الباب الرابع

متسلسلات القوى

POWER SERIES

● مقدمة ● التقريب بكثيرات الحدود ونظرية تايلور ● مقدمة لمتسلسلات القوى ● تمثيل الدوال بمتسلسلات القوى ● متسلسلة تايلور ● متسلسلة ذات الحدين

(٤-١)

●مقدمة

Introduction

درسنا في الباب الثالث المتسلسلات غير المنتهية ذات الحدود الثابتة. نتناول في هذا الباب دراسة نوع هام من المتسلسلات ذات حدود متغيرة تسمى متسلسلات القوى(power series)، التي يمكن النظر إليها كتعميم لكثيرات الحدود. في فصل (٤ -٣) نعرف متسلسلة القوى. نبين في الفصول (٤-٦) و (٤-٨) كيف يمكن استخدام المتسلسلات غير المنتهية في تمثيل العديد من الدوال، مثل الدوال الكسرية والأسية والمثلثية واللوغاريتمية. في الفصل (٤-١٠) ندرس متسلسلة ذات الحدين.

لمتسلسلات القوى تطبيقات عدة، منها إيجاد قيمة تقريبية للأعداد اللاكسرية مثل $\sin 0.3$, $\ln 5$, e , π , $\sqrt{2}$. من التطبيقات أيضا إيجاد قيمة تقريبية للتكاملات المحدودة لدوال يتعذر إيجاد دالتها الأصلية. على سبيل المثال، نبين كيفية استخدام متسلسلات القوى لحساب قيمة التكاملات مثل $\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx$ ، $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$ ، $\int_0^{0.1} \ln(1+\sin x)dx$ لأي دقة مطلوبة. كذلك، يمكن التعبير عن حلول العديد من المعادلات التفاضلية كمتسلسلة قوى.

(٤-٢)

● التقريب بكثيرات الحدود ونظرية تايلور

Polynomial Approximation And Taylor Theorem

يمكن إيجاد قيم كثيرات الحدود وذلك بالقيام بعدد منته من عمليات الجمع والضرب. ولكن هناك العديد من الدوال ، مثل الدوال اللوغاريتمية ، والأسية والمثلثية ، التي لا يمكن إيجادها بهذه السهولة. لنفرض أننا نريد تقريب قيمة $f(x)$ للدالة f وذلك بمعرفتنا للقيمة $f(c)$ عند عدد قريب c . كما أسلفنا فإن من السهولة إيجاد قيم كثيرات الحدود ، لذلك سنستخدم كثيرات الحدود لتقريب $f(x)$. سيتم تعريف كثيرات الحدود هذه باستخدام مشتقات الدالة f من رتب عليا، ولذلك سنفترض أن للدالة f هذه المشتقات .

سنرى في هذا الفصل أن العديد من الدوال يمكن تقريبها بكثيرات حدود ، ويمكن استخدام كثيرة الحدود هذه ، لا الدالة الأصلية ، في الحسابات وذلك عندما يكون الفرق في قيمة الدالة الأصلية وقيمة كثيرة الحدود صغيرا جدا.

هناك العديد من الطرائق لتقريب الدالة بكثيرات حدود. وأكثرها شيوعا واستخداما تلك التي تتضمن صيغة تايلور، سميت كتشريف للرياضي الإنجليزي بروك تايلور; Brook Taylor) . 1685-1731)

إن أبسط كثيرات الحدود هي كثيرة الحدود الثابتة . وأفضل كثيرة حدود ثابتة P_0 لتقريب f هي

$$\boxed{P_0(x) = f(c) \qquad (١)}$$

حيث أن P_0 و f لهما القيمة نفسها عند c (انظر شكل) . في غالب الأحيان فإن التقريب الأفضل يتم الحصول عليه بوضع

$$\boxed{P_1(x) = f(c) + f^{(1)}(c)(x-c) \qquad (٢)}$$

لاحظ أن كلا من كثيرة الحدود والدالة لهما نفس القيمة والمشتقة الأولى عند c .

لا زلنا نستطيع الحصول على تقريب أفضل وذلك بتعريف كثيرة حدود P_2 لها نفس القيمة والمشتقات الأولى والثانية عند c

$$\boxed{P_2(x) = f(c) + f^{(1)}(c)(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2}(x-c)^2 \qquad (٣)}$$

يتضح من التعريف أن P_2 و f لهما نفس القيمة والمشتقات الأولى والثانية عند c .

إن كثيرة الحدود من الدرجة (على الأكثر) ثلاثة والتي يمكن أن تعطينا تقريبا لقيم f تعرف كما يلي

$$P_3(x)=f(c)+f^{(1)}(c)(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2}(x-c)^2+\frac{f^{(3)}(c)}{6}(x-c)^3 \qquad (٤)$$

نلاحظ أن P_3 و f لهما نفس القيمة والمشتقات الأولى والثانية والثالثة عند c .

الآن نعرف كثيرة الحدود من الدرجة (على الأكثر) n بالصيغة

$$P_n(x)=f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad (٥)$$

تسمى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الدرجة n للدالة f بجوار العدد c . ويلاحظ أن P_n و f لهما نفس القيمة وكذلك المشتقات من الرتبة الأولى إلى الرتبة n عند c .

بوضع $c=0$ في (٢) نحصل على حالة خاصة لكثيرة حدود تايلور :

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (٦)$$

وتسمى كثيرة حدود ماكلورين ، نسبة إلى عالم الرياضيات الإسكتلندي كولين ماكلورين (Colin Maclaurin, 1698-1746) .

مثال (١)

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة ـ n للدالة $f(x)=e^x$. وكذلك $P_n(1)$ ثم احسب $P_5(1)$.

الحل:

كي نتمكن من استخدام صيغة $P_n(x)$ في (٦) نحسب $f^{(k)}(0)$ لأي عدد صحيح غير سالب k . ولكن لكل k فإن $f^{(k)}(x)=e^x$ ، ومنه فإن $f^{(k)}(0)=e^0=1$ ، وبالتالي

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

كنتيجة لذلك نجد أن

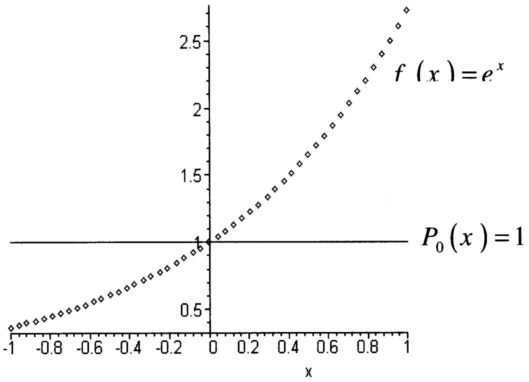
$$P_n(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}$$

وعندما $n=5$ نحصل على

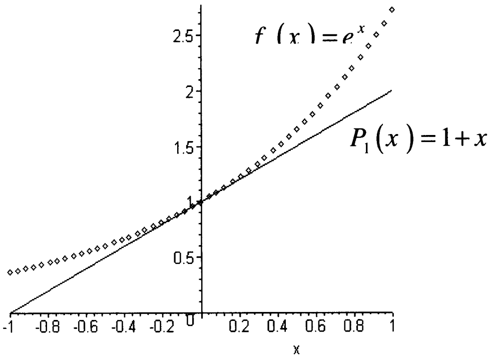
$$P_5(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=\frac{163}{60}\approx 2.71667$$

بما أن الهدف من إيجاد $P_n(x)$ هو الحصول على قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ ، فإن علينا التأكد إلى أي مدى تعتبر $P_5(1)$ تقريبا للقيمة $f(1)=e$. نعلم أن $e=2.71828$ (صحيحة لستة منازل عشرية) وحيث أن $P_5(1)\approx 2.71667$ ، فإن $P_5(1)$ تقريب للعدد e بخطأ مقداره 0.00161 .

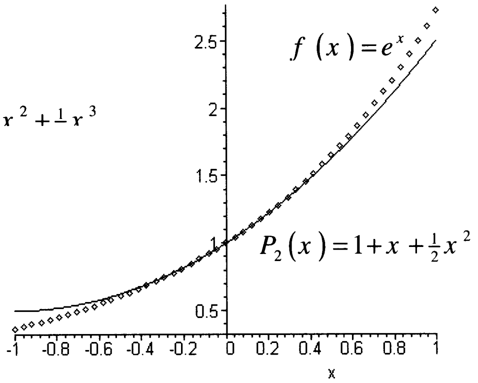
يظهر في الأشكال من (١) إلى (٤) منحنى e^x إلى جانب منحنيات P_0 ، P_1 ، P_2 و P_3 ، على التوالي . في شكل (٥) تظهر منحنيات كثيرات حدود ماكلورين ومنحنى $f(x)=e^x$. لاحظ أن منحنيات كثيرات الحدود هي تقريب للدالة e^x لقيم x القريبة من الصفر ، وأن هذا التقريب يأخذ بالتحسن كلما زادت قيمة n .



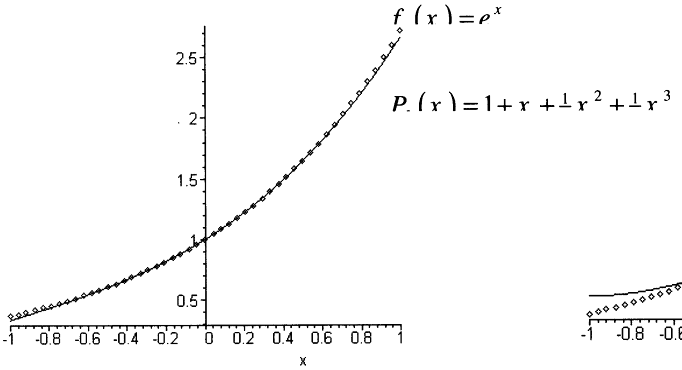
شكل (١)



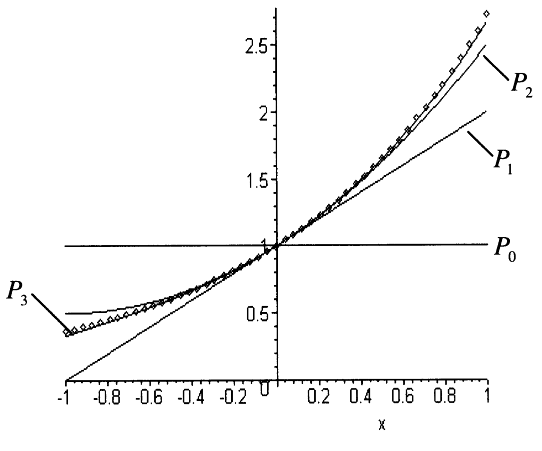
شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)



شكل (٥)

مثال (٢) :

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة ـــ n للدالة $f(x)=\ln(1+x)$. ثم احسب $P_6(1)$.

الحل

نقوم أولا بحساب مشتقات الدالة $f(x)$ على النحو التالي:

$$f(x)=\ln(1+x) \qquad f(0)=0$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f^{(2)}(0)=-1$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{(-1)^2 2!}{(1+x)^3} \qquad f^{(3)}(0)=2!$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{(-1)^3 3!}{(1+x)^4} \qquad f^{(4)}(0)=-(3!)$$

وبشكل عام ، لكل $k \geq 1$ فإن

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

وبالتالي نجد من (٦) أن

$$P_n(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\ +\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

ونستنتج من ذلك أن

$$P_6(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60}\approx 0.616667$$

نتوقع أن تكون $P_n(x)$ تقريبا للدالة $f(x)$. بما أن $f(1)=\ln(2)$ تساوي 0.693147 (صحيحة لـ ستة منازل عشرية) وبما أن $P_6(1)\approx 0.616667$ ، فإن $P_6(1)$ تقريب للعدد $ln\,2$ بخطأ مقداره 0.07648 .

مثال (٣) :

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة ـــ n للدالة $f(x)=\frac{1}{1-x}$. ثم احسب $P_n(2)$.

الحل

مشتقات الدالة f هي

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad\qquad f(0)=1$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad\qquad f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{2!}{(1-x)^3} \qquad\qquad f^{(2)}(0)=2!$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{3!}{(1-x)^4} \qquad\qquad f^{(3)}(0)=3!$$

وبشكل عام ، لكل $k \geq 1$ فإن

$$f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad\qquad f^{(k)}(0)=k!$$

وبالتالي نجد من (٦) أن

$$P_n(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots\ +x^n$$

وعلى وجه الخصوص فإن

$$P_n(2)=1+2+2^2+2^3+\cdots\ +2^n$$

زودتنا كثيرة حدود تايلور في المثالين (١) و(٢) بتقريب مناسب للدالة المعطاة. حقا ، لقد وجدنا أنه إذا كانت $f(x)=e^x$ ، فإن

$$\left|f(1)-P_5(1)\right|=\left|e-P_5(1)\right|\approx 0.00161$$

وإذا كانت $f(x)=ln(1+x)$ ، فإن

$$\left|f(1)-P_6(1)\right|=\left|\ln 2-P_6(1)\right|\approx 0.07648$$

بالمثل ، إذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ (كما في مثال (٣)، فإن لكل

$$\begin{aligned}\left|f(2)-P_n(2)\right|&=\left|\tfrac{1}{1-2}-\left(1+2+2^2+2^3+\cdots\ +2^n\right)\right|\\&=\left|-1-\left(1+2+2^2+2^3+\cdots\ +2^n\right)\right|\geq 2^n\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $P_n(2)$ ليست قريبة بشكل مقبول من $f(2)$ لأي قيمة للعدد n. في الحقيقة كلما كبرت قيمة n ، فإن $P_n(2)$ تبتعد عن كونها تقريبا للعدد $f(2)$.

لتحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود $P_n(x)$ تقريبا لدالة f مشتقاتها من رتب عليا موجودة عند c ، نعرف ما يسمى باقي تايلور R_n للدالة f بالصيغة

(٤-٢-١) تعريف

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$
$$= f(x) - \left[f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right]$$

إن قيمة $R_n(x)$ تساعدنا على تحديد مدى صحة اعتبار $P_n(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$ ، فكلما صغر $R_n(x)$ كلما أصبحت $P_n(x)$ قريبة من $f(x)$.

تزودنا النظرية التالية التي يمكن اعتبارها كتعميم لنظرية القيمة الوسطى بوسيلة لإيجاد $R_n(x)$ وبالتالي بمدى صحة استبدال $f(x)$ بكثيرة حدود تايلور .

(٤-٢-٢) نظرية

إذا كانت f دالة بحيث أن f وجميع مشتقاتها من الرتبة n متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، وإذا كانت $f^{(n+1)}(x)$ موجودة لجميع x في الفترة المفتوحة (a,b)، فإنه يوجد عدد z_x في الفترة المفتوحة (a,b) بحيث إن

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (٧)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (٨)$$

تعرف المعادلة (٧) بصيغة تايلور والمعادلة (٨) بصيغة لاجرانج للباقي **(Lagrange Remainder Formula)** .

البرهان:

لكل عدد ثابت $c \neq x$ في الفترة $[a,b]$ ولكل z في الفترة $[a,b]$، لتكن

$$g(x) = f(x) - \left[f(z) + f'(z)(x-z) + \frac{f^{(2)}(z)}{2!}(x-z)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-z)^n \right] - R_n(x)\frac{(x-z)^{n+1}}{(x-z)^{n+1}}$$

بوضع $z = x$ نحصل على $g(x) = 0$ ،وبالتعويض $z = c$ وتعريف $R_n(x)$ (٤-٢-١) ينتج أن

$$g(c) = R_n(x) - R_n(x) = 0$$

كذلك نجد أن (تذكر أن x ثابت):

$$g'(z)=0-f'(z)+\left(f'(z)-f^{(2)}(z)(x-z)\right)$$
$$+\left(\frac{2f^{(2)}(z)}{2!}(x-z)-\frac{f^{(3)}(z)}{2!}(x-z)^2\right)$$
$$+\left(\frac{3f^{(3)}(z)}{3!}(x-z)^2-\frac{f^{(4)}(z)}{3!}(x-z)^3\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{nf^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n\right)$$
$$+(n+1)R_n(x)\frac{(x-z)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

كما هو ملاحظ فإن الأزواج المتعاقبة تختصر مع بعضها البعض لنحصل على

$$g'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n+(n+1)R_n(x)\frac{(x-z)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

ومن نظرية رول يوجد عدد z_x بين c و x بحيث أن $g'(z_x)=0$. وهذا يقتضي أن

$$0=-\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{n!}(x-z_x)^n+(n+1)R_n(x)\frac{(x-z_x)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

ومنه نستنتج أن

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

وهذا يثبت (٨) ، أما الصيغة (٧) فيمكن استنتاجها من تعريف $R_n(x)$. ■

بوضع $n=0$ فإن (١) تصبح

$$f(x)=f(c)+f'(z)(x-c)$$

حيث z_x تقع بين c و x. وهذه نظرية القيمة الوسطى وذلك بوضع b بدلا من x .

إن الشرط اللازم توفره لكي تتحقق (٧) هو أن تكون f وجميع مشتقاتها من الرتبة n متصلة على فترة مغلقة تحتوي c و x ، وأن المشتقة ذات الرتبة $(n+1)$ موجودة عند جميع نقاط الفترة المفتوحة المقابلة للفترة المغلقة.

بوضع $c=0$ في (٢) نحصل على حالة خاصة لصيغة تايلور :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{n+1!}x^{n+1} \end{aligned}}$$

حيث z_x يقع بين 0 و x ، وتسمى صيغة ماكلورين .

يتضح مما تقدم أنه يمكننا تقريب أي دالة بكثيرة حدود تايلور عند عدد c أو بكثيرة حدود ماكلورين بالدقة المطلوبة كما توضح ذلك الأمثلة التالية:

مثال (٤)

أوجد قيمة تقريبية للعدد e بخطأ مقداره أقل من 0.001 .

الحل

إذا كانت $f(x) = e^x$. فإن $f(1) = e^1 = e$ ، الآن نريد إيجاد قيمة تقريبية لعدد $f(1)$. إذا استخدمنا $P_n(1)$ كتقريب للعدد $f(1)$ ، فإن الخطأ سيكون $|f(1) - P_n(1)| = |R_n(1)|$. وبالتالي إذا وجدنا n بحيث أن $|R_n(1)| < 0.001$ فإن $P_n(1)$ ستكون التقريب المطلوب . من نظرية تايلور يوجد عدد z_x بين 0 و 1 بحيث أن

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}1^{n+1}$$

وبما أن $f^{(n+1)}(z_x) = e^{z_x}$ و $e < 4$ ، فإن

$$e^{z_x} < 4^{z_x} < 4^1 = 4$$

وعليه فإن

$$R_n(1) = \frac{e^{z_x}}{(n+1)!} < \frac{4}{(n+1)!} \qquad (٩)$$

وبحساب قيمة $\frac{4}{(n+1)!}$ حيث $n = 1,2,3,4,5,6$ نجد أن $|R_n(1)| < 0.001$ لكل $n \geq 6$.

وبالتالي فإن $P_6(1)$ هو التقريب المطلوب . من مثال (١)

$$P_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{1975}{720} \approx 2.71806$$

نستنتج أن 2.71806 تقريب للعدد e بخطأ مقداره أقل من 0.001 .

بما أن $\frac{4}{(n+1)!}$ تأخذ بالصغر كلما كبرت n ، لذلك نستطيع جعل الفرق بين e و $P_n(1)$ صغيرا بالقدر الذي نريد وذلك بجعل n كبيرة كبرا كافيا .

بما أن $\sqrt{e} = e^{1/2}$ ، فإننا نستطيع تقريب $\sqrt{e}$ باستخدام كثيرة حدود ماكلورين للدالة e^x . ولكن هنا نستخدم $P_n(\frac{1}{2})$ بدلا من $P_n(1)$.

مثال (٥)

أوجد قيمة تقريبية لعدد $\ln 2$ بخطأ مقداره أقل من 0.1 .

الحل

لتكن $f(x)=\ln(1+x)$. كما في المثال السابق سنستخدم $P_n(1)$ لقيمة مقبولة للعدد n لتقريب $f(1)$. باستخدام الصيغة $f^{(k)}(x)$ في مثال (٢) وبوضع $(n+1)$ بدلا من k نحصل على

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

من (٨) ، بوضع $x=1$ ، فإنه يوجد عدد z_x بين 0 و 1 بحيث أن

$$R_n(1)=\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}1^{n+1}=\frac{(-1)^n n!}{(1+z_x)^{n+1}(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{(1+z_x)^{n+1}(n+1)}$$

وبما أن $0<z$ فإن $\frac{1}{(1+z_x)^{n+1}}<1$ ومنه فإن

$$|R_n(1)|<\left|\frac{(-1)^n}{(1+z_x)^{n+1}(n+1)}\right|<\frac{1}{(n+1)} \qquad (١٠)$$

لذلك ، إذا كان $n\geq 9$ فإن $|R_n(1)|<0.1$. وبالتالي فإن $P_9(1)$ تقريب للعدد $\ln 2$ بخطأ مقداره أقل من 0.1 . الصيغة العامة لـ $P_n(x)$ والتي ظهرت في مثال (٢) تبين أن

$$P_9(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\approx 0.745635$$

وهذا هو التقريب المطلوب .

من (١٠) نجد إن

$$|R_n(1)|=|\ln 2-P_n(1)|=\left|\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right|<\frac{1}{(n+1)}$$

بما أن $1/n+1$ تأخذ في الصغر كلما كبرت قيمة n فإننا نستطيع جعل الفرق بين $\ln 2$ و $P_n(1)$ صغيرا بالقدر الذي نريد وذلك بجعل n كبيرة كبرا كافيا .

مثال (٦)

أوجد كثيرة حدود تايلور لدالة $\cos$ من الدرجة الثالثة عند $\frac{\pi}{4}$ وكذلك صيغة لاجرانج للباقي .

الحل

لتكن $f(x)=\cos x$. نحسب أولا قيمة الدالة ومشتقاتها عند $\frac{\pi}{4}$.

$$f(x)=\cos x \qquad f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(1)}(x)=-\sin x \qquad f^{(1)}(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(2)}(x)=-\cos x \qquad f^{(2)}(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(3)}(x)=\sin x \qquad f^{(3)}(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

من (٤) نحصل على

$$P_3(x)=f(\pi/4)+f^{(1)}(\pi/4)(x-\pi/4)+\frac{f^{(2)}(\pi/4)}{2!}(x-\pi/4)^2$$
$$+\frac{f^{(3)}(\pi/4)}{3!}(x-\pi/4)^3$$

وبالتالي فإن

$$P_3(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\pi/4)+\frac{\sqrt{2}}{2(2!)}(x-\pi/4)^2+\frac{\sqrt{2}}{2(3!)}(x-\pi/4)^3$$

وبما أن $f^{(4)}(x)=cos\,x$ ، فإنه من (٥) نحصل على

$R_3(x)=\frac{1}{24}\cos z_x(x-\pi/4)^4$ حيث z_x يقع بين $\frac{\pi}{4}$ و x . لما كانت $|\cos x|\le 1$ فإننا نستنتج أن

$$|R_3(x)|\le\frac{1}{24}(x-\pi/4)^4$$

مثال (٧)

استخدم نتائج مثال (٣) لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $cos\,47^{o}$. وحدد دقة الإجابة .

الحل

حيث $47^\circ \sim \frac{47}{180}\pi$ بالتقدير الدائري . من مثال (٣) بوضع $x=\frac{47}{180}\pi$ و $x-\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{90}\pi$ فإننا نجد بالتالي أن

$$\cos 47^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}\left[1-\frac{1}{90}\pi-\frac{1}{2}(\frac{1}{90}\pi)^2+\frac{1}{6}(\frac{1}{90}\pi)^3\right]+R_3(\frac{47}{180}\pi)$$

حيث، $R_3(\frac{47}{180}\pi)=\cos z(\frac{1}{90}\pi)^4$ و $\frac{1}{4}\pi<z<\frac{47}{180}\pi$

وحيث أن $0<cos\,z<1$ ، فإن

$$0<R_3(\frac{47}{180}\pi)<(\frac{1}{90}\pi)^4<0.00000007$$

بأخذ $\frac{1}{90}\pi\approx 0.0349066$ نحصل على

$\cos 47^\circ \approx 0.681998$ ، وهي صحيحة لست منازل عشرية .

(٤-٣) تمارين

في التمارين من ١ - ١٠ أوجد كثيرة حدود ماكلورين للدالة f .

١- $f(x) = x^2 - x - 2$ ٣- $f(x) = \frac{1}{1+x}$

٢- $f(x) = x^5 + +3x + 2$ ٤- $f(x) = \frac{1}{1+2x}$

٥- $f(x) = e^{-x}$ ٧- $f(x) = \cosh x$

٦- $f(x) = e^{3x}$ ٨- $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$

٩- $f(x) = \sin x$ ١٠- $f(x) = \cos x$

١١- لتكن $f(x) = \sin x$. ارسم منحنيات كل من f ، P_0 ، P_1 ، P_2 و P_3 على نفس المستوى الديكارتي.

١٢- لتكن $f(x) = \cos x$. ارسم منحنيات كل من f ، P_0 ، P_1 ، P_2 و P_3 على نفس المستوى الديكارتي.

في التمارين من ١٣ - ٢٨ أوجد كثيرة حدود تايلور من الدرجة n وكذلك صيغة لاجرانج للباقي للدوال المعطاة عند العدد c .

١٣- $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ؛ $c = 1$ ؛ $n = 3$

١٥- $f(x) = e^{-2x}$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 4$

١٧- $f(x) = \sinh x$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 4$

١٩- $f(x) = \cosh x$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 4$

٢١- $f(x) = \sin x^2$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 3$

٢٣- $f(x) = \sin^{-1} x$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 2$

٢٥- $f(x) = \ln\cos x$ ؛ $c = \frac{\pi}{3}$ ؛ $n = 3$

٢٧- $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 2$

١٤- $f(x) = x^{3/2}$ ؛ $c = 4$ ؛ $n = 3$

١٦- $f(x) = \tan x$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 3$

١٨- $f(x) = \ln x$ ؛ $c = 1$ ؛ $n = 3$

٢٠- $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $c = 1$ ؛ $n = 3$

٢٢- $f(x) = (1+x)^{3/2}$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 3$

٢٤- $f(x) = \ln(x+2)$ ؛ $c = -1$ ؛ $n = 3$

٢٦- $f(x) = e^{-x^2}$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 3$

٢٨- $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ ؛ $c = 0$ ؛ $n = 2$

في التمارين من ٢٩ - ٣٤ استخدم نتائج التمارين أعلاه وكذلك الأمثلة الواردة في هذا الفصل لإيجاد قيمة تقريبية للأعداد المعطاة بخطأ مقداره أصغر من القيمة المبينة.

٢٩- $e^{1/2}$؛ 0.001 ٣١- $e^{-1/2}$ ؛ 0.0001	٣٠-- $\ln 1.1$؛ 0.00001 ٣٢- $\cos(-\pi/3)$ ؛ 0.001
٣٣- $\sin(\pi/10)$؛ 0.001 ٣٥- $\ln(3/2)$ ؛ 0.01	٣٤- لتكن $f(x)=\sqrt{1+x}$

(أ) أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة الثانية.

(ب) استخدم نتيجة فقرة (أ) لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{2}$.

(جـ) استخدم نتيجة فقرة (أ) لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{11}$.

