College of Science
Department of Statistics
and Operations Research

كلية العلوم
قسم الاحصاء وبحوث العمليات
215 احص :احتمال -1-

جامعة الملك سعود
King Saud University

الإختبار الفصلي الثاني - الفصل الدراسي الثاني 1443هـ

إستعن بالله ثم أجب عن جميع الأسئلة التالية :

9

1 – إذا كانت أعمار البطاريات التي ينتجها أحد المصانع تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 100 يوماً ، وبفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عمر البطارية باليوم فالمطلوب : إحسب كل من : –

(أ) $(i)\ f_X(20)\ ,\ (ii)\ F_X(15)\ ,\ (iii)\ M_X(t)$ ، (ب) إحتمال أن تعيش إحدى هذه البطاريات 50 يوما بعد أن عاشت أكثر من 20 يوما ؟ .

الحل:- (أ) لدينا $\mu = \frac{1}{\lambda} = 100 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{100}$

وعليه فإن :-

(i) $\because f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ , x \geq 0$

$\therefore f_X(20) = \frac{1}{100} e^{-\frac{20}{100}} = \frac{1}{100} e^{-0.2} = \boxed{0.008}$

(ii) $F_X(15) = 1 - e^{-\frac{15}{100}} = 1 - e^{-0.15} = \boxed{0.139}$

(iii) $\because M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \Rightarrow M_X(t) = \boxed{\frac{1}{1-100t}}$

(ب) حسب خاصية فقدان الذاكرة للتوزيع الأسي نجد أن المطلوب :-

$P(X > 20+50 \mid X > 20) = P(X > 50)$

$= e^{-\frac{50}{100}} = e^{-0.5} = \boxed{0.6}$

6

2 – لديك الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي Y : $M_Y(t)=e^{2t^2}$. إحسب كل من : –

2 2 2

(i) μ_Y , (ii) σ^2_Y , (iii) $P(Y>0)$

الحل:- $M_Y(t)$ دالة توليد عزوم توزيع طبيعي معالمه:

$\mu_Y=0$, $\frac{\sigma_Y^2}{2}=2 \Rightarrow \sigma_Y^2=4$

$\therefore Y\sim N(0,4) \Longrightarrow$ (i) $\mu_Y=\boxed{0}$, (ii) $\sigma_Y^2=\boxed{4}$

(iii) $P(Y>0)=\boxed{0.5}$ (من خاصية التماثل)

حل آخر باشتقاق $M_Y(t)$ ومنه

(i) $\mu_Y=M_Y'(0)$

(ii) $\sigma_Y^2=M_Y''(0)-(M_Y'(0))^2$

(وكامل الحل من النموذج الثاني)

12

3 – (أ) 6 إذا كان المتغير العشوائي X له توزيع جاما دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f_X(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x} \quad , x>0 , \lambda>0 \quad , n>0.$$

أثبت أن : –

$$(i)\ \mu'_r=\frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^r\Gamma(n)}, \quad (ii)\ M_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n .$$

الحل:- (أ)

(i) $L.H.S=\mu'_r=E(X^r)=\int_0^\infty x^r\cdot\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx$

$=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n+r-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^{n+r}}=\frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^r\Gamma(n)}=R.H.S$

(ii) $L.H.S=M_X(t)=E(e^{Xt})=\int_0^\infty e^{xt}\cdot\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx$

$=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x(\lambda-t)}dx=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(n)}{(\lambda-t)^n}=\frac{\lambda^n}{(\lambda-t)^n}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n=R.H.S$

(ب) إذا كان المتغير العشوائي Y له توزيع بيتا دالة كثافته الاحتمالية هي: 6

$$f_Y(y) = 12y^2(1-y)\ , \ 0 < y < 1.$$

إحسب كل من : ـ

$$(i)\ \mu = E(Y),\quad (ii)\ \sigma_Y^2 = V(Y),\quad (iii)\ \mu_5'.$$

الحل: معالم التوزيع هي:ـ

$$2 = a-1,\ 1 = b-1 \Rightarrow a = 3,\ b = 2$$

وعليه فإن :ـ

$$(i)\ \mu = E(Y) = \frac{a}{a+b} = \frac{3}{5} = \boxed{0.6}$$

$$(ii)\ \sigma_Y^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = \frac{6}{(25)6} = \frac{1}{25} = \boxed{0.04}$$

$$(iii)\ \because \mu_r' = \frac{\beta(a+r, b)}{\beta(a,b)}$$

$$\therefore \mu_5' = \frac{\beta(8,2)}{\beta(3,2)} = \frac{\Gamma(8)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(10)}\cdot\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\cdot\Gamma(2)}$$

$$= \frac{7!\ 4!}{9!\ 2!} = \frac{\cancel{7!}\ \cancel{4\cdot3}\cdot\cancel{2!}}{\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\underset{2}{\cancel{8}}\cdot\cancel{7!}\ \cancel{2!}} = \frac{1}{6} = \boxed{0.167}$$

