الباب الثالث

المتسلسلات

SERIES

● مقـــدمـــة ● المتتابعات غير المنتهية ● المتتابعات المتقاربة ● المتسلسلات غير المنتهية ● المتسلسلات ذات الحدود الموجبة (اختبار التكامل واختبار المفارنـــة) ● اختبـــاري النسبة والجذر ● المتسلسلات المترددة والتقارب المطلق

(٣ - ١)

● مقدمة
Introduction

في هذا الباب ندرس نوعا من الدوال نطاقها (Domain) ومداها (Range) مجموعة من الأعداد الحقيقية. بداية ندرس المتتابعات (Sequences) والتي هي بالتعريف دوال نطاقها مجموعات من الأعداد الصحيحة الموجبة (Integers). نستخدم المتتابعات في دراسة المتسلسلات، التي هي مجاميع لمجموعات غير منتهية من الأعداد. نستخدم المتسلسلات في تمثيل العديد من الدوال القابلة للاشتقاق، على سبيل المثال كثيرات الحدود، الدوال الأسية، والدوال المثلثية. إن واحدة من مميزات تمثيل الدوال بالمتسلسلات هي إمكانية إيجاد قيمة تقريبية للأعداد مثل $e, \pi, \sin\frac{7\pi}{4}$.

في فصل (٣ - ٢) ندرس المتتابعات وتقاربها وتباعدها. وفي الفصول (٣ - ٣) و (٣-٥) نكمل دراستنا للمتتابعات المتقاربة والمتباعدة، ونثبت أن المتتابعات المحدودة والمطردة متقاربة. أمّا في الفصل (٣ -٧) نعرف المتسلسلة غير المنتهية. وندرس بعض خواص المتسلسلات. وفي الفصول الأربعة التالية ندرس اختبارات تقارب المتسلسلات غير المنتهية. في الفصول (٣ - ٩) و (٣ - ١١) نتعرض للمتسلسلات الموجبة، أي تلك التي حدودها موجبة (Positive term series)، ثم في فصل (٣ - ١٣) نتعرض للمتسلسلات المترددة ، أي تلك التي تتعاقب حدودها بين السالب والموجب (Alternating series)، وكذلك المتسلسلات ذات الحدود الاختيارية أي التي تتضمن حدودا موجبة وسالبة، ثم نورد موجزا لاختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات غير المنتهية.

(٣ - ٢)

●المتتابعات غير المنتهية

Infinite Sequences

ندرس في هذا الفصل المتتابعات غير المنتهية ، والتي هي دوال حقيقية نطاقها مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية .

(٣-٢-١) تعريف

نعرف المتتابعة غير المنتهية بأنها دالة نطاقها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (أو مجموعة جزئية منها) ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، أي $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

من الآن فصاعدا بقولنا متتابعة نعني متتابعة غير منتهية. فمثلا الدالتان

$$f(n) = (\frac{1}{2})^n \text{ و } n \geq 4$$

$$(h)\ n = n^2 \text{ و } n \geq 4$$

كل منهما متتابعة. وبشكل عام إذا كانت .

$$f(n) = a_n \text{ و } n \geq 1$$

فإن مجموعة الأعداد المرتبة $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ تعرف المتتابعة تعريفا تاما. وكنتيجة لذلك فإننا لن نستخدم رمز الدالة للدلالة على المتتابعة وندل على المتتابعة بصورها. فعند كتابتنا $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نقصد المتتابعة f بحيث أن $f(n) = a_n$ لكل $n \geq 1$. بالمثل ، إذا كانت $f(n) = a_n$ لكل $n \geq m$ فإننا نكتب $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ للدلالة على المتتابعة. وباستخدام هذه الكتابة نعبر عن المتتابعتين f و h كما يلي $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=4}^{\infty}$ و $\{n^2\}_{n=4}^{\infty}$ على الترتيب. حيث أن المتتابعة $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ مقرونة بالأعداد الصحيحة $1,2,3,\ldots$ فإننا نسمي a_1 الحد الأول وَ a_2 الحد الثاني و a_n الحد النوني.

مثال (١)

أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $\left\{(\frac{1}{2})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

الحل

$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{8},\ a_4 = \frac{1}{16},\ a_5 = \frac{1}{32}$.