٣٦- استخدم كثيرة حدود تايلور في تمرين (٢٠) لحساب $\sqrt{5}$ صحيحا لعدد من المنازل العشرية بحيث يمكن إهمال R_4.

٣٧- استخدم كثيرة حدود ماكلورين للدالة في تمرين (٨) لحساب $\ln 1.2$ صحيحة لأربع منازل عشرية.

٣٨- إذا كان $0 \le x \le \frac{1}{2}$، فاثبت أن $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R(x)$، حيث $|R(x)| < \frac{1}{3840}$.

٣٩- استخدم نتيجة تمرين (٣٦) لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^{1/\sqrt{2}} \sin x^2 dx$ ومن ثم قدر قيمة الخطأ.

٤٠- بفرض أن $f^{(3)}(0)$ موجودة . تحقق من أن كثيرة حدود تايلور المعرفة بالصيغة (٤) ؛ وذلك بوضع $c=0$ ؛ للدالة f ، لها نفس قيمة f عند الصفر وكذلك المشتقات الأولى والثانية والثالثة.

(٤-٤)

● مقدمة لمتسلسلات القوى

Introduction To Power Series

إن أحد الأسباب الهامة لدراستنا للمتسلسلات في الفصل الثالث هو تمثيل الدوال بمتسلسلات قوى ، أي متسلسلات حدودها تحوي قوى لمتغير x. في المثالين (٨) و (٩) من الباب الثالث فصل (٣-١٣) حددنا قيم المتغير x التي تكون عندها المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ و $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ متقاربتين، مثل هذه المتسلسلات تسمى متسلسلات قوى.

(٤-٤-١) تعريف

ليكن x متغيرا. تسمى المتسلسلة من الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

متسلسلة قوى في x .حيث a_n عدد حقيقي لكل n.

سنفترض أن $x^0 = 1$ بما في ذلك الحالة التي تكون عندها $x = 0$. في دراستنا للمتسلسلات ذات الحدود الثابتة تركز اهتمامنا في تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة. وفي دراستنا الحالية لمتسلسلات القوى فإن جل اهتمامنا يكمن في تحديد قيم المتغير x التي تكون عندها المتسلسلة متقاربة وتلك التي عندها المتسلسلة متباعدة. كل قيمة للمتغير x عندها متسلسلة القوى متقاربة تحدد عددا هو مجموع المتسلسلة. إذن متسلسلة القوى تعرف دالة نطاقها جميع قيم x التي تكون عندها المتسلسلة متقاربة. من الواضح أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة عندما $x = 0$. هناك متسلسلات قوى غير متقاربة لأي قيم أخرى للمتغير x ، وهناك أيضا متسلسلات متقاربة لكل قيم المتغير x.

توضح الأمثلة التالية كيفية استخدام اختبار النسبة في تحديد قيم x التي عندها متسلسلة القوى متقاربة.

مثال (١)

اثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ متقاربة فقط عندما $x = 0$.

الحل

إذا كان $x \neq 0$، فان

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

بالتالي ومن اختبار النسبة فان المتسلسلة متباعدة لكل $x \neq 0$.

وعلى النقيض فان متسلسلة القوى قد تتقارب لكل x.

مثال (٢)

اثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل عدد حقيقي x.

الحل

إذا كان $x \neq 0$، فان

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

وبالتالي ومن اختبار النسبة فإن المتسلسلة متقاربة لكل عدد x.

تقع بين هذين النقيضين في مثال (١) ومثال (٢) متسلسلات قوى تتقارب لبعض قيم x الحقيقية غير الصفرية، وتتباعد لقيم x الأخرى. كما يتضح في المثال التالي.

مثال (٣)

حدد قيم x التي تكون عندها متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$ متقاربة.

الحل

إذا كان $x \neq 0$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{2^n x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{3}\frac{n}{(n+1)}x\right| = \frac{2}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}|x|$$

بالتالي من اختبار النسبة فإن المتسلسلة تكون متقاربة مطلقا عندما $\frac{2}{3}|x| < 1$، أو ما يكافئ ذلك عندما تكون $|x| < \frac{3}{2}$. كما تكون المتسلسلة متباعدة عندما تكون $\frac{2}{3}|x| > 1$، أو ما يكافئ ذلك عندما تكون $|x| > \frac{3}{2}$. وعندما تكون $\frac{2}{3}|x| = 1$ (أي عندما تكون $x = \pm\frac{3}{2}$) فان اختبار النسبة يفشل. لذلك لا بد من اختبار المتسلسلة عند هاتين القيمتين بطريقة أخري.

عندما $x = \frac{3}{2}$ نحصل على المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n3^n}\frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

من مثال (١) فصل (٣-١٣) نجد أن المتسلسلة متقاربة.

عندما $x = -\frac{3}{2}$ نحصل على المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n3^n}\left(-\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$$

وهذه المتسلسلة متباعدة لأنها المتسلسلة التوافقية.

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متقاربة لكل $-\frac{3}{2}<x\leq\frac{3}{2}$ ، ومتباعدة لكل $x>\frac{3}{2}$ أو $x\leq-\frac{3}{2}$.

نلاحظ من مثال (٣) أن المتسلسلة متقاربة لجميع x في الفترة المفتوحة التي تحتوي الصفر. وبشكل عام، إذا وجدت قيمة غير صفرية للعدد x وكانت عندها المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متقاربة، فإنها متقاربة لجميع قيم x في فترة مفتوحة تحتوي الصفر. كما يتضح من النظرية التالية:

(٤-٤-٢) نظرية

(ا) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متقاربة لعدد حقيقي $d\neq 0$ فإنها متقاربة مطلقا لكل $|x|<|d|$.

(ب) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متباعدة لعدد حقيقي $d\neq 0$ فإنها متباعدة لكل $|x|>|d|$.

البرهان:

(ا) لنفرض أن $|x|<|d|$، ولنكتب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ على النحو:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nd^n\left(\tfrac{x}{d}\right)^n$$

من منطوق النظرية المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nd^n$ متقاربة، من نظرية (٣-٤-٢) فإن $\lim_{n\to\infty}a_nd^n=0$. بأخذ $\varepsilon=1$ في تعريف (٣-٣-٢) يوجد عدد موجب N بحيث أن $|a_nd^n|\leq 1$ لكل $n\geq N$. هذا يعني أن

$$|a_nx^n|=|a_nd^n|\left|\frac{x}{d}\right|^n\leq\left|\frac{x}{d}\right|^n \quad \text{لكل} \; n\geq N$$

بما أن $|x|<|d|$ فإن $|x/d|<1$ ، ومنه $\sum_{n=N}^{\infty}|x/d|^n$ متقاربة مطلقا كمتسلسلة هندسية. من اختبار المقارنة نظرية (٣-٩-٥) ينتج أن $\sum_{n=N}^{\infty}a_nx^n$ متقاربة مطلقا، وبالتالي فإن $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متقاربة مطلقا. هذا يثبت (ا) . لإثبات (ب) نفرض أن $\sum_{n=0}^{\infty}a_nd^n$ متباعدة ، إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متقاربة وبمبادلة دور كل من x و d في (ا) نجد أن $\sum_{n=0}^{\infty}a_nd^n$ متقاربة وهذا يناقض الفرض . إذن $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متباعدة.■

تزودنا النظرية (٤-٤-٢) بمعلومات عن تقارب متسلسلات القوى أكثر مما قد يبدو لنا للوهلة الأولى. رأينا في المثالين (١) و (٢) أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ قد تتقارب فقط عند $x=0$ وقد تتقارب لكل x ؛ خلافا لهاتين الحالتين، فان المتسلسلة يجب أن تتقارب لقيمة غير صفرية للمتغير

x وتباعد لقيمة غير صفرية مختلفة للمتغير x . نظرية (٤-٤-٢) تقتضي في هذه الحالة انه يوجد عدد $r > 0$ بحيث أن المتسلسلة تتقارب عندما تكون $|x| < r$ وتتباعد عندما تكون $|x| > r$ ؛ هذه النتيجة أساسية في دراسة متسلسلات القوى.

(٤-٤-٣) نظرية

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى . عندئذ فإن واحدا فقط من الشروط التالية يتحقق:

ا. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة فقط عند $x = 0$.

ب. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة لكل x.

جـ. يوجد عدد $r > 0$ بحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة لكل x، حيث $|x| < r$ ومتباعدة لكل x، حيث $|x| > r$.

يسمى العدد r في **(جـ)** من النظرية (٤-٤-٣) **نصف قطر تقارب المتسلسلة** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. إذا حققت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ فرع (ا) فإننا نضع $r = 0$، وإذا حققت فرع **(ب)** فإننا نضع $r = \infty$. إذن لكل متسلسلة قوى نصف قطر تقارب r ، وهو على العموم عدد حقيقي غير سالب أو يساوي ∞. تسمى مجموعة قيم x والتي عندها $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة **فترة تقارب المتسلسلة** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. من الشروط (ا)-**(جـ)** نستنتج أن فترة تقارب المتسلسلة تأخذ واحدا وواحدا فقط من الأشكال التالية:

$$[0,0],\quad [-r,r],\quad (-r,r],\quad [-r,r),\quad (-r,r),\quad (-\infty,\infty)$$

يجب ملاحظة أن نصف قطر التقارب r ليس من الضرورة أن يكون 0 ، 1 ، ∞ . فمثلا، المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^n$ متقاربة لكل x في الفترة $(-2,2)$،والسبب أن $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ فقط لتلك القيم للمتغير x؛ ومنه فإن $r = 2$. وبطريقة مشابهة يمكن تبيان أن أي عدد حقيقي موجب r هو نصف قطر تقارب لمتسلسلة قوى. المثال التالي يوضح عمق النظرية (٤-٤-٣).

مثال (٤)

حدد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{1/2}}$

الحل

بوضع $x = -1$ نجد أن المتسلسلة هي $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/2}}$ ، وهي متقاربة من اختبار المتسلسلة المترددة. عندما $x = 1$ تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ وهي متباعدة لأنها متسلسلة - p حيث

$p=\frac{1}{2}$. بما أن المتسلسلة متقاربة عندما $x=-1$ ومتباعدة عندما $x=1$ ، فإن النظرية (٤-٤-٣) تضمن أن نصف قطر التقارب $r=1$ وبالتالي فترة التقارب $[-1,1)$.

إن إيجاد فترة تقارب المتسلسلة في معظم الحالات ليس بالأمر السهل كما هي الحال في مثال (٤). والطريقة المعتادة هي استخدام اختبار النسبة المعمم أو اختبار الجذر المعمم لإيجاد نصف قطر التقارب ومن ثم اختبار التقارب عند النهايتين $x=r$ و $x=-r$ كل على انفراد. المثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٥)

أوجد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

الحل

عندما $x\neq 0$ نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}x\right| = |x|$$

من اختبار النسبة المعمم ، نعلم أن المتسلسلة متقاربة لكل x ، حيث $|x|<1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $1<|x|$. من نظرية (٤-٤-٣) (جـ) ، فان نصف قطر تقارب المتسلسلة هو $r=1$. لا نستطيع استنتاج أي شيء من اختبار النسبة المعمم عندما تكون $|x|=1$ ، وعلينا اختبار القيمتين 1 و1− كل على انفراد. وعند هاتين القيمتين ، نحصل على المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ ، وكل منهما متباعدة . وعليه فان فترة تقارب المتسلسلة هي $(-1,1)$.

نستعرض فيما يلي أنواع أعم لمتسلسلات القوى.

(٤-٤-٤) تعريف

ليكن c عددا حقيقيا و x متغيرا . نعرف متسلسلة القوى في $x-c$ ، بأنها المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

حيث أن المعاملات a_n ، $n=0,1,2,\dots$ أعداد حقيقية .

سنفترض أن $(x-c)^0=1$ بما في ذلك الحالة التي يكون عندها $x=c$. بطريقة مشابهة لبرهان نظرية (٤-٤-٣) ، وفقط بوضع $(x-c)$ بدلا من x ، فإن واحدة وواحدة فقط من الحالات التالية تتحقق:

(ا) المتسلسلة متقاربة فقط عندما $x-c=0$ أي $x=c$.

(ب) المتسلسلة متقاربة لكل x .

(جـ) يوجد عدد حقيقي موجب r بحيث أن المتسلسلة متقاربة لكل x، حيث $|x-c|<r$ ومتباعدة لكل x، حيث $|x-c|>r$.

كما في حالة المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون عندها المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ متقاربة بفترة التقارب ويسمى r نصف قطر التقارب .

مثال (٦)

أوجد فترة تقارب المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}(x-5)^n$.

الحل

عندما $x\neq 5$ نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{(x-5)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}(x-5)\right|=|x-5|$$

من اختبار النسبة المعمم ، المتسلسلة متقاربة عندما تكون $|x-5|<1$ ومتباعدة لكل x، حيث $|x-5|>1$. أي أنها متقاربة لكل x في الفترة $(4,6)$ ومتباعدة لكل x ، حيث $x<4$ أو $x>6$. نختبر النهايتين كل على انفراد. عندما $x=4$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة، وعندما $x=6$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ وهي متقاربة. اذن فترة التقارب هي $(4,6]$ كما أن نصف قطر التقارب $r=1$.