---

4 - ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المشترك التالي : ـ

15

إحسب كل من : ـ

		y			
	f(x,y)	0	1	2	$f_x(x)$
x	0	0.05	0.20	0.06	0.31
	1	0.05	0.25	0.05	0.35
	2	0.25	0.04	0.05	0.34
	f(y)	0.35	0.49	0.16	1

2 (1) $E(3X+Y)$, 2 (2) $E(XY)$.

2 (3) $Cov(X,Y)$, 2 (4) $\rho_{X,Y}$

3 (5) $M_{X,Y}(t_1,t_2)$.

الحل :- 4

نحسب كل ما نحتاجه لحل المطلوب أعلاه كما يلي :-

$E(X) = 1.03$, $E(X^2) = 1.71$, $V(X) = 0.6491 \Rightarrow \sigma_x = 0.806$

$E(Y) = 0.81$, $E(Y^2) = 1.13$, $V(Y) = 0.4739 \Rightarrow \sigma_y = 0.688$

وعليه فإن :-

(1) $E(3X+Y) = 3E(X) + E(Y)$

$= 3(1.03) + 0.81 = \boxed{3.9}$

(2) $E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y)$

$= 0 + 0 + 0 + 0 + (1)(1)(0.25) + (1)(2)(0.05)$

$+ 0 + (2)(1)(0.04) + (2)(2)(0.05) = \boxed{0.63}$

(3) $\because Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$

$\therefore Cov(X,Y) = 0.63 - (1.03)(0.81) = \boxed{-0.2043}$

تابع حـ 4 :

(4) $\because \rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

$\therefore \rho_{X,Y} = \frac{-0.2043}{(0.806)(0.688)} = \boxed{-0.368}$

(5) $\because M_{X,Y}(t_1,t_2) = E(e^{Xt_1+Yt_2})$

$= \sum_x \sum_y e^{xt_1+yt_2} f_{XY}(x,y)$

$\therefore M_{X,Y}(t_1,t_2) = 0.05 + 0.20e^{t_2} + 0.06e^{2t_2}$
$+ 0.05e^{t_1} + 0.25e^{t_1+t_2} + 0.05e^{t_1+2t_2}$
$+ 0.25e^{2t_1} + 0.04e^{2t_1+t_2} + 0.05e^{2t_1+2t_2}.$

8

5 - المتجه العشوائي (X,Y) له دالة الكثافة الاحتمالية التالية : -

$$f(x,y) = x + y \quad ,0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

إحسب كل من : -

$$(1)^{2}\ f(x)\ ,\ (2)^{2}\ f(y)\ ,\ (3)^{2}E(XY),\ (4)^{2}\ F(x,y)\ .$$

الحل :-

(1) $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = [xy + \frac{y^2}{2}]_0^1 = x + \frac{1}{2}$

$\therefore$ $f_X(x) = \frac{2x+1}{2}\ ,\ 0<x<1\ .$

(2) $f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{1}{2} + y \Longrightarrow f_Y(y) = \frac{2y+1}{2}\ ,\ 0<y<1$

(3) $E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy\cdot(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 (x^2y + xy^2)\,dy\,dx$

$= \int_0^1 [x^2\frac{y^2}{2} + x\frac{y^3}{3}]_0^1\,dx = \int_0^1 (\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3})\,dx = [\frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^2}{3\cdot 2}]_0^1$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

(4) $F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x\int_0^y (u+v)\,dv\,du = \int_0^x [uv + \frac{v^2}{2}]_0^y\,du$

$= \int_0^x (uy + \frac{y^2}{2})\,du = [\frac{u^2}{2}y + \frac{y^2}{2}u]_0^x = \frac{x^2y}{2} + \frac{y^2x}{2}$

$\therefore$ $F_{X,Y}(x,y) = \frac{x^2y + xy^2}{2}\ ,\quad 0<x<1\ ,\ 0<y<1$

إنتهت الأسئلة أرجو لكم التوفيق والنجاح