مثال (٢)

أكتب الأربعة حدود الأولى للمتتابعة $\left\{n^2\right\}_{n=4}^{\infty}$.

الحل

$a_7 = 49, a_6 = 36, a_5 = 25, a_4 = 16$.

بعض المتتابعات تعطى بما يسمى بالصيغ الاختزالية، أي تعطى قيمة للحد الأول a_1 ، مع قاعدة نحصل منها على الحد a_{n+1} من الحد a_n الذي يسبقه مباشرة في الترتيب. يقال لمثل هذه المتتابعات أنها معرفة اختزالياً.

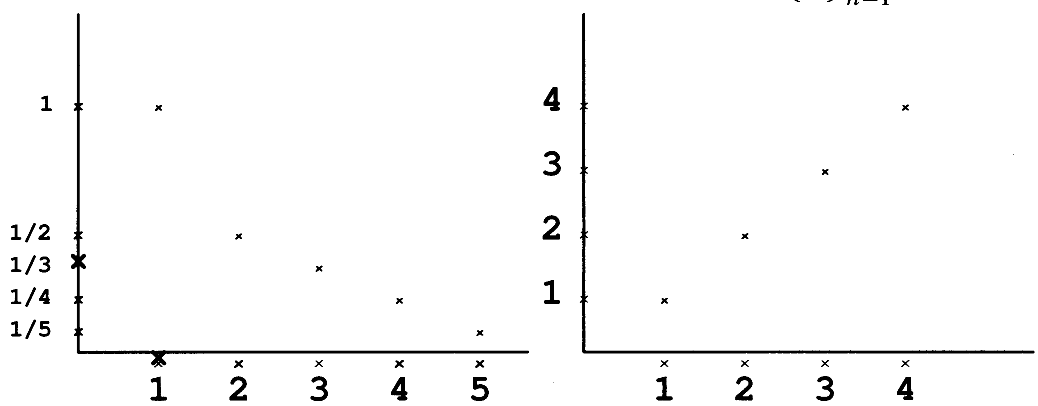
مثال (٣)

إذا كانت $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة فيها $a_1 = 1$، وَ $a_n = 3a_{n-1} - 1$ لكل $n \geq 1$. أوجد a_2, a_3, a_4.

الحل

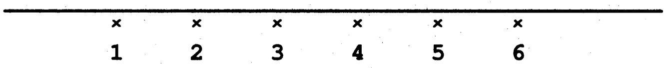
بوضع $n = 2$ في الصيغ الاختزالية $a_n = 3a_{n-1} - 1$ نحصل على $a_2 = 3a_1 - 1$ وبالتعويض بقيمة a_1 نحصل $a_2 = 2$ بالمثل $a_3 = 5$ وَ $a_4 = 9$.

المتتابعة؛ كأي دالة؛ يمكن تمثيلها بيانيا في المستوى، الشكل (١) يوضح التمثيل البياني للمتتابعتين $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$، ولكن هذا التمثيل قد لا يفيدنا كثيرا في دراستنا للمتتابعات.

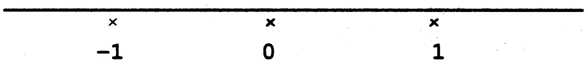


شكل (٣-١)

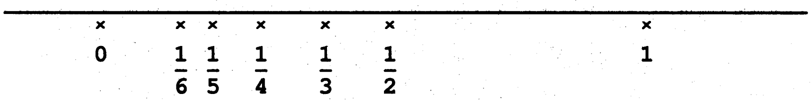
إن التمثيل الأكثر ملائمة هو أن تمثل المتتابعة على خط الأعداد الحقيقية كما في شكل (٢). هذا النوع من التمثيل يوضح لنا إلى أين "تسعى" المتتابعة. فالمتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ "تسعى" إلى مالانهاية، والمتتابعة $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ تتذبذب بين -1 وَ 1 ، بينما المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ " تقترب" من الصفر.



