● مـلـحق
Appendix

نماذج اختبارات شهرية ونهائية

(اختبار فصلي ١)

س١: (أ) عين مجال الدالة $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

(ب) ادرس اتصال الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

عند $(0,0)$.

(ج) ادرس قابلية تفاضل الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^4}{x^2+y^4} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

عند $(0,0)$.

س٢: (أ) إذا كانت المعادلة $x\ln y+y^2z+z=9x$ تعرف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل. احسب $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

(ب) إذا كانت

$$w=\cos(x^2+y^2)+h(x^2-y^2,y^2-x^2)$$

فاثبت أن

$$y\frac{\partial w}{\partial x}+x\frac{\partial w}{\partial y}=-4xy\sin(x^2+y^2)$$

س٣: (أ) أوجد وصنف النقاط الحرجة للدالة

$$f(x,y)=2x^4+y^2-x^2-2y$$

(ب) أوجد إحداثيات النقطة على سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=9$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(2,3,4)$.

(اختبار فصلي ٢)

س١: ادرس اتصال وقابلية تفاضل الدالة :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

عند $(0,0)$.

س٢: أوجد القيم القصوى المحلية للدالة

$$f(x,y)=2x^4+y^2-x^2-2y$$

وحدد نوعها إن وجدت.

س٣: إذا كانت المعادلة $xz+2yz^2=-xy-2$ تعرف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ لها مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الثانية. احسب $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

س٤: أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x,y)=x^2+y$ على المنطقة المستوية $x^2+y^2\leq 9$.

س٥: إذا كانت

$$f(x,y)=\frac{1}{y}g(x^2-y^2,y^2-x^2)$$

حيث g دالة في متغيرين قابلة للتفاضل. اثبت أن f تحقق العلاقة التالية:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{x}{y^2}f(x,y)=0$$

(اختبار فصلي ٣)

السؤال الأول

أ) مستخدما التكامل الثنائي احسب مساحة المنطقة المستوية في الربع الأول والمحدودة بمنحنى الدالة $y=2x-4$ ومنحنى الدالة $8y=16+x^2$ والمحاور الإحداثية.

ب) أوجد حجم الجسم المحدود بسطحي الكرتين

$$x^2+y^2+z^2=6z \quad , \quad x^2+y^2+z^2=2z$$

ومن الجوانب بالسطح $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$.

السؤال الثاني

اختبر تقارب أو تباعد المتتابعة

أ) $\left\{\dfrac{(-1)^{2n+1}(n+1)\sin\sqrt{\pi n}}{n(\,1+\sqrt{\pi n}\,)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ب) $\left\{\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^4+\pi-n^2}}\right\}_1^{\infty}$

ج) المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ معطاة كالتالي $a_1=1$ و a_{n+1} $a_n=\dfrac{n^2-1}{n^2}$

باستخدام تعريف نهاية المتتابعة. اثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+3}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$

السؤال الثالث

احسب التكاملات التالية:

أ) $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} 16-\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$

ب) $\displaystyle\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dxdy$ أو $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dydx$

ج) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dzdydx$

(اختبار فصلي٤)

السؤال الأول

احسب التكامل التالي: $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dydx$

السؤال الثاني

احسب التكامل التالي: $\iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$

حيث Q المنطقة المحدودة بسطح المخروط $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ والمستوى $z = 1$.

السؤال الثالث

احسب حجم المجسم المحدود من أعلى بسطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ ومن أسفل بالسطح المكافئ $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

السؤال الرابع

أوجد القيمة العظمى للدالة $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ ، تحت القيد (أو الشرط) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

السؤال الخامس

احسب مساحة المنطقة والمحدودة بمنحنى الدائرة $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ والمستقيمين $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ و $y = -x$.

(اختبار نهائي ١)

السؤال الأول

(أ) جد نطاق (مجال) الدوال التالية موضحا النطاق بالرسم أيضا:

$$\text{(i)}\, f(x,y)=\sin\frac{1}{x+y} \qquad \text{(ii)}\, f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{16-x^2-4y^2}}$$

(ب) إذا كانت

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ابحث ما يلي عند النقطة $(0,0)$:

(١) اتصال الدالة (٢) وجود $f_x ; f_y$ (٣) اتصال $f_x ; f_y$ (د) قابلية تفاضل الدالة f.

السؤال الثاني

(أ) إذا كانت f دالة قابلة للتفاضل في u، وإذا كانت $u=x^2+y^2$

أثبت أن الدالة

$$w=x\,y+f\ (x^2+y^2)$$

تحقق المعادلة

$$y\frac{\partial w}{\partial x}-x\frac{\partial w}{\partial y}=y^2-x^2$$

(ب) إذا كانت

$$f(x,y)=3\,x^2-3\,x\,y^2+y^3+3\,y^2$$

أوجد ما يلي:

(١) النقاط الحرجة للدالة .

(٢) حدد أي من هذه النقاط للدالة عندها قيم قصوى محلية وأيها نقاط سرجية.

