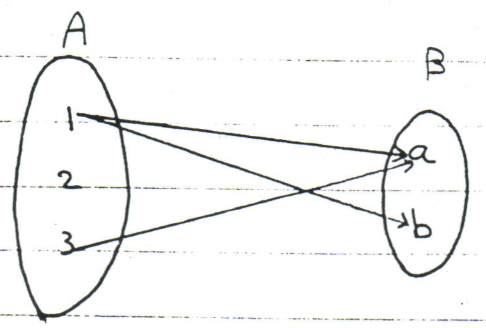
أولاً : التخطيط الإحداثي :




ثانياً : المصفوفات :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{cc} a & b \end{array}}^{B} \\ A\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right. & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ثالثاً : الأسهم :



٤) الشكل الموجه ( Directed graph ) :

تطبق هذه الطريقة عندما تكون العلاقة R من فئة محدودة إلى نفسها ( A X A ) .

أي لا يمكن تطبيقها في مجموعة A X B .

مثال (١٥) :

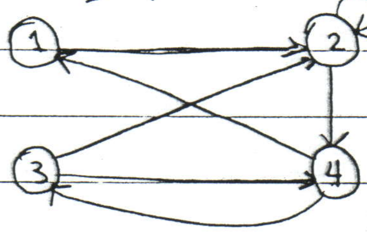
لتكن R العلاقة على المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4\}$ كالتالي :

$R = \{(1,2), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)\}$

أرسم العلاقة R باستخدام الشكل الموجه .

الحل

نضع ٤ دوائر في كل دائرة عنصر ثم نربط بين الدوائر بأسهم حسب العلاقة R .




مثال (١٦) :

لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ، لتكن R هي العلاقة على A والمعرفة بـ y تقسم على x ، بحيث تكون ناتج القسمة عدد صحيح

أ) أكتب العلاقة R كمجموعة أزواج مرتبة

ب) أكتب R على الشكل الاحداثي وارسم R بالشكل الموجه ؟

الحل

أ) $R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$ .

ب)