شكل(٣-٢أ) $\{n\}_{n=1}^{\infty}$



شكل(٣-٢ب) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$



شكل(٣-٢جـ) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(٣-٣)

●المتتابعات المتقاربة

Convergent Sequences

يلاحظ في شكل (٢أ) أنه كلما زادت قيمة n كلما زادت قيمة المتتابعة ، فإذا اقتربت n من مالانهاية فان المتتابعة تسعى إلى مالانهاية، ليكن L عدداً حقيقيا وَ J فترة مفتوحة مركزها L ونصف قطرها 1 ، بما أن المسافة بين أي عددين صحيحين تساوي 1 وقطر الفترة J أصغر من 2 فإن هذه الفترة تحتوي على حدين من حدود المتتابعة على الأكثر، أي أن الفترة J تحوي عدداً منتهيا من حدود المتتابعة. أما في شكل(٣-٢ب) فإن الفترة J ، إن احتوت على شيء من حدود المتتابعة، فإنها لا تحتوي حدود المتتابعة جميعها بل يبقى عدداً غير منتهٍ من حدود المتتابعة خارج الفترة. لننظر الآن إلى المتتابعة في شكل (٣-٢جـ) ، نرى أن قيم حدودها تنحصر بين 0 وَ 1 ، لنأخذ فترة مفتوحة J مركزها الصفر ونصف قطرها $1/2$ ، فنجد أن

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1/2,\ a_3 = 1/3 < 1/2,\ a_4 = 1/4 < 1/2, \ldots,\ a_n = 1/n < 1/2$$

أي أنه لكل $n > 2$ فإن $a_n \in J$ ، وبشكل أعم لأي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ ، نجد أن $a_n < 1/n < \varepsilon$ لكل $n > 1/\varepsilon$ ، أي أن جميع حدود المتتابعة محتواة في الفترة $(-\varepsilon, \varepsilon)$ باستثناء عدد منته من حدودها. هذا يقودنا إلى التعريف التالي:

(٣-٣-١) تعريف

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وتتقارب من العدد الحقيقي L، إذا كان لأي فترة مفتوحة مركزها L ونصف قطرها ε،حيث $\varepsilon > 0$، يوجد عدد N بحيث أن $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ لكل $n > N$. أي أن جميع حدود المتتابعة محتواة في الفترة باستثناء عدد منته من حدودها.

نعطي إيضاحا آخر للوصول إلى صيغة أخرى للتعريف السابق. نلاحظ أن العناصر المتتالية للمتتابعة في شكل(٣-٢)(جـ)، تقترب من الصفر بالرغم من أن أحدا من عناصرها لا يساوي الصفر. وحدسا نستطيع أن نجعل عناصر المتتابعة قريبة من الصفر بالقدر الذي نريد وذلك بأخذ n كبيرة كبرا كافيا. نصيغ هذا بطريقة أخرى، إن المسافة $\left|\frac{1}{n}-0\right|$ يمكن جعلها أصغر من أي عدد حقيقي موجب ε وذلك بأخذ n كبيرة كبرا كافيا، ويقال في هذه الحالة أن نهاية المتتابعة هي الصفر. وبشكل أعم، إذا وجد عدد حقيقي L ، بحيث أن المسافة $|a_n - L|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب عندما تكون n كبيرة كبرا كافيا، فإنه يقال أن نهاية المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي L. هذا يقودنا إلى التعريف التالي:

(٣-٣-٢) تعريف

يقال أن نهاية المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هو العدد الحقيقي L ، إذا وجد لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$.عدد N بحيث أن $|a_n - L| < \varepsilon$ لكل $n > N$ ، ونكتب هذا $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

إذا وجد العدد L فإنه يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة (أو أنها تتقارب من العدد L)، وإذا لم يوجد العدد L فإنه يقال أن المتتابعة متباعدة.

مثال (١)

باستخدام تعريف (٣-٣-٢)، اثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

الحل

سنثبت أنه لأي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد N بحيث لكل $n > N$ فإن $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ ، لأي $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon$$

وبالتالي فإن
$$\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$$

أي أن $\frac{1}{2n+1} < 2\varepsilon$ وهذا يؤدي إلى أن $n > \frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon}-1)$

لنأخذ N بحيث أن $N \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon}-1)$ ، ومنه لكل $n > N$ فإن $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

أي أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

مثال (٢)

اثبت أن المتتابعة $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة.