(٤-٥) تمارين

في التمارين من ١ - ٣٩ أوجد فترة تقارب متسلسلة القوى المعطاة:

١- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}x^n$

٢- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

٣- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{4^n}x^n$

٤- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^nx^n$

٥- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}3^n}x^n$

٦- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n+1}n^2}x^n$

٧- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n}$

٨- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$

٩- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}x^n$

١٠- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}x^n$

١١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} x^n$

١٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$

١٣- $\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh 2n) x^n$

١٤- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n-1}}{n^2}$

١٥- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^2} x^{2n}$

١٦- $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n$

١٧- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} (x-1)^n$

١٨- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{n+3} x^{2n}$

١٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n (x-5)^n}{n+1}$

٢٠- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n!} x^n$

٢١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

٢٢- $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n) x^n$

٢٣- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} x^n$

٢٤- $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$

٢٥- $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$

٢٦- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} x^n$

٢٧- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-4)^n} x^{2n+1}$

٢٨- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n} 3^n} x^n$

٢٩- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{n+1}}{3^{2n}} x^n$

٣٠- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$

٣١- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n} (x-4)^n$

٣٢- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (x+3)^n$

٣٣- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{2n-1}} (x-1)^{2n}$

٣٤- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^{3n}} (x+4)^n$

٣٥- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^3} (x+2)^n$

٣٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$

٣٧- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3n+4}} (3x+4)^n$

٣٨- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{n+1}}{n^n} (x-1)^n$

٣٩- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n6^n} (2x-1)^n$

في التمارين من ٤٠-٤٣ أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة المعطاة.

٤٠- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

٤١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

٤٢- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\left[1\cdot4\cdot7\cdot\cdots\cdot(3n-2)\right]}x^n$ ٤٣- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{3\cdot6\cdot9\cdot\cdots\cdot(3n)}x^n$

٤٤- إذا كان a و b عددين صحيحين موجبين، أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+a)!}{n!(n+b)!}x^n$$

٤٥- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ متقاربة مطلقا، فاثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متقاربة مطلقا لكل $|x| < 1$.

٤٦- اثبت أنه إذا كان r نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ، فإن $\sqrt{r}$ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$.

٤٧- اثبت أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=L$ $(L\neq 0)$، فإن نصف قطر تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ هو $\frac{1}{L}$.

٤٨- اثبت أنه إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة مطلقا عند أحد نهايتي فترة تقاربها، فإنها متقاربة مطلقا عند النهاية الأخرى.

٤٩- اثبت أنه إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة عند أحد نهايتي فترة تقاربها ومتباعدة عند الأخرى، فإنها متقاربة شرطيا عند النهاية التي تكون عندها المتسلسلة متقاربة.

٥٠- تعتبر دوال بيسل (Bessel functions) ذات أهمية في دراسة المسائل المتعلقة بالتذبذب. ليكن α عددا صحيحا موجبا ، تعرف دالة بيسل $J_{\alpha}(x)$ من النوع الأول والرتبة α بمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+\alpha)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$. اثبت أن هذه المتسلسلة متقاربة لكل عدد حقيقي.

٥١- باعتبار تمرين (٥٠). تستخدم أحيانا كثيرة الحدود من الدرجة السادسة

$$1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2304}$$

لتقريب دالة بيسل $J_0(x)$ من النوع الأول والرتبة صفر لكل $0 \le x \le 1$. اثبت أن نسبة الخطأ في التقريب أصغر من 0.00001.

(٤-٦)

تمثيل الدوال بمتسلسلات القوى

Power Series Representations Of Functions

تحدد متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دالة f نطاقها فترة تقارب المتسلسلة . لكل x في فترة تقارب المتسلسلة نعرف الدالة $f(x)$ بأنها

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ويقال في هذه الحالة أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تمثل الدالة f ، أو أن الدالة f مثلت بمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

لتمثيل الدوال بمتسلسلات القوى تطبيقات عدة في الرياضيات ، فالحسابات العددية والمستخدم فيها متسلسلات القوى تشكل الأساس في تصميم الآلات الحاسبة والجداول الرياضية . كذلك فإن العديد من الدوال يمكن النظر إليها كمتسلسلات قوى . على سبيل المثال ، سنرى لاحقا أن الدالة e^x يمكن تمثيلها على النحو

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

وبالتالي يمكننا النظر إلى e^x كمتسلسلة قوى بدلا من أنها الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية الطبيعية. وكما سنرى ، فإن العمليات الجبرية ، مثل الاشتقاق والتكامل يمكن إجراؤها باستخدام متسلسلة e^x بدلا من الطرائق السابقة. الشيء نفسه صحيحا للدوال المثلية والمثلية العكسية وكذلك الدوال الزائدية.

مثال (١)

أوجد الدالة الممثلة بمتسلسلة القوى : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

الحل

إذا كانت $|x| < 1$ ، فمن نظرية (٣-٧-١) المتسلسلة الهندسية المعطاة متقاربة ومجموعها

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

وبالتالي

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (١)$$

أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ تمثل الدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ في الفترة $(-1,1)$

يمكن استخدام متسلسلة القوى في (١) للحصول على متسلسلات قوى يمكن تحديد مجموعها. بوضع $-x$ بدلا من x في (١) نحصل على

$$|x|<1، \quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-x^{3}+\cdots+(-1)^{n}x^{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}$$

(٢)

بوضع x^2 بدلا من x في (١) نحصل على

$$|x|<1 \text{ ، } \frac{1}{1-x^{2}}=1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+\cdots+x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} \qquad (٣)$$

إذا وضعنا $-x^2$ عوضا عن x ، ينتج

$$|x|<1 \text{ ، } \frac{1}{1-x^{2}}=1-x^{2}+x^{4}-x^{6}+\cdots+(-1)^{n}x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n} \qquad (٤)$$

مثال (٢)

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $f(x)=\dfrac{5}{3-7x}$.

الحل

نكتب $f(x)$ على الصيغة : $f(x)=\dfrac{5}{3-7x}=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{1-(7/3)x}\right)$

نضع $(7/3)x$ بدلا من x في (١) نحصل على

$$f(x)=\frac{5}{3-7x}=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{1-(7/3)x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3}((7/3)x)^{n} \text{ ، } |x|<3/7 .$$

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$ دالة. فيمكننا طرح التساؤل، هل مشتقتها موجودة ؟ سنرى أن متسلسلة القوى ذات نصف قطر تقارب لا يساوي الصفر دائما قابلة للاشتقاق ، وأكثر من ذلك فإننا نحصل على المشتقة باشتقاق حدا ـــ حدا تماما كما نفعل في إيجاد مشتقة كثيرة الحدود.

النظرية التالية ستعطى دون برهان. وعلى المهتم الرجوع إلى [1] أو [3] .

(٤-٦-١) نظرية (نظرية الاشتقاق لمتسلسلات القوى)

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$ متسلسلة قوى ذات نصف قطر تقارب $r>0$. ولتكن $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$ لكل x في فترة تقارب المتسلسلة . فإن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_{n}x^{n})=\sum_{n=1}^{\infty}na_{n}x^{n-1}$$

لكل $|x|<r$. وأكثر من ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}na_{n}x^{n-1}$ لها نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$.

لاحظ أن بداية دليل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ هو 1 وليس صفرا، لأن مشتقة الحد $a_0 x^0$ صفرا .

مثال (٢)

اثبت أن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (٥)$$

الحل

نعلم من مثال (٢) فصل (٤-٢) أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل x . من نظرية الاشتقاق فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}$ متقاربة لكل x وأن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

نعرف f بأنها $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ لكل x ، فإن (٥) يمكن إعادة كتابتها على الصيغة $f`(x)=f(x)$ لكل x . وبما أن $f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!}=1$. نستنتج أن $f(x)=e^x$ لكل x .

ومنه

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (٦)}$$

وهذا يعني أننا أوجدنا صيغة للدالة e^x كمتسلسلة قوى ، كما نوهنا في بداية هذا الفصل.

لاحظ أن (٦) تمكننا من التعبير عن العدد e كمجموع لمتسلسلة قوى متقاربة ذات حدود موجبة.

أي : $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

أيضا يمكننا استخدام (٦) للحصول على تمثيل لبعض الدوال بمتسلسلات قوى ، نورد بعضا منها

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$e^{-x}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{x^2}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

بجمع الحدود المتناظرة للمتسلسلتين e^x و e^{-x} نحصل على

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \cdots + 2\frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

ومنه نحصل على متسلسلة قوى تمثل الدالة $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^x)$، أي

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

أيضا نستطيع أن نجد متسلسلة قوى تمثل الدالة $\sinh x$ إما باستخدام الصيغة $\frac{1}{2}(e^x - e^x)$، أو باشتقاق حدود متسلسلة $\cosh x$. وسنترك ذلك كتمرين للبرهنة على أن

$$\sinh x = \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \,.$$

مثال (٣)

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $f(x) = xe^{-2x}$.

الحل

نضع $-2x$ بدلا من x في (٦) نحصل على: $e^{-2x} = \sum_0^\infty (-2)^n \frac{x^n}{n!}$

بضرب الطرفين بـــ x نحصل على : $xe^{-2x} = \sum_0^\infty (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$

تنبيه

بالرغم من أن نظرية الاشتقاق لمتسلسلات القوى تؤكد بأن نصف قطر تقارب المتسلسلتين $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ و $\sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1}$ هو نفسه، إلا أن هذا لا يعني أن فترة تقارب المتسلسلتين هي نفسها. وعلى النقيض، فإن فترة تقارب المتسلسلة $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n}$ هي $[-1,1)$، بينما فترة تقارب المتسلسلة $\sum_0^\infty x^{n-1}$ هي $(-1,1)$.

تكامل متسلسلات القوى:

بفرض أن $r > 0$ وأن المتسلسلة $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ متقاربة لكل $-r < x < r$. نعلم أن المتسلسلة قابلة للاشتقاق، وبالتالي متصلة على الفترة $(-r,r)$. وبناءا عليه يمكن تكامل الدالة $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ على فترة مغلقة جزئية من الفترة $(-r,r)$. النظرية التالية تنص على أنه يمكن تكامل متسلسلة القوى حدا حدا تماما كما فعلنا في الاشتقاق. ستعطى النظرية دون برهان وعلى المهتم الرجوع إلى [1].

(٤-٦-٢) نظرية (التكامل لمتسلسلات القوى)

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r > 0$. ولتكن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

لكل x في فترة تقارب المتسلسلة. فإن

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

لكل $-r < x < r$. وأكثر من ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ لها نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

تعتبر هذه النظرية أداة قيمة لأنها تمكننا من تمثيل العديد من الدوال بمتسلسلات قوى.

مثال (٤)

اثبت أن

$$\arctan x = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (٧)$$

لكل $-1 < x < 1$.

الحل

من مثال (١) في هذا الفصل نعلم أن

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \qquad (٨)$$

إذا كانت $|t| < 1$ فإن $|t^2| < 1$. وبالتالي يمكننا التعويض بـــ t^2 بدلا من t في (٨) نحصل على

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$ لكل $|t| < 1$.

من نظرية التكامل للمتسلسلات فإن

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right) dt = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

لكل $|x| < 1$.

يمكن إثبات أن هذه المتسلسلة متقاربة أيضا عندما $x = \pm 1$. تسمى المتسلسلة

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

بمتسلسلة جريجوري (Gregory's Series) نسبة إلى عالم الرياضيات الاسكتلندي جيمس جريجوري (James Gregory). بوضع $x = 1$ نحصل على الصيغة التالية لقيمة $\pi/4$

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

والتي تسمى في غالب الأحيان بمتسلسلة لبنتز (Leibniz). تتقارب هذه المتسلسلة ببطء شديد، وليس من الحكمة استخدامها لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\pi/4$. ويرجع سبب ذلك أننا نحتاج لعدد كبير جدا من حدود المتسلسلة لإيجاد قيمة تقريبية معقولة، فمثلا للحصول على قيمة تقريبية بخطأ أقل من 0.0001 فإننا نحتاج إلى 5000 حد. على أية حال نستطيع أن نستخدم المتسلسلة $\tan^{-1} x$ والتركيب الجبري

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} \qquad (٩)$$

وذلك لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\pi/4$.

مثال (٥)

اثبت (٩) ثم استخدمها لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\pi/4$ بخطأ أقل من 0.0001، واستخدم هذه القيمة التقريبية لإيجاد قيمة تقريبية للعدد π بخطأ أقل من 0.0004.

الحل

لندع $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ و $\beta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$. فإن

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\ \tan\beta}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3+2}{6-1} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

بالتالي، وبما أن $0 < \alpha + \beta < \frac{1}{2}\pi$، فإن $\frac{1}{4}\pi = \alpha + \beta$، أي أن

$$\frac{1}{4}\pi = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

بوضع $x = \frac{1}{2}$ في (٧)، سنقوم بإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ و $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ بخطأ مقداره أقل من 0.00005 ومنه نحصل على قيمة تقريبية للعدد $\pi/4$ بخطأ مقداره أقل من 0.0001. متسلسلة

القوى (٩) تحقق شروط المتسلسلة المتناوبة لكل $0 \le x < 1$. وباستخدام نظرية (٣-١٣-٢) لتقريب $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ فإننا نحتاج n كبيرة كبرا كافيا لضمان أن

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)+1}\right| = \left(\frac{1}{2n+3}\right)\left(\frac{1}{2^{2n+3}}\right) < 0.00005$$

وهذا يتحقق إذا كان $n \ge 4$. وبالتالي

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\frac{1}{2} &\approx \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\right]\\ &\approx 0.500000-0.041667+0.006250-0.001116+0.000217\\ &\approx 0.463684\end{aligned}$$

بخطأ أقل من 0.00005. ولتقريب $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ نحتاج n كبيرة كبرا كافيا بحيث

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)+1}\right| = \frac{1}{2n+3}\left(\frac{1}{3^{2n+3}}\right) < 0.00005$$

وهذا يتحقق إذا كان $n \ge 4$. ينتج أن

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\frac{1}{3} &\approx \left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{7}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\right]\\ &\approx 0.333333-0.012346+0.000823-0.000065+0.000006\\ &\approx 0.321751\end{aligned}$$

بخطأ أقل من 0.00005. وبالتالي من (٩)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3} &\approx 0.463864+0.321751\\ &\approx 0.785435\end{aligned} \qquad (١٠)$$

بخطأ مقداره أقل من

$$0.00005+0.00005=0.0001$$

بضرب (١٠) بالعدد 4 نحصل على

$$\pi \approx 3.14174$$

بخطأ مقداره أقل من 0.0004.