السؤال الثالث

(ا) مستخدما التكامل الثنائي أوجد مساحة المنطقة داخل الدائرة $r=\cos\theta$ وخارج الدائرة $r=1$.

(ب) احسب التكامل : $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

السؤال الرابع

(ا) جد حجم المنطقة المحدودة بالسطوح

$$z = x^2 + y^2 \,,\, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

(ب) احسب التكاملات التالية :

$$\text{(i)} \quad \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2 + y^2} \;\; dzdydx$$

$$\text{(ii)} \quad \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4 - x^2 - y^2} \;\; dzdydx$$

السؤال الخامس

(ا) اختبر تقارب أو تباعد المتتابعات التالية وأوجد النهاية في حالة المتتابعة المتقاربة :

$$\text{(i)} \left\{ \frac{2 - \sin^2 n}{5^n} \right\}_{n=2}^{\infty} \qquad \text{(ii)} \left\{ \frac{e^n}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{(iii)} \left\{ \frac{n^2}{2n+1} \cos\frac{\pi}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

(ب) أختبر المتسلسلات التالية وحدد نوع المتقاربة منها.

$$\text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{\ln n}}{n} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n^2 (\ln n)^2} \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{1 + n + 6n^2}$$

السؤال السادس

(ا) جد فترة ونصف قطر تقارب متسلسلة القوى التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} (x-3)^n$$

(ب) جد متسلسلة القوى وكذلك نصف قطر تقاربها والتي تمثل الدالة التالية :

$$f\;(x) \;=\; \frac{5}{7 - 5\,x}$$

(جـ) جد متسلسلة ماكلورين للدالة $e^{x^2 + 3\ln(x^2+2)}$.

(اختبار نهائي ٢)

السؤال الأول

(أ) ادرس اتصال وقابلية تفاضل الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

عند النقطة $(0,0)$.

(ب) احسب النهاية التالية إن وجدت: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

السؤال الثاني

(أ) إذا كانت g دالة في متغير واحد قابلة للاشتقاق مرتين، وإذا كانت

$$w(x,y)=g(x^2-y)$$

اثبت أن w تحقق العلاقة: $w_{xx}-4x^2w_{yy}+2w_y=0$

(ب) اختبر تقارب أو تباعد المتتابعة : $\left\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right\}_{n=1}^{\infty}$

السؤال الثالث

أوجد وصنف النقاط الحرجة للدالة $f(x,y)=6x^2+18xy+4y^2-6x+10y+5$

(ب) احسب التكامل التالي: $\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

السؤال الرابع

(أ) أوجد حجم المجسم خارج المخروط $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$ وداخل الاسطوانة $x^2+y^2=2x$ والمحدود من أسفل بالمستوى $z=0$.

(ب) أوجد نصف قطر وفترة تقارب المتسلسلة : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n(x-1)^{n^2}}{n!}$.

السؤال الخامس

(أ) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة : $f(x)=\frac{1}{(2+x)^3}$.

(ب) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلتين التاليتين وحدد نوع المتقاربة منها:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(2n)!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

(اختبار نهائي ٣)

السؤال الأول

(أ) احسب النهاية التالية إن وجدت $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin x + y^3 \cos x}{x^2 + y^2}$

(ب) ادرس اتصال وقابلية التفاضل للدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\sin[(x-1)y]}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} & ; (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & ; (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

عند النقطة $(1,0)$.

السؤال الثاني

(أ) إذا كانت $f(x,y,z) = e^{3x+4y} \sin 5z$. اثبت أن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

(ب) احسب نهاية المتتابعة التالية إن وجدت

$$\left\{ \frac{\tan^{-1} n}{\sqrt{n^2 + 1}} \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

(جـ) عين النقاط الحرجة للدالة : $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$ وحدد نوعها.

السؤال الثالث

(أ) احسب حجم المجسم المحدود بالسطحين $z = x^2 + y^2$ ، $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(ب) احسب التكامل التالي

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \, dz\, dy\, dx .$$

السؤال الرابع

(أ) ليكن p عددا حقيقيا أكبر من الصفر. حدد قيم p التي تكون عندها المتسلسلة التالية متقاربة أو متباعدة وبين نوع التقارب

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)[\ln n(n+1)]^p} .$$

(ب) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3}$. وحدد نوع التقارب.

السؤال الخامس

أوجد فترة تقارب المتسلسلة : $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-3)^{n^2}\ln n}{n}$.

(ب) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة: $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$ ، وأوجد فترة تقاربها.

(جـ) استخدم فرع (ب) أو أي طريقة أخرى لإيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة $g(x)=\ln(x^2+4)$.

(اختبار نهائي ٤)

السؤال الأول

(ا) أوجد حجم الجسم المحدود من أعلى بالسطح $z = x^2 + y^2 + 1$ ومن الجوانب بالسطح $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ومن الأسفل بالمستوى $z = 0$

(ب) احسب قيمة النهاية الآتية: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6 y}{(x^4 + y^2)^2}$

السؤال الثاني

(ا) احسب التكامل الآتي: $\iint\limits_R (x^2 - xy)\, dA$ حيث R المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين $y = 3x - x^2$ و $y = x$.