الحل

نفرض أن المتتابعة تتقارب من L ، إذا كان $L \geq 0$ فإن $1 \geq |-1-L|$ ، وإذا كان $0 \leq L$ فإن $1 \geq |1-L|$ ، ومنه لأي $1 \leq \varepsilon > 0$ لا يوجد L بحيث $\varepsilon > |a_n - L|$ لكل $n > N$ ، أي المتتابعة متباعدة.

كما هي الحال في الدوال، إذا كانت نهاية المتتابعة موجودة فإنها وحيدة،ونثبت هذا في النظرية:

(٣-٣-٣) نظرية

إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، فإن نهايتها وحيدة.

البرهان

نفرض أن $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ ، حيث $L_1 \neq L_2$ كما نفرض أن ، $|L_1 - L_2| = r$ لتكن J_2, J_1 فترتين مفتوحتين مركزهما L_2, L_1 ونصف قطريهما $\frac{r}{2}$ على الترتيب، فإن $J_1 \cap J_2 = \phi$. من الفرض يوجد N_1 و N_2 بحيث أن $a_n \in J_1$ لكل $n > N_1$ و $a_n \in J_2$ لكل $n > N_2$. لنأخذ $N = Max\{N_1, N_2\}$ فإن $a_n \in J_1$ لكل $n > N$ و $a_n \in J_2$ لكل $n > N$. بالتالي فإن $a_n \in J_1 \cap J_2$ لكل $n > N$، وهذا يتناقض مع كون $J_1 \cap J_2 = \phi$. أي $L_1 = L_2$. ■

سيكون من العسير علينا الرجوع للتعريف في كل مرة نود تحديد ما إذا كانت المتتابعة متقاربة، كما فعلنا في الأمثلة ١ ، ٢ ، من ناحية ثانية فإن تعريف $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ يذكرنا كثيرا بتعريف $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. النظرية التالية والتي توضح لنا تماما العلاقة بين النهايتين، ستساعد في دراسة تقارب المتتابعات.

(٣-٣-٤) نظرية

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة، وليكن L عددا حقيقيا و f دالة معرفة على الفترة $[1,\infty)$،حيث $f(n) = a_n$ لكل $n \geq 1$.

(**i**) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ فإن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty} f(n)=L$.

(**ii**) إذا كانـــت $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (أو $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$) فـــإن المتتابعـــة متباعـــدة و $\lim_{n\to\infty} f(n)=\infty$ (أو $\lim_{n\to\infty} f(n)=-\infty$).

أي $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(n)$.

البرهان

نفرض أن $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ، و $\varepsilon>0$. عندئذ يوجد عدد N بحيث أن

$$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \text{لكل} \quad x>N$$

وهذا يقتضي أن

$$|a_n-L|=|f(n)-L|<\varepsilon \quad \text{لكل} \quad n>N$$

ومن تعريف (٣-٣-٢) $\lim_{n\to\infty} a_n=L$.

إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ، فإنه لأي عدد M يوجد عدد N بحيث أن

$$f(x)>M \quad \text{لكل} \quad x>N$$

ومنه نجد أن

$$a_n>M \quad \text{لكل} \quad n>N$$

ومن تعريف (٣-٣-٢)، $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$. بالمثل إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ فإن $\lim_{n\to\infty} f(n)=-\infty$.■

الأمثلة التالية توضح استخدامات هذه النظرية.

مثال (٣)

اثبت أن $\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$.

الحل

ضع $f(x)=x^2$ لكل $x\geq 1$ ، بالتالي فإن $f(n)=n^2$ لكل $n\geq 1$. وبمـــا أن $\lim_{x\to\infty} x^2=\infty$ ، فمن نظرية (٣-٣-٤) نجد أن $\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$.

مثال (٤)

حدد ما إذا كانت المتتابعة $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة أم متباعدة.

الحل

ضع $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ لكل $x\geq 1$، بالتالي فإن $f(n)=n\sin\frac{\pi}{n}$ لكل $n\geq 1$. وبما أن

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to\infty}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\pi\ .$$

أي أن المتتابعة متقاربة.