ننوه إلى أن الحاسبات ذات السرعة العالية استخدمت حديثا لإيجاد قيمة تقريبية للعدد π تصل إلى ستة ملايين منزلة عشرية.

مثال (٦)

اثبت أن

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \qquad (١١)$$

لكل x ، حيث $|x| < 1$.

الحل

إذا كانت $|x| < 1$ فإن

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x [\sum_0^\infty (-1)^n t^n]\, dt$$

$$= \sum_0^\infty \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

لكل x ، حيث $|x| < 1$.

مثال (٧)

استخدم نتيجة مثال (٦) لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\ln(1.1)$ لخمسة منازل عشرية.

الحل

بوضع $x = 0.1$ في (١١) نحصل على

$$\ln(1.1) = \ln(0.1+1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{3} - \frac{(0.1)^4}{4} + \frac{(0.1)^5}{5} - \cdots$$

$$\approx 0.1 - 0.005 + 0.000333 - 0.000025 + 0.000002 - \cdots$$

بجمع الحدود الخمسة الأولى إلى خمسة منازل عشرية نحصل على

$$\ln(1.1) = 0.09531$$

من نظرية (٣-١٣-٢) فإن قيمة الخطأ أقل أو تساوي القيمة المطلقة للحد الخامس والذي يساوي 0.00002 من المتسلسلة. وبالتالي فإن القيمة 0.09531 دقيقة لخمسة منازل عشرية.

بوضع $-x$ بدلا من x في (١٠) ، ينتج لكل x ، حيث $|x| < 1$ أن

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdots = \sum_0^\infty \frac{-x^{n+1}}{n+1} \qquad (١٢)$$

بطرح (١٢) من (١١) حدا ــ حدا ينتج لكل x ، حيث $|x| < 1$ أن

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)=\sum_0^\infty\frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (١٣)$$

تستخدم هذه المتسلسلة لحساب اللوغاريتم الطبيعي لأي عدد موجب.

توضيح:

إذا كان y عددا موجبا، ولندع $y=\frac{1+x}{1-x}$ وبالتالي $x=\frac{y-1}{y+1}$ و $|x|<1$. على سبيل المثال، إذا كان $y=2$ فإن $x=\frac{1}{3}$، من (١٣)

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}+\frac{1}{11.3^{11}}\cdots\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{81}+\frac{1}{1215}+\frac{1}{15309}+\frac{1}{177147}+\frac{1}{1948617}\cdots\right)$$

$$\approx 2\begin{pmatrix}0.333333+0.012346+0.000823+\\0.000065+0.000006+0.000001+\end{pmatrix}$$

باستخدام الستة حدود الأولى، والضرب في 2 ثم التقريب لخمسة منازل عشرية نحصل على

$$\ln 2\approx 0.69315 .$$

مثال (٨)

لتكن g دالة معرفة

$$g(t)=\begin{cases}e^t-1/t & ;\ t\neq 0\\ 1 & ;\ t=0\end{cases}$$

(أ) اثبت أن g متصلة عند 0.

(ب) أوجد متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ التي تمثل الدالة

$$\int_0^x g(t)\,dt$$

الحل

فقط سنثبت فقرة (ب). من المعادلة (٦) فإن

$$e^t-1=t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

بالقسمة على

$$\frac{e^t-1}{t}=1+\frac{t}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{n!}+\cdots$$

بما أن متسلسلة القوى هذه لها القيمة 1 عند $t=0$ وبما أن $g(0)=1$ فإن

$$g(t)=1+\frac{t}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{n!}+\cdots$$

لكل t. بتطبيق نظرية التكامل للمتسلسلات، ينتج

$$\int_0^x g(t)\,dt=\int_0^x\Big(\sum_1^\infty\frac{t^{n-1}}{n!}\Big)\,dt=\sum_1^\infty\frac{x^n}{n(n!)}$$

$$=x+\frac{x^2}{2(2!)}+\frac{x^3}{3(3!)}+\cdots+\frac{x^n}{n(n!)}+\cdots$$

وبالتالي فإن متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $\int_0^x g(t)\,dt$ هي $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$، حيث $a_n=\frac{1}{n(n!)}$.

(٤-٧) تمارين

في التمارين من ١-٤ أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $f(x)$. استخدم نظريتي (٤-٦-١) و (٤-٦-٢) أوجد متسلسلة القوى التي تمثل $f'(x)$ وكذلك $\int_0^x f(x)dx$.

١- $f(x)=\frac{1}{1-3x}$ ؛ $|x|<\frac{1}{3}$

٢- $f(x)=\frac{1}{1+5x}$ ؛ $|x|<\frac{1}{5}$

٣- $f(x)=\frac{1}{2+7x}$ ؛ $|x|<\frac{2}{7}$

٤- $f(x)=\frac{1}{3-2x}$ ؛ $|x|<\frac{3}{2}$

في التمارين من ٥-١٠ أوجد متسلسلة القوى التي لها المجموع المعطى.

٥- $\frac{x}{2-3x}$

٦- $\frac{x^3}{4-x^3}$

٧- $\frac{x}{1-x^4}$

٨- $\frac{x^2}{1-x^2}$

٩- $\frac{x^2+1}{x-1}$

١٠- $\frac{x^2-3}{x-2}$

في التمارين من ١١-٢٣ استخدم متسلسلات القوى التي حصلنا عليها في هذا الفصل لإيجاد متسلسلة القوى التي تمثل $f(x)$.

١١- $f(x)=x^3e^{-x}$

١٢- $f(x)=x^2e^{x^2}$

١٣- $f(x)=x^2e^{-3x}$

١٤- $f(x)=x^2\tan^{-1}x^2$ ؛ $|x|<1$

١٥- $f(x)=x^2\ln(1+x^2)$ ؛ $|x|<1$

١٦- $f(x)=\sinh(-5x)$

١٧- $f(x)=\tan^{-1}\sqrt{x}$ ؛ $|x|<1$

١٨- $f(x)=\cosh(-2x)$

١٩- $f(x)=x\ln(1-x)$ ؛ $|x|<1$

٢٠- $f(x)=\sinh(x^2)$

٢١- $f(x)=x^2\cosh(x^3)$

٢٢- $f(x)=\cos(-3x)$

٢٣- $f(x)=x^4\sin(x^2)$

في التمارين من ٢٤-٢٧ أوجد متسلسلة القوى التي تمثل التكامل وحدد نصف قطر تقاربها.

٢٤- $\int_0^x f(t)dt$ ؛ حيث $f(t)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+t)}{t} & ;t\neq 0\\ 1 & ;t=0\end{cases}$

٢٥- $\int_0^x f(t)dt$ ؛ حيث $f(t)=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t} & ;t\neq 0\\ 1 & ;t=0\end{cases}$

٢٦- $\int_0^x f(t)dt$ ؛ حيث $f(t)=\begin{cases}\dfrac{\tan^{-1}t}{t} & ;t\neq 0\\ 1 & ;t=0\end{cases}$

٢٧- $\int_0^x f(t)dt$ ؛ حيث $f(t)=\begin{cases}\dfrac{\sinh t}{t} & ;t\neq 0\\ 1 & ;t=0\end{cases}$

في التمارين من ٢٨-٣٥ أوجد قيمة تقريبية للتكامل بخطأ أصغر من الخطأ المعطى، وذلك باستخدام نظرية التكامل أولا للتعبير عن التكامل كمتسلسلة قوى ومن ثم قرب المتسلسلة باستخدام مجموع جزئي مناسب.

٢٨- $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ ؛ 10^{-3}

٢٩- $\int_0^1 \cos x^2\,dx$ ؛ 10^{-7}

٣٠- $\int_0^2 \sin x^2\,dx$ ؛ 10^{-2}

٣١- $\int_0^1 \dfrac{1-e^x}{x}\,dx$ ؛ 10^{-3}

٣٢- $\int_0^{1/5} \tan^{-1} x dx$ ؛ 10^{-5}

٣٣- $\int_0^{1/2} \dfrac{x^2}{1+x}\,dx$ ؛ 10^{-3}

٣٤- $\int_{-1}^{0} e^{x^2}\,dx$ ؛ 10^{-3}

٣٥- $\int_0^1 \dfrac{x^3}{2+x}\,dx$ ؛ 10^{-3}

في التمارين من ٣٦-٤٣ أوجد قيمة تقريبية للتكامل لأربعة منازل عشرية.

٣٦- $\int_0^{1/2} \tan^{-1} x^2\,dx$

٣٩- $\int_0^{1/3} \dfrac{1}{1+x^6}\,dx$

٤٠- $\int_0^{0.2} \dfrac{x^3}{1+x^5}\,dx$

٤١- $\int_0^1 e^{-x^2/10}\,dx$ ٤٢- $\int^{0.5} e^{-x^3}\,dx$ ٤٣- $\int_0^{0.2} \frac{\tan^{-1} x}{x}\,dx$

٤٤- استخدم الصيغة (1) ونظرية الاشتقاق، اثبت أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

٤٥- اثبت أن كلا المتسلسلتين

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

متقاربتان لكل x .

٤٦- لتكن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ا. اثبت أن $f'(x) = -g(x)$ و $g'(x) = f(x)$.

ب. اثبت أن $f''(x) = -f(x)$ و $g''(x) = -g(x)$.

جـ. ما هي الدوال التي تعرفها وتحقق الخواص (ا) و (ب)؟

٤٧- أوجد متسلسلة القوى التي تمثل $e^x - 1/x$ واستخدمها لإثبات

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

٤٨- أوجد متسلسلة القوى التي تمثل $(e^x - 1 - x)/x^2$ واستخدمها لحساب

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

٤٩- استخدم الصيغة (12) لحساب

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

٥٠- عبر عن $\ln\left(1+x^2\right)$ كمتسلسلة قوى. ما نصف قطر تقارب المتسلسلة.

٥١- ا. اثبت أن $\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

ب. استخدم (ا) اثبت أن $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

جـ. استخدم الحقيقة التالية

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\le\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{N2^n}$$

لتقدير قيمة $\ln 2$ بخطأ أصغر من 0.001.

٥٢- أوجد قيمة تقريبية لـ $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ بخطأ أصغر من 0.001.

٥٣- باعتبار تمرين (٥٠) في تمارين (٤-٥). استخدم نظريتي الاشتقاق والتكامل لإثبات ما يلي:

ا. إذا كانت $J_0(x)$ و $J_1(x)$ دوال بيسل من الرتب 0 و 1 على الترتيب، فإن

$$\frac{d}{dx}\left(J_0(x)\right)=-J_1(x)$$

ب. إذا كانت $J_2(x)$ و $J_3(x)$ دوال بيسل من الرتب 2 و 3 على الترتيب، فإن

$$\int x^3J_2(x)dx=x^3J_3(x)+C$$

٥٤- ا. أوجد متسلسلة القوى التي تمثل $\frac{\tan^{-1}x}{x}$.

ب. استخدم (ا) لإثبات أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$

٥٥- ا. استخدم الصيغة (١) لإثبات أن

$$\frac{t^2}{1+t^4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{4n+2} \quad \text{لكل} \quad -1<t<1$$

ب. استخدم (ا) للتعبير عن $\int_0^{1/2}\frac{t^2}{1+t^4}dt$ كمجموع لمتسلسلة قوى.

٥٦- ا. أوجد متسلسلة القوى التي تمثل xe^x.

ب. اثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}=1$

٥٧- أوجد متسلسلة القوى التي تمثل $\ln(1+ax)$.

٥٨- أوجد متسلسلة القوى في x والتي تمثل الدالة $f(x)$ إذا كانت $f''(x)=-f(x)$، $f(0)=0$ و $f'(0)=1$. أوجد أيضا نصف قطر تقارب المتسلسلة.

٥٩- إذا كانت $g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2+3}$، أوجد $g(1)$ دقيقة لمنزلتين عشريتين.

٦٠- يتم امتصاص الضوء بواسطة الخلايا العصوية والمخروطية لشبكة العين. عدد الفوتونات الممتصة من قبل مستقبل الضوء خلال وميض ضوئي يحدد بتوزيع بواسون (Poisson distribution) . وبشكل أدق، فإن احتمال امتصاص مستقبل ضوئي عدد n من الفوتونات يعطى بالصيغة $p_n = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ من أجل $\lambda > 0$.

أ. اثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

ب. تتم الرؤيا عادة عند امتصاص اثنان أو أكثر من الفوتونات من قبل مستقبل الضوء. اثبت أن احتمال حدوث ذلك هو $1 - e^{-\lambda}(\lambda + 1)$.

(٤-٨)

متسلسلة تايلور
Taylor Series

في الفصل السابق بينا أن

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} \quad \text{لكل } x \qquad (١)$$

$$\ln(1+x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{لكل } -1 < x < 1 \qquad (٢)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{لكل } -1 < x < 1 \qquad (٣)$$

في الحالات الثلاث، نقول أن لدينا متسلسلة قوى تمثل الدالة المعطاة. بشكل أعم إذا كانت f دالة، و I فترة مفتوحة تحتوي 0 ، وكانت

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \quad \text{لكل } x \text{ في } I$$

فكما سبق وذكرنا في الفصل السابق، نقول أن لدينا متسلسلة قوى تمثل الدالة f على الفترة I.واحدة من المميزات الرئيسية لوجود متسلسلة قوى تمثل الدالة f على الفترة I، هي أن قيمة الدالة عند أي نقطة في I مجموع لمتسلسلة متقاربة، وبالتالي يمكن تقريب هذه القيمة بالمجاميع الجزئية لتلك المتسلسلة. وبما أن المجاميع الجزئية لمتسلسلة القوى هي كثيرات حدود، فإنه يسهل إيجاد قيم تقريبية للدوال التي تمثل بمتسلسلات قوى(أحيانا بمساعدة الحاسب الآلي). في هذا الفصل نقوم بدراسة الدوال التي تمثل بمتسلسلات قوى ونكون بذلك أكملنا مناقشة تقريب الدوال بكثيرات حدود والتي بدأنا بها في الفصل الأول من هذا الباب.