(ب) إذا كانت $w = f(x-y, y-z, z-x)$ دالة مشتقاقا الجزئية الثانية متصلة. اثبت أن $w_x + w_y + w_z = 0$ ، ثم احسب w_{xx} .

السؤال الثالث

(أ) إذا كانت $f(x,y) = \dfrac{y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ لكل $(x,y) \neq (0,0)$. عرف الدالة f عند $(0,0)$ بحيث تكون متصلة.

(ب) احسب التكامل الآتي: $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 dz dx dy$

السؤال الرابع

(أ) اختبر تباعد أو تقارب المتتابعة (المتتالية) الآتية: $\left\{ \dfrac{(-1)^n n!}{n^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

(ب) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية وبين نوع تقارب المتقاربة منه

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^3+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+2}}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n^2}$

السؤال الخامس

(ا) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$. ما هي فترة تقاربها

(ب) أوجد فترة تقارب المتسلسلة التالية: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+4}} (3x+4)^n$

(اختبار نهائي ٥)

السؤال الأول

إذا كانت

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ادرس: (ا) اتصال الدالة عند $(0,0)$ (ب) قابلية تفاضل الدالة عند $(0,0)$.

السؤال الثاني

أوجد قيم الثابت a ، إذا علمت أن الدالة $z=y^a+e^{-x/y}$ تحقق المعادلة

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=a$$

السؤال الثالث

صنع صندوق من صفيحة معدية حجمه 12 م٣ . أوجد أبعاد الصندوق بحيث تكون الكلية للصندوق أصغر ما يمكن.

السؤال الرابع

احسب التكاملات التالية:

١) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\int_y^{\sqrt{\pi/2}} y^2\sin x^2\,dx\,dy$

٢) $\displaystyle\iiint_Q \frac{3x}{2-\sqrt{x^2+y^2}}\,dV$ حيث Q الجسم المحدود بالمخروطين $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$.

السؤال الخامس

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحدودة بالدائرتين $x^2+y^2-2x=0$ و $x^2+y^2-2y=0$.

السؤال السادس

أوجد حجم المجسم خارج المخروط $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ وداخل الكرة $x^2+y^2+z^2=4$.

السؤال السابع

اختبر المتتابعات التالية:

ا) $\left\{1+\dfrac{(-1)^n \sin 2n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ب) $\left\{\dfrac{\pi^n}{e^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

السؤال الثامن

اختبر المتسلسلات التالية وبين نوع المتقاربة منها:

ا) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+2\ln n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$ جـ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$

السؤال التاسع

أوجد فترة ونصف قطر تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n^2}}{n}$

السؤال العاشر

أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=\cosh x^2$.

(اختبار نهائي ٦)

السؤال الأول

إذا كانت
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ادرس: (ا) اتصال الدالة عند $(0,0)$ (ب) قابلية تفاضل الدالة عند $(0,0)$.

السؤال الثاني

إذا كانت $w=f(x-y,y-z,z-x)$ دالة مشتقاتها الجزئية الثانية متصلة. اثبت أن
$\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$، ثم احسب $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

السؤال الثالث

(أ) احسب التكاملين التاليين: (١) $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^4 ye^{-x^2}\,dxdy$

(٢) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4-x^2-y^2}\ dzdydx$

(ب) أوجد حجم المجسم المحدود بسطحي الكرتين $x^2+y^2+z^2=2z$ و
$x^2+y^2+z^2=6z$ ومن الجوانب بالسطح $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$.

السؤال الرابع

اختبر المتتابعات التالية: (ا) $\left\{1+\dfrac{(-1)^n\sin 2n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (٢) $\left\{\dfrac{e^n}{\pi^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

السؤال الخامس:

اختبر المتسلسلات التالية وبين نوع المتقاربة منها:

ا) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n(n+1)}$ جـ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

السؤال السادس

(١) أوجد فترة ونصف قطر تقارب متسلسلة القوى $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n^2}}{n}$

(٢) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=\sinh x^2$.

(اختبار نهائي ٧)

السؤال الأول

(أ) أوجد حجم الجسم المحدود من أعلى بسطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ومن أسفل بالمستوى $z = 1$.

(ب) اختبر تقارب المتتابعة $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

السؤال الثاني

احسب التكامل $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\, dA$ ، حيث R المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيات $y = 0$ ، $x = 1$ و $y = x$.

السؤال الثالث

أوجد النقاط على سطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ والتي تكون أقرب وأبعد ما يمكن عن النقطة $(1,2,2)$.

السؤال الرابع

ادرس اتصال المشتقات الجزئية الأولى للدالة التالية:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

عند النقطة $(0,0)$.

السؤال الخامس

(أ) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة $f(x) = \ln(1-x)$ ومن ثم استنتج أن

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} = x + (1-x)\ln(1-x)$$

(ب) اختبر المتسلسلة التالية: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-1}$.

السؤال السادس

(أ) أوجد فترة تقارب المتسلسلة التالية : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)}(x-5)^n$.

(ب) اختبر المتسلسلة التالية: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{(n^2-1)^2}$.