مثال (٥)

اثبت أن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

الحل

ضع $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ لكل $x\geq 1$، (١)

ومنه فإن $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ لكل $n\geq 1$. بأخذ لوغاريتم الطرفين للعلاقة (١) نحصل على

$$\ln f(x)=x\ln\ (1+\tfrac{1}{x})$$

ومنه فإن

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\ (1+\tfrac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ (1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ (1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\ (-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

وبالتالي فإن $\lim_{x\to\infty} f(x)=e$ ، ومنه نجد أن

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ .$$

مثال (٦)

احسب $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

الحل

ضع $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ لكل $x\geq 1$،ومنه فإن $f(n)=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ لكل $n\geq 1$. لإيجاد النهاية نضرب بالمرافق كما يلي

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=0$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0 .$$

مثال (٧)

حدد ما إذا كانت المتتابعة $\left(\frac{5n}{e^{2n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ متقاربة أم متباعدة.

الحل

ضع $f(x)=\frac{5x}{e^{2x}}$ لكل $x\geq 1$، ومنه فإن $f(n)=\frac{5n}{e^{2n}}$ لكل $n\geq 1$. بما أن $f(x)$ تأخذ الصيغة غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$ نستخدم قاعدة لوبيتال في حساب النهاية لنحصل على

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2e^{2x}}=0$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{e^{2n}}=0$$

أي أن المتتابعة متقاربة.

استخدمنا النظرية (٣-٣-٤) في إيجاد نهاية بعض المتتابعات؛ كما رأينا في الأمثلة السابقة؛ ولكن يبقى العديد من المتتابعات والتي لا نستطيع استخدام نظرية (٣-٣-٤) لإيجاد نهاياتها. نذكر على سبيل المثال المتتابعة $\left\{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ وكذلك المتتابعة $\left\{\frac{\sin n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$،ففي الأولى يلزم تعريف دالة أسية وهي غير معرفة لأساس سالب، وفي الثانية يلزم تعريف دالة لمضروب n وهذا غير ممكن أيضا. النظرية التالية تساعد في إيجاد نهاية بعض المتتابعات.

(٣-٣-٥) نظرية

إذا كان r عددا حقيقيا، فإن المتتابعة $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لكل r حيث أن $|r|<1$ و $r=1$ أي أن

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 1 & ; r=1 \\ 0 & ; |r|<1 \end{cases}$$

ومتباعدة لكل r حيث أن $|r|>1$ و $r=-1$ كما أن

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \infty$$

البرهان

نأخذ أولا قيم r غير السالبة، ونضع $f(x)=r^x$ لكل $x\geq 1$، بحيث أن $f(n)=r^n$ لكل $n\geq 1$. من خواص الدالة الأسية فإن

$$\lim_{x\to\infty} r^x = \begin{cases} 0 & ; 0\leq r<1 \\ 1 & ; r=1 \\ \infty & ; r>1 \end{cases}$$

من نظرية (٣-٣-٤) هذا يقتضي أن

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & ; 0\leq r<1 \\ 1 & ; r=1 \\ \infty & ; r>1 \end{cases} \qquad (٢)$$

ومنه فإن المتتابعة $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لكل $0\leq r\leq 1$ ومتباعدة لكل $r>1$.

نأخذ الآن قيم r السالبة. إذا كان $r=-1$ فإن المتتابعة $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ تصبح $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ من مثال (٣) المتتابعة متباعدة. إذا كان $r\neq -1$، وحيث أن $|r^n|=|r|^n$ فإنه من (٢) نستنتج أن

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = \begin{cases} 0 & ; -1<r<0 \\ \infty & ; r<-1 \end{cases}$$

وهذا يقتضي أن المتتابعة $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لكل $-1<r<0$ ومتباعدة لكل $r<-1$. ■

المتتابعة $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ تسمى المتتابعة الهندسية ، ويعود ذلك لكون r^n هو الوسط الهندسي للعددين r^{n-1} و r^{n+1}.

مثال (٨)

حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة وأيها متباعدة

(i) $\{(1.05)^{n+1}\}$ (ii) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

الحل

(i) بما أن $1 > \frac{1}{2} = |r|$، فمن نظرية (٣-٣-٥) نستنتج أن المتتابعة متقاربة.

(ii) بما أن $|r| = 1.05 > 1$، فمن نظرية (٣-٣-٥) نستنتج كذلك أن المتتابعة متباعدة.