إذا كانت f دالة معطاة، نريد تحديد ما إذا كانت هناك متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ وفترة مفتوحة I تحتوي 0 بحيث أن

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \quad \text{لكل } x \text{ في } I \qquad (٤)$$

يمكننا حذف العديد من الدوال مثل $|x|$. ويرجع سبب ذلك إلى نظرية(٤-٦-١) حيث تؤكد هذه النظرية على أن أية دالة f تمثل بمتسلسلة قوى فإن لها مشتقات من جميع الرتب على I.

من منطوق نظرية الاشتقاق لمتسلسلات القوى فإن مشتقة المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ؛ذات نصف قطر تقارب لا يساوي الصفر؛ هي متسلسلة قوى لها نفس نصف قطر التقارب، وبالتالي يمكن اشتقاق المشتقة، أي أن متسلسلة القوى الأصلية يمكن اشتقاقها مرتين. بتكرار ما سبق، نستنتج أن متسلسلة القوى بنصف قطر تقارب $r>0$ لها مشتقات من جميع الرتب في الفترة $(-r,r)$. سنرى أن قيم المشتقات مرتبطة بالأعداد $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. للسهولة سنضع $f(0)=f^{(0)}(0)$.

(٤-٨-١) نظرية:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r>0$. ولتكن

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{٥}$$

لكل $-r<x<r$. فإن f لها مشتقات من جميع الرتب على الفترة $(-r,r)$، و

$$f^{(n)}(0)=n!a_n \tag{٦}$$

لكل $n\geq 0$. ونتيجة لذلك

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{٧}$$

البرهان:

طبقا للمناقشة التي سبقت هذه النظرية فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لها مشتقات من جميع الرتب على الفترة $(-r,r)$. بالتعويض $x=0$ في (٥) نحصل على

$$f(0)=f^{(0)}(0)=0!a_0$$

باشتقاق طرفي (٥) نحصل على

$$f^{(1)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{٨}$$

مرة ثانية نعوض $x=0$ ينتج أن

$$f^{(1)}(0)=a_1=1!a_1$$

اشتقاق (٨) يعطي

$$f^{(2)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

بالتعويض $x=0$ فإن

$$f^{(2)}(0)=2.1a_2=2!a_2$$

بنفس الطريقة، بتكرار عملية الاشتقاق ثم التعويض $x=0$ بالنتيجة نحصل على (٦).

إذا عوضنا بدلا من a_n من (٦) نحصل على (٧).■

تسمى المتسلسلة في (٧) بمتسلسلة ماكلورين للدالة f .

بتطبيق نفس نمط البرهان المستخدم في النظرية السابقة يعطينا النظرية التالية:

٤-٨-٢ نظرية:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r > 0$. ولتكن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \qquad (٩)$$

لكل $c - r < x < c + r$. فإن f لها مشتقات من جميع الرتب على الفترة $(c-r, c+r)$، و

$$f^{(n)}(c) = n! a_n \qquad (١٠)$$

لكل $n \geq 0$. ونتيجة لذلك

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \qquad (١١)$$

الصيغة (١١) في نظرية (٤-٨-٢) تخبرنا بأنه إذا وجد تمثيل للدالة على الصيغة (١١) أعلاه فإن

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

وبالتالي فإن الدالة يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى واحدة فقط.

(٤-٨-٣) تعريف:

إذا كانت f دالة لها مشتقات من جميع الرتب عند c. فإن متسلسلة تايلور للدالة f عند c هي متسلسلة القوى

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

لاحظ أنه عندما $c = 0$ نحصل على متسلسلة ماكلورين كحالة خاصة لمتسلسلة تايلور.

ينتج من النظريتين (٤-٨-١) و (٤-٨-٢) والتعريف (٤-٨-٣)، أنه إذا أمكن إيجاد متسلسلة قوى للدالة في x أو $x - c$ ، فإن هذه المتسلسلة لا بد وأن تكون متسلسلة ماكلورين أو تايلور للدالة على الترتيب. يتضح من هذا أن المتسلسلات في (١)، (٢) و (٣) هي متسلسلات ماكلورين لتلك الدوال. النظريات السابقة لا تجيب على التساؤل، ما الشروط التي يجب توفرها على الدالة لضمان وجود متسلسلة قوى تمثل الدالة؟ بمعنى أنه إذا كان للدالة متسلسلة تايلور في $x - c$ بنصف قطر تقارب $r > 0$، فهل هذه المتسلسلة تمثل الدالة لجميع قيم x في الفترة $(c-r, c+r)$؟ لمعظم الدوال البسيطة الإجابة نعم. ولكن هناك دوال الإجابة لا. كما يتضح من المثال التالي.

مثال (١)

لتكن f دالة معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة f، واثبت أنها متقاربة لجميع قيم x ولكنها تمثل الدالة فقط عند $x=0$.

الحل

لإيجاد المشتقة نستخدم تعريف المشتقة

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{-1/x^2}}$$

استخدام قاعدة لوبيتال، ينتج أن $f'(0)=0$. بالطريقة نفسها، أي باستخدام تعريف المشتقة وقاعدة لوبيتال نحصل على أن جميع المشتقات تساوي صفرا. أي $f^{(n)}(0)=0$ لكل n. وبالتالي فإن متسلسلة ماكلورين للدالة هي $0+0+0+0+\cdots+0+\cdots$ وهذه المتسلسلة متقاربة للصفر لكل x؛ ولكن، إذا كان $x\neq 0$، فإن $f(x)=e^{-1/x^2}$ و $e^{-1/x^2}\neq 0$.

النظرية التالية تعطينا الشرط الضروري والكافي لوجود متسلسلة تايلور تمثل الدالة.

(٤-٨-٤) نظرية (تايلور)

لتكن f دالة بحيث أن f ومشتقاتها من جميع الرتب موجودة على فترة مفتوحة $(c-r,c+r)$. فإن f تمثل بمتسلسلة تايلور

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

لكل x بحيث أن $|x-c|<r$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{n+1!}(x-c)^{n+1}=0$$

حيث z_x تقع بين c و x.

البرهان:

الدالة f تحقق شروط نظرية (٤-١-١) على الفترة $(c-r,c+r)$ بحيث

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x) \tag{١٢}$$

حيث $P_n(x)$ متسلسلة تايلور من الدرجة ـ n للدالة f عند c و $R_n(x)$ الباقي، كما في فصل (٤-١). لاحظ أن $P_n(x)$ هي المجموع الجزئي النوني لمتسلسلة تايلور للدالة f عند c. سنثبت

النظرية بإثبات أن $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ موجودة وتساوي $f(x)$ إذا وفقط إذا كانت $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

من (١٢)

$$P_n(x)=f(x)-R_n(x)$$

إذا كانت $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ ، ينتج من المعادلة السابقة أن

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=\lim_{n\to\infty} f(x)-\lim_{n\to\infty} R_n(x)$$
$$=f(x)-0=f(x)$$

العكس، بفرض أن $\lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x)$ سنثبت أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$. من (١٢)،

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty} f(x)-\lim_{n\to\infty} P_n(x)$$
$$=f(x)-f(x)=0$$

وهذا يثبت النظرية.■

ننوه هنا إلى أنه غالبا ما يكون من الصعب تطبيق نظرية (٤-٨-٤)، ويرجع سبب ذلك إلى أن قيم z_x اختيارية. ولكن، وفي بعض الأحيان يمكن إيجاد حد علوي للمقدار

$$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (١٣)$$

والذي يمكن إثبات أن نهايته تساوي الصفر عندما $n\to\infty$. أثبتنا في مثال (٢) فصل (٤-٢) أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل عدد حقيقي x، وبالتالي فإن نهاية الحد النوني للمتسلسلة يساوي الصفر. أي

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0 \quad \text{لكل } x \qquad (١٤)}$$

بطريقة مماثلة وبسبب أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل x، فإن

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{(x-c)^n}{n!}=0 \quad \text{لكل } x \qquad (١٥)}$$

ستكون (١٤) و (١٥) عون لنا في الأمثلة التالية.

مثال (٢)

اثبت أن

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{n!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{لكل } x}$$

الحل:

إذا كانت $f(x)=e^x$ فإن $f^{(n)}(x)=e^x$ لكل x، وبالتالي $f^{(n)}(0)=1$ لكل n. لذلك ومن (٧) فإن متسلسلة ماكلورين هي

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (١٦)$$

نثبت الآن أن هذه المتسلسلة تتقارب من e^x لكل x. أي يجب إثبات أن $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x. هناك ثلاث حالات: $x>0$ و $x<0$ و $x=0$.

إذا كان $x>0$، فإن $0<z_x<x$، وبالتالي $e^{zx}<e^x$. لذلك

$$0 < \frac{e^{z_x}}{(n+1)!} x^{n+1} < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (١٧)$$

من (١٤) ينتج أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$، وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

من (١٧) ونظرية الحصر، ينتج أن

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{z_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 .$$

إذا كان $x<0$، فإن $x<z_x<0$، وبالتالي $0<e^{zx}<1$. نتيجة لذلك

$$0 < \left|R_n(x)\right| = \left|\frac{e^{z_x}}{(n+1)!} x^{n+1}\right| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = 0$، نستنتج أن $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

أخيرا إذا كان $x=0$، فإن المتسلسلة لها المجموع 1، وهو e^0. أي أن (١٦) تتقارب من الدالة e^x لكل x. ■

مثال (٣)

اثبت أن

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{لكل } x}$$

الحل:

لتكن $f(x) = \sin x$ فإن مشتقات f تتكرر في مجموعات رباعية:

$$\begin{array}{ll} f(x) \quad = \sin x & f(0) = 0 \\ f^{(1)}(x) = \cos x & f^{(1)}(0) = 1 \\ f^{(2)}(x) = -\sin x & f^{(2)}(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(5)}(0) = 1 \\ f^{(6)}(x) = -\sin x & f^{(6)}(0) = 0 \\ f^{(7)}(x) = -\cos x & f^{(7)}(0) = -1 \\ f^{(8)}(x) = \sin x & f^{(8)}(0) = 0 \end{array}$$

وهكذا، تتضمن المشتقات الزوجية دالة $\sin x$ بينما تتضمن المشتقات الفردية دالة $\cos x$. بالتحديد لكل عدد صحيح غير سالب k،

$$f^{2k+1}(x) = (-1)^k \cos x \quad \text{و} \quad f^{2k}(x) = (-1)^k \sin x \qquad (١٨)$$

وبالتالي

$$f^{2k+1}(0) = (-1)^k \quad \text{و} \quad f^{2k}(0) = 0$$

وبما أن $f^{2k}(0) = 0$ ، فإن جميع معاملات قوى x الزوجية في متسلسلة ماكلورين للدالة $\sin x$ تساوي صفرا. لذلك نحذف القوى الزوجية ونكتب متسلسلة تايلور للدالة $\sin x$ كما يلي:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ولإثبات أن متسلسلة ماكلورين تتقارب من $\sin x$ لكل x، نثبت أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ لكل x.

من (١٨) نستنتج أن $\left| f^{2n+1}(z_x) \right| \le 1$، بغض النظر عن العدد الصحيح n أو الأعداد x و z_x ، لذلك ومن (١٣)،

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (١٩)$$

من (١٤) ينتج أن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x. من نظرية (٤-٨-٤) فإن متسلسلة ماكلورين لدالة sin تتقارب من $\sin x$ لكل x.

بنفس أسلوب مثال (٣) أو باستخدام نظرية الاشتقاق لمتسلسلات القوى، يمكن إثبات أن

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}$$

لكل x (٢٠)

مثال (٤)

أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\sin x$ عند $\pi/6$. ثم اثبت أنها تتقارب من $\sin x$ لكل x.

الحل:

لتكن $f(x)=\sin x$. هنا نرغب كتابة $f(x)$ كما في نظرية (٤-٢-٢)، حيث $c=\pi/6$. مشتقات f هي:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sin x & f(\pi/6)&=\tfrac{1}{2}\\
f^{(1)}(x)&=\cos x & f^{(1)}(\pi/6)&=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\
f^{(2)}(x)&=-\sin x & f^{(2)}(\pi/6)&=\tfrac{-1}{2}\\
f^{(3)}(x)&=-\cos x & f^{(3)}(\pi/6)&=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\
f^{(4)}(x)&=\sin x & f^{(4)}(\pi/6)&=\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

هذا النمط يتكرر رباعيا وبشكل غير منته. وبالتالي فإن متسلسلة تايلور لدالة $sin x$ هي:

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/6)-\frac{1}{2(2!)}(x-\pi/6)^2-\frac{\sqrt{3}}{2(3!)}(x-\pi/6)^3$$

الحد النوني u_n لهذه المتسلسلة هو:

$$u_n=\begin{cases}(-1)^{n/2}\dfrac{1}{2(n)!}(x-\pi/6)^n & ; n=0,2,4,6,\ldots\\[2ex] (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{\sqrt{3}}{2(n)!}(x-\pi/6)^n & ; n=1,3,5,7,\ldots\end{cases}$$

لإثبات أن هذه المتسلسلة تتقارب من $\sin x$ لكل x، نثبت أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

بما أن $f^{(4)}(x)=f(x)$، نستنتج أن

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!}(x-\pi/6)^{n+1}\right|\le\frac{|x-\pi/6|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (٢١)$$

من (١٥) ينتج أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-\pi/6|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x. من نظرية (٤-٨-٤) فإن متسلسلة تايلور لدالة $\sin$ تتقارب من $\sin x$ لكل x.

