(1)

حل السؤال الخامس في الاختبار

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

لاحل نحن نقوم معادلتي كوشي - ريمان، نكتب صيغة المشتقة من التعريف ثم نأخذ النهاية عندما $x\to 0$ وعندما $y\to 0$ (اي نستخدم نفس طريقة برهان المعادلتين لكوشي - ريمان)

نعلم ان نعرف $f'(0)=\lim_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}$

$=\lim_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z}$ لأن $f(0)=0$

اولاً باتجاه x

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\bar{x})^2}{x^2}=1=u_x+iv_x$$

عند $(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{y\to 0}\frac{(-iy)^2}{(iy)^2}=(-1)^2=1=v_y+i(-u_y)$$

عند $(x,y)=(0,0)$

$$u_x = v_y = 1 \quad \therefore$$

$$v_x = 0 = -(u_y) = 0$$

∴ معادلتا كوشي ـ ريمان متحققتان

الآن نأتي لـ اتصال عند $z=0$ ، نعلم ان الاتصال تكون موجودة مهما كانت طريقة الوصول الى $z=0$

عما سبق وجدنا ان النهاية لـ $\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ عند x ومن ثم غير y تساوي 1 وتساوي 1

وكل لنأخذ الاتجاه القطري اي $y=x$

$$\Leftarrow \quad z = x + ix$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overline{(x+ix)}^2}{(x+ix)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}$$

$$= \frac{-2i}{2i} = -1$$

∴ النهاية بالاتجاه القطري تساوي $-1 \neq 1$

$\Leftarrow$ الاتصال غير موجودة عند $z=0$