من نظرية (٤-٨-١) فإن الدالة f لها متسلسلة ماكلورين

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{٢٢}$$

شريطة أن تكون مشتقاتها موجودة عند 0 وبالتالي معرفة على فترة مفتوحة تحتوي 0. بما أن $\ln x$ غير معرفة على فترة مفتوحة تحتوي 0، فإن $\ln x$ لا يوجد لها متسلسلة ماكلورين على الصيغة المعطاة بالمعادلة (٢٢). في مثال (٦) فصل (٤-٦) أثبتنا أن

$$\ln(1+x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \quad \text{لكل} \quad -1<x<1 \tag{٢٣}$$

إذا كان $2>x>0$، فإن $1>x-1>-1$، لذلك ومن (23) نجد أن

$$\boxed{\ln x=\ln(1+(x-1))=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} \quad \text{لكل} \quad 0<x<2 \qquad (٢٤)}$$

وبذلك نكون قد أوجدنا متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ كقوى في $(x-1)$.

نوهنا سابقا أن تمثيل الدالة بمتسلسلة قوى وحيد. بمعنى، أنه إذا كان لدالتين نفس القيم على فترة تحتوي c، وإذا كانت الدالتان تمثلان بمتسلسلتي قوى في $(x-c)$، فإن المتسلسلتين متساويتان لأن المعاملات في المتسلسلتين يتم الحصول عليها من قيم الدالتين ومن مشتقاهما عند c. وبالتالي، وكما ذكرنا سابقا، إذا كان أمكن تمثيل الدالة بمتسلسلة قوى في $(x-c)$، فإن المتسلسلة هي متسلسلة تايلور. لذلك فإنه ليس ضروريا إيجاد متسلسلة تايلور لدالة معطاة باستخدام الصيغة (١١). أي طريقة تؤدي للحصول على متسلسلة قوى في $(x-c)$ تمثل الدالة المعطاة ،فإنها متسلسلة تايلور لهذه الدالة عند c.

مثال (٥)

أوجد متسلسلة تايلور للدالة e^x عند c.

الحل:

نكتب e^x على الصيغة $e^x=e^c e^{x-c}$، وبالتالي

$$e^x = e^c\left[1+(x-c)+\frac{(x-c)^2}{n!}+\cdots+\frac{(x-c)^n}{n!}+\cdots\right]=e^c\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-c)^n}{n!}\right]$$

إثبات أن هذه المتسلسلة تتقارب من e^x لكل x مماثل للإثبات في مثال (٢) أعلاه.

مثال (٦)

أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ عند c ($c>0$).

الحل:

نكتب

$$\ln x=\ln[c+(x-c)]=\ln c+\ln\left(1+\frac{x-c}{c}\right)$$

في مثال (٦) فصل (٤-٦) أثبتنا أن : $\ln(1+x)=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ لكل $-1<x<1$

ومنه : $\ln\left(1+\frac{x-c}{c}\right)=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)c^{n+1}}(x-c)^{n+1}$

وبالتالي : $\ln x=\ln c+\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)c^{n+1}}(x-c)^{n+1}$

وهذه المتسلسلة تمثل $\ln x$ لكل $0<x\le 2c$.

في الجدول التالي نعرض بعضا من متسلسلات ماكلورين والتي أوجدنا بعضا منها في هذا الفصل والفصل السابق. تكمن أهمية هذه المتسلسلات في استخدامها في الرياضيات والتطبيقات.

متسلسلة ماكلورين	فترة التقارب
(a) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$(-\infty,\infty)$
(b) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$(-\infty,\infty)$
(d) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$	$(-\infty,\infty)$
(e) $\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$	$(-1,1]$
(f) $\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_0^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$[-1,1]$
(g) $\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_0^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty,\infty)$

يمكن استخدام متسلسلات تايلور وماكلورين لإيجاد قيم تقريبية للدوال والتكاملات المحدودة كما يتضح في الأمثلة التالية.

مثال (٧)

استخدم متسلسلة تايلور في مثال (٤)، لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sin 7\pi/36$ بخطأ أقل من 0.000003.

الحل:

من (٢٠) نحصل على

$$\left|R_n(7\pi/36)\right| \le \frac{\left|7\pi/36-\pi/6\right|^{n+1}}{(n+1)!} < 0.000003$$

لكل $n \ge 3$. وبالتالي فإن الحدود الأربعة الأولى التي حصلنا عليها في مثال (٤) تعطينا التقريب المطلوب

$$\sin 7\pi/36 \approx \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\pi/36)-\frac{1}{2(2!)}(\pi/36)^2-\frac{\sqrt{3}}{2(3!)}(\pi/36)^3=0.573575 .$$

إذا استخدمنا متسلسلة ماكلورين لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sin 7\pi/36$، فإننا سنحتاج إلى عدد أكثر من الحدود للحصول على نفس الدقة التي حصلنا عليها في المثال السابق. بشكل عام، للحصول على أفضل تقريب للدالة $f(x)$، علينا النظر إلى متسلسلة تايلور عند نقطة c بالقرب من x.

مثال (٨)

احسب التكامل لخمسة منازل عشرية

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

الحل:

لا يمكن إيجاد دالة أصلية لهذا التكامل بدلالة دوال أولية. لكن، ومن متسلسلة تايلور لدالة $\sin x$ فإن

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots\right]$$

$$=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots$$

وهذا صحيح لكل $x \ne 0$. بالتكامل حدا ــ حدا نحصل على

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{1/2}^{1}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots\right]dx$$

$$= x-\frac{x^3}{3(3!)}+\frac{x^5}{5(5!)}-\frac{x^7}{7(7!)}+\frac{x^9}{9(9!)}-\cdots\Big]_{1/2}^{1}$$

$$\approx \left(1-0.0555555+0.0016667-0.0000283+0.0000003-\cdots\right)$$

$$-\left(0.5-0.0069444+0.000021-0.0000002+\cdots\right)$$

في كل قوس أعلاه متسلسلة متناوبة بحيث $|u_{n+1}|<|u_n|$. باستخدام الحدود الأربعة الأولى في القوس الأول نحصل عل قيمة تقريبية بنسبة خطأ أقل من 0.0000003. في القوس الثاني نستخدم الحدود الثلاثة الأولى نحصل على قيمة تقريبية بخطأ أقل من 0.0000002. بالقيام بالحسابات اللازمة والتقريب لخمسة منازل عشرية نحصل على

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 0.45298\ .$$

(٤-٩) تمارين

(١) اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ تمثل الدالة $\cos x$ لجميع قيم x.

(٢) اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ تمثل الدالة $\sinh x$ لجميع قيم x.

(٣) اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ تمثل الدالة $\cosh x$ لجميع قيم x.

(٤) باستخدام متسلسلة ماكلورين للدالة e^x. أوجد متسلسلة تايلور للدالة e^x عند $c=3$.

(٥) باستخدام متسلسلة ماكلورين للدالة $\ln(1+x)$. أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\ln(x)$ عند $c=2$.

(٦) إذا علمت أن $\ln 2 = 0.6931$، مستخدما المتسلسلة التي حصلت عليها في تمرين (٥)، أوجد $\ln 3$ صحيحا لأربع منازل عشرية.

في التمارين من ٧-١٨ استخدم متسلسلات ماكلورين التي حصلنا عليها في هذا الفصل للحصول على متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)$.

(٧) $f(x) = x\sin 5x$

(٨) $f(x) = x^2 \sin x$

(٩) $f(x) = \cos(-2x)$

(١٠) $f(x) = \sin^2 x$

(١١) $f(x) = \cos x^2$

(١٢) $f(x) = \cos^2 x$

(١٣) $f(x)=\ln(3x)$ (١٤) $f(x)=\ln(1-2x)$

(١٥) $f(x)=\ln(1+x^2)$ (١٦) $\ln\frac{1+x}{1-x}$

(١٧) $f(x)=e^{-3x}$ (١٨) $f(x)=x\ln(1+x^2)$

في التمارين من ١٩-٢٢ أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)$. (لا تثبت أن $\lim_{n\to\infty}(R_n(x)=0$).

(١٩) $f(x)=2^x$ (٢٠) $f(x)=10^x$

(٢١) $f(x)=\ln(3+x)$ (٢٢) $f(x)=\frac{1}{x+2}$

في التمارين من ٢٣-٣٢ أوجد متسلسلة تايلور عند c. (لا تثبت أن $\lim_{n\to\infty}(R_n(x)=0$).

(٢٣) $f(x)=\frac{1}{x}$ ؛ $c=-1$ (٢٤) $f(x)=\ln x$ ؛ $c=2$

(٢٥) $f(x)=\frac{1}{x}$ ؛ $c=3$ (٢٦) $f(x)=\sin x$ ؛ $c=\pi/4$

(٢٧) $f(x)=\cos x$ ؛ $c=\pi/3$ (٢٨) $f(x)=\sin x$ ؛ $c=3\pi/4$

(٢٩) $f(x)=e^x$ ؛ $c=-3$ (٣٠) $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $c=1$

(٣١) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ؛ $c=0$ (٣٢) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ؛ $c=1$

(٣٣) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & ;\ x\neq 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$ ؛ $c=0$

(٣٤) $f(x)=\begin{cases}\frac{(\sin x)-x}{x^3} & ;\ x\neq 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$ ؛ $c=0$

في التمارين من ٣٥-٤٢ اكتب الحدود الثلاثة الأولى لمتسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ عند c.

(٣٥) $f(x)=\tan x$ ؛ $c=\pi/4$ (٣٦) $f(x)=\sin^{-1}x$ ؛ $c=\frac{1}{2}$

(٣٧) $f(x)=\sec x$ ؛ $c=\pi/3$ (٣٨) $f(x)=\tan^{-1}x$ ؛ $c=1$

(٣٩) $f(x)=xe^x$ ؛ $c=-1$ (٤٠) $f(x)=e^x\cos x$ ؛ $c=0$

(٤١) $f(x)=\sec x$ ؛ $c=\pi/3$ (٤٢) $f(x)=\csc x$ ؛ $c=2\pi/3$

في التمارين ٤٣-٥٢ استخدم أول حدين غير صفرين لمتسلسلة ماكلورين لتقريب العدد، وقدر قيمة الخطأ في التقريب.

(٤٣) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (٤٤) $\int_0^{0.5}\cos x^2dx$ (٤٥) $\ln 1.5$ (٤٦) $\sin 1^\circ$ (٤٧) $\cos 3^\circ$

(٤٨) $\tan^{-1}0.1$ (٤٩) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ (٥٠) $\frac{1}{e}$

(٥١) $\int_0^{0.5}x\cos x^3dx$ (٥٢) $\int_0^{0.1}\tan^{-1}x^2dx$

في التمارين من ٥٣- احسب التكامل لثلاث منازل عشرية.

(٥٣) $\int_0^{0.5}\sin x^2dx$ (٥٤) $\int_0^1\sqrt{x}e^{-x^2}dx$ (٥٥) $\int_0^1\cos\sqrt{x}dx$

(٥٦) $\int_0^{0.1}\ln(1+\sin x)dx$

في التمارين من ٥٧-٥٩ احسب التكامل لأربعة منازل عشرية (بفرض أن الدالة المكاملة $f(x)$، فإن $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$).

(٥٧) $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ (٥٨) $\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}dx$ (٥٩) $\int_0^{1/2}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$

(٦٠) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة

$$f(x)=\frac{-3x+2}{2x^2-3x+1}$$

(٦١) لتكن $f(x)=\tan x$. استخدم الحقيقة $f(0)=0$ و $f'(x)=1+[f(x)]^2$، أوجد مجموع الحدود الستة الأولى في متسلسلة ماكلورين للدالة f.

(٦٢) لتكن $f(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

(ا) اثبت أن $f(0)=0$ و $f'(x)=2xf(x)+1$.

(ب) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة f.

(إرشاد: لاحظ أن $f^n(x)=2(n-1)f^{(n-2)}(x)+2xf^{(n-1)}(x)$ لكل $n\geq 2$.) (٦١)

(ا) اثبت أنه إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M$ لكل x، فإن متسلسلة تايلور للدالة f حول أي نقطة معطاة c تتقارب من $f(x)$ لكل x.

(ب) لتكن $0 < \delta < 1$. بفرض أن لكل x في الفترة $(c - \delta, c + \delta)$ باستثناء c يوجد عدد حقيقي موجب M_x بحيث أن $\left|f^{(n+1)}(z_x)\right| \le \frac{M_x n!}{|x - c|^{n+1}}$ لكل z_x بين x و c ولكل $n \ge 0$. اثبت أن متسلسلة تايلور للدالة f حول c تتقارب من $f(x)$ لكل x في الفترة $(c - \delta, c + \delta)$.

(٦٣) لتكن f دالة الموضع لسيارة أي لكل $t \le 0$ فإن السيارة في حالة سكون ولكل $t > 0$ فإن السيارة في حالة حركة. اثبت أن f ليس لا يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى على أية فترة مفتوحة تحتوي 0.

(٦٤) الدالة E والمعرفة

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

تسمى دالة الخطأ،وهي ذات أهمية في الإحصاء الرياضي.أوجد متسلسلة ماكلورين لدالة الخطأ.

(٦٥) ترتبط سرعة الموجة المائية v على طول الموجة L وعمق الماء h، أي

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}$$

حيث g ثابت الجاذبية.

(ا) اثبت أن $\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3$ إذا كان $x \approx 0$.

(ب) استخدم التقريب $\tanh x \approx x$ لإثبات أن $v^2 \approx gh$ إذا كانت قيمة h/L صغيرة جدا.

(ج) استخدم فرع (ا) وكون متسلسلة ماكلورين للدالة $\tanh x$ متسلسلة متعاقبة لإثبات أن قيمة الخطأ في استخدام $v^2 \approx gh$ أقل من $0.002gL$ إذا كان $L > 20h$.

(ا) اثبت أن $\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3$ إذا كان $x \approx 0$.

(ب) استخدم التقريب $\tanh x \approx x$ لإثبات أن $v^2 \approx gh$ إذا كانت قيمة h/L صغيرة جدا.

(ج) استخدم فرع (ا) وكون متسلسلة ماكلورين للدالة $\tanh x$ متسلسلة متعاقبة لإثبات أن قيمة الخطأ في استخدام $v^2 \approx gh$ أقل من $0.002gL$ إذا كان $L > 20h$.

(٤-١٠)

● متسلسلة ذات الحدين

Binomial Theorem

ننهي هذا الباب بإيجاد متسلسلة ماكلورين للدوال $f(x) = (1 + x)^k$ ، حيث k أي عدد ثابت. تسمى هذه الدوال بدوال ذات الحدين لأنها مكونة من تركيب جبري لحدين1 و x.

سبق وأن تم دراسة نظرية ذات الحدين والتي تنص على أن لأي عدد صحيح موجب k ، فإن لكل عددين a و b،

$$(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}b^2 + \cdots$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}a^{k-n}b^n + \cdots + b^k$$

بوضع $a=1$ و $b=x$، فإن

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots + x^k$$

إذا كان k عدد غير صحيح موجب (أو 0) فإننا نحصل على متسلسلة القوى

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

وهذه متسلسلة ماكلورين للدالة $(1+x)^k$ وتسمى متسلسلة ذات الحدين. لإيجاد نصف قطر تقارب هذه المتسلسلة نستخدم اختبار النسبة

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(k-n)}{n+1}x\right| = |x|$$

بالتالي فإن المتسلسلة متقاربة إذا كان $|x|<1$.نثبت الآن أن هذه المتسلسلة تتقارب من $(1+x)^k$ لأي عدد حقيقي k ولكل x في الفترة $(-1,1)$. لن نثبت ذلك بحساب $R_n(x)$ ومن ثم إثبات أن النهاية مساوية للصفر، لأن هذا صعب جدا. وبدلا من ذلك سنستخدم الطريقة التالية. لتكن

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n$$ لكل $|x|<1$ (١)

سنثبت أن $f(x)=(1+x)^k$ ، حيث $|x|<1$. من نظرية (٤-٨-١)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$$
$$= k + k(k-1)x + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)}{(n)!}x^n + \cdots$$ (٢)

لكل $|x|<1$

بضرب طرفي (٢) في x نحصل على

$$xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n+\cdots$$

$$=kx+k(k-1)x^2+\cdots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n+\cdots \qquad (٣)$$

$$=kx+k(k-1)x^2+\cdots+\frac{nk(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

المتسلسلتان في (٢) و (٣) متقاربتان مطلقا لكل x بحيث $|x|<1$. بالتالي يمكن جمعهما حدا — حدا، نحصل على

$$(1+x)f'(x)=k\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots\right]$$

من (٢) فإن التركيب الجبري داخل القوس يساوي $f(x)$، ينتج أن

$$(1+x)f'(x)=kf(x)$$

وهذا يكافئ

$$(1+x)f'(x)-kf(x)=0$$

نعرف g كما يلي

$$g(x)=f(x)/(1+x)^k$$

بأخذ المشتقة، نحصل على

$$g'(x)=\frac{(1+x)^k f'(x)-f(x)k(1+x)^{k-1}}{(1+x)^{2k}}=\frac{(1+x)f(x)-kf(x)}{(1+x)^{k+1}}=0$$

وبالتالي $g(x)=C$، حيث C ثابت. ومنه : $\dfrac{f(x)}{(1+x)^k}=C$

بما أن $f(0)=1$، نجد أن $C=1$ وبالتالي $f(x)=(1+x)^k$، وهذا ما نرغب في إثباته. نلخص المناقشة السابقة فيما يلي

(٤–١٠–١) نظرية (متسلسلة ذات الحدين)

إذا كان k أي عدد حقيقي،فإن

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

لكل x بحيث أن $|x|<1$.

مثال (١)

أوجد متسلسلة القوى في x والتي تمثل الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

الحل

من نظرية (٤-١٠-١)، لكل x حيث $|x|<1$، فإن

$$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(\frac{-5}{2})\ldots(\frac{-1}{2}-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n n!}+x^n\ldots$$

مثال (٢)

استخدم نتيجة مثال (١) لإيجاد متسلسلة ذات الحدين للدالة $f(x)=(1-x^2)^{-1/2}$، ثم استخدمها لإيجاد متسلسلة القوى للدالة $\sin^{-1}x$.

الحل

نضع $-x^2$ بدلا من x في متسلسلة $(1+x)^{-1/2}$ ونحصل لكل x حيث $|x|<1$ على

$$(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}x^6+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+\cdots$$

نستخدم نظرية التكامل للمتسلسلات ونكامل حدا ــ حدا، نحصل على

$$\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{5}x^5+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\ldots$$

وبالتالي

$$\sin^{-1}x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

لكل x، حيث $|x|<1$.

قبل البدء بإيجاد قيمة تقريبية للأعداد، سنقوم بتقدير الخطأ $R_N(x)$ وذلك بالنظر إلى كثيرة حدود ماكلورين للدالة $(1+x)^k$ لقيم معينة للعدد k. إذا كان $|k|\le 1$ و $n\ge 1$، فإن

$$\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n\le\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}x^n$$

وبالتالي

$$|R_N(x)|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}\right||x^n|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}|k||x^n|=|k|\frac{|x|^{N+1}}{1-|x|}$$ سـ

يفيدنا هذا التقدير للباقي في إيجاد قيم تقريبية عديدة لجذور الأعداد وذلك باستخدام متسلسلة ذات الحدين.

مثال (٣)

أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{28}$ بخطأ أقل من 0.0001.

الحل

نكتب

$$\sqrt[3]{28} = \left(\sqrt[3]{1+27}\right) = \sqrt[3]{27}\left(\sqrt[3]{1+\tfrac{1}{27}}\right) = 3\sqrt[3]{1+\tfrac{1}{27}}$$

هذا يعني أننا إذا حصلنا على قيمة تقريبية لـ $\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}}$ بخطأ أقل من 0.00003، فإننا سنحصل على قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{28}$ بخطأ أقل من 0.0001. بوضع $x = \frac{1}{27}$ و $k = \frac{1}{3}$ نجد

$$\left|R_N\left(\tfrac{1}{27}\right)\right| \le \tfrac{1}{3}\,\frac{(1/27)^{n+1}}{26/27} = \frac{1}{78(27)^n}$$

أي أن $\left|R_n\left(\frac{1}{27}\right)\right| \le 0.00003$ لكل $n \ge 2$. نتيجة لذلك فإن التقريب المطلوب نحصل عليه بأخذ الحدود الثلاثة الأولى للمتسلسلة في نظرية (٤-٧-١) وذلك بوضع $x = \frac{1}{27}$:

$$\sqrt[3]{28} = 3\sqrt[3]{1+\tfrac{1}{27}} \approx 3\left[1+\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{1}{27}\right)+\left(\tfrac{1}{2!}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{-2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{27}\right)^2\right] \approx 3.03658$$

(٤-١١) تمارين

في التمارين من ١-١٤ استخدم متسلسلة ذات الحدين لإيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة وأوجد نصف قطر التقارب.

(١) $f(x)=\sqrt{1+x}$

(٢) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$

(٣) $f(x)=\sqrt{1-x^3}$

(٤) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

(٥) $f(x)=\sqrt[3]{8+x}$

(٦) $f(x)=(9+x^4)^{-1/2}$

(٧) $f(x)=(1+x)^{-2}$

(٨) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

(٩) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

(١٠) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

(١١) $f(x)=(1+x)^{-2/3}$

(١٢) $f(x)=(1+x)^{-3}$

(١٣) $f(x)=(1-x^2)^{5/2}$

(١٤) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

في التمارين من ١٥-٢٤ أوجد قيمة تقريبية للعدد بخطأ اقل من 0.001.

(١٥) $\sqrt{1.05}$

(١٦) $\sqrt{24}$

(١٧) $\sqrt{51}$

(١٨) $\sqrt[3]{9}$

(١٩) $\sqrt[6]{60}$

(٢٠) $\sqrt[4]{83}$

(٢١) $\sqrt[6]{65}$

(٢٢) $(29)^{5/2}$

(٢٣) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{128}}$

(٢٤) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{31}}$

(٢٥) أوجد متسلسلة ذات الحدين للدالة $(1+t^2)^{-1/2}$ واستخدمها لإيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة $\sinh^{-1} x$ وحدد نصف قطر تقاربها.

(٢٦) استخدم طريقة مماثلة لتمرين (٢٥) لإيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة $\tanh^{-1} x$ وحدد نصف قطر تقاربها.

(٢٧) (ا) عبر عن $\sqrt[4]{1+x}$ كمتسلسلة قوى في x.

(ب) استخدم نتيجة فرع (ا) لتعبر عن $\sqrt[4]{1+x^2}$ كمتسلسلة قوى في x.

(ج) استخدم فرع (ب) لحساب قيمة تقريبية لــ $\int_0^{1/2} \sqrt[4]{1+x^2}\,dx$ صحيحة لثلاث منازل عشرية.

(٢٨) استخدم الطريقة المشار إليها في تمرين (٢٨) لحساب قيمة تقريبية لــ $dx^{2/3}(\sqrt{x}-1)$ $\int_0^{1/4}(1-\sqrt{x})^{2/3}dx$ صحيحة لثلاث منازل عشرية.

في التمارين من ٢٩-٣٦ احسب القيمة التقريبية للتكامل المحدود صحيحة لثلاث منازل عشرية.

(٢٩) $\int_0^{1/3} \sqrt{1+x^3}\,dx$

(٣٠) $\int_0^{2/5} \sqrt[3]{1+x^4}\,dx$

(٣١) $\int_0^{1} \sqrt[3]{8+x^2}\,dx$

(٣٢) $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^3}\,dx$

(٣٣) $\int_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}}dx$

(٣٤) $\int_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}dx$

(٣٥) $\int_0^{1/3} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

(٣٦) $\int_0^{0.1} \dfrac{dx}{(1+5x^2)^4}$

المصطلحات

متسلسلة القوى

نصف قطر التقارب

فترة التقارب

كثيرتي حدود تايلور ماكلورين

باقي تايلور

متسلسلتي ماكلورين تايلور

متسلسلة ذات الحدين

النظريات

نظرية تايلور

نظرية الاشتقاق لمتسلسلات القوى

نظرية التكامل لمتسلسلات القوى

تمارين عامة

في التمارين من ١ - ١٤ أوجد فترة تقارب متسلسلة القوى.

(١) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (٢) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$ (٣) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n^2+n)}$

(٤) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^{2n}}x^{3n}$ (٥) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^2}{n^2}x^n$ (٦) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(2x-1)^n$

(٧) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^n$ (٨) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n2^2}$ (٩) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sin 2n)x^n$

١٠- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(x+10)^n$ ١١- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(-3)^n}x^n$ ١٢- $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}(x-1)^n$

١٣- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}x^n$ ١٤- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

في التمارين من ١٥ - ١٧ أوجد نصف قطر تقارب متسلسلة القوى.

١٥- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$ ١٦- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}x^n$ ١٧- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+5)}$

في التمارين من ١٨ - ٢١ أوجد (أ) نصف قطر تقارب متسلسلة القوى ونطاق الدالة f (ب) اكتب متسلسلة القوى التي تمثل الدالة f' ومن ثم أوجد نصف قطر تقاربها (جـ) أوجد نطاق f'.

(١٨) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$ (١٩) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$

(٢٠) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n)^2}$ (٢١) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n}$

في التمارين من ٢٢ - ٢٧ أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)$ وحدد نصف قطر تقاربها.

(٢٢) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$

(٢٣) $f(x)=\sqrt{1+x}$

(٢٤) $f(x)=a^x$ ؛ $a>0$

(٢٥) $f(x)=\cos x\sin x$

(٢٦) $f(x)=xe^{-2x}$

(٢٧) $f(x)=\sin^3 x$

في التمارين من ٢٨ - ٣١ أوجد متسلسلة القوى التي تمثل التكامل وأوجد نصف قطر تقاربها.

٢٨- $\int_3^x \frac{dt}{t-1}$

٢٩- $\int_0^x \frac{dt}{t^2+16}$

٣٠- $\int_0^x f(t)dt$ ؛ حيث $f(t)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos t}{t} & ; t\neq 0 \\ 0 & ; t=0 \end{cases}$

٣١- $\int_0^x f(t)dt$ ؛ حيث $f(t)=\begin{cases} \dfrac{1-\sin t}{t} & ; t\neq 0 \\ 0 & ; t=0 \end{cases}$

في التمارين من ٣٢ - ٤٢ استخدم متسلسلات القوى لإيجاد قيمة تقريبية للأعداد صحيحة لأربعة منازل عشرية.

(٣٢) $\sin 0.3$

(٣٣) $\tan^{-1}\frac{1}{5}$

(٣٤) $\sin^{-1} 1$

(٣٥) $\ln 5$

(٣٦) $\cos 3^\circ$

(٣٧) $\sqrt[4]{e}$

(٣٨) $\sqrt[3]{130}$

(٣٩) $\sqrt[4]{17}$

(٤٠) $\int_0^1 \cos x^3 dx$

(٤١) $\int_0^{1/4} \sqrt{x}\sin x\, dx$

(٤٢) $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

في التمارين من ٤٣ - ٤٦ أوجد متسلسلة تايلور للدالة عند العدد المبين.

٤٣- $f(x)=\sin 3x$ ؛ $c=-\frac{1}{3}\pi$

٤٤- $f(x)=e^{x-2}$ ؛ $c=2$

٤٥- $f(x)=\ln|x|$ ؛ $c=-1$

٤٦- $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ؛ $c=0$