(٣-٤) تمـــــارين

في التمارين (١-٦) اكتب الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتابعات التالية:

١- $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

٢- $\left\{\left(\frac{1}{3^n}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$

٣- $\left\{1+(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

٤- $\sqrt{3}$

٥- -7

٦- $\left\{n-\frac{1}{n}\right\}_{n=5}^{\infty}$

في التمارين (٧-١٦) استخدم تعريف (٣-٣-١) للتحقق من النهايات التالية:

٧- $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3$

٨- $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$

٩- $\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+1}{k}=\infty$

١٠- $\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+3}=4$

١١- $\lim_{n\to\infty}\frac{5-n}{2+3n}=-\frac{1}{3}$

١٢- $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{5n^2+1}=\frac{2}{5}$

١٣- $\lim_{n\to\infty}(-2n^3)=\infty$

١٤- $\lim_{n\to\infty}e^n=\infty$

١٥- $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n-1}=0$

١٦- $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3n+1}=0$

في التمارين (١٧-٣٦)، احسب قيمة النهايات التالية .

١٧- $\lim_{n\to\infty}(\pi+\frac{1}{n})$

١٨- $\lim_{n\to\infty}(\pi-n)$

١٩- $\lim_{j\to\infty}(0.8)^j$

٢٠- $\lim_{j\to\infty}\frac{3^j}{2^j}$

٢١- $\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2-2}$

٢٢- $\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k^2}$

٢٣- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$

٢٤- $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}$

٢٥- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$

٢٦- $r>0\,;\ \lim_{n\to\infty}r^{\frac{1}{n}}$

٢٧- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1.0001)^n}{1000}$

٢٨- $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sinh k}{\sin k}$

٢٩- $\lim\limits_{k\to\infty} (1+k)^{1/2k}$

٣٠- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1/n}^{1/n} e^x dx$

٣١- $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{2k}$

٣٢- $\lim\limits_{k\to\infty} \arctan k$

٣٣- $\lim\limits_{k\to\infty} \arcsin \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos \dfrac{1}{k}\right)$

٣٤- $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{1}{n}$

٣٥- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{2-(\frac{1}{n})} \dfrac{1}{x} dx$

٣٦- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\ln(n+1)}$

في التمارين (٣٧-٤٦)، حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة وأيها متباعدة وأوجد نهاية المتقاربة منها.

٣٧- $\{-4n\}_{n=2}^{\infty}$

٣٨- $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$

٣٩- $\left\{\dfrac{1}{n} - n\right\}_{n=3}^{\infty}$

٤٠- $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

٤١- $\left\{7\left(-\dfrac{6}{7}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

٤٢- $\left\{\dfrac{100n}{n^{\frac{3}{2}} + 4}\right\}_{n=1}^{\infty}$

٤٣- $\left\{\dfrac{n+1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=2}^{\infty}$

٤٤- $\left\{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

٤٥- $\{1+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

٤٦- إذا كان

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

فاثبت أن a_n هو مجموع ريمان للتكامل $\int_0^1 x dx$ لكل $n \geq 1$. ثم أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

٤٧- إذا كان $a_n = \dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^3}$

فاثبت أن a_n هو مجموع ريمان للتكامل $\int_0^1 x^2 dx$ لكل $n \geq 1$. ثم أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

٥٨- اثبت أن كلاً من المتتابعتين

$$\left\{\frac{n^2}{n+4}\right\}، \left\{\frac{n^2}{n-3}\right\}$$

متباعدة، بينما المتتابعة $\left\{\frac{n^2}{n-3}-\frac{n^2}{n+4}\right\}$ متقاربة.

٥٩- إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n}$. فاثبت أن $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجودة كما أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$

٥٠- تعيش مجموعة من الطيور عددها 35000 طائر في ثلاث جزر C,B,A. في كل سنة يهاجر 10% من المجموعة في الجزيرة A إلى الجزيرة B و 20 % من المجموعة في الجزيرة B إلى الجزيرة C و 5% من المجموعة في الجزيرة C إلى الجزيرة A . إذا كان A_n ، B_n و, C_n عدد الطيور في السنة n على الجزر الثلاث A ، B و C على الترتيب قبل بداية الهجرة. اثبت أن

$$A_{n+1} = 0.9A_n + 0.05C_n ،$$
$$B_{n+1} = 0.1A_n + 0.80B_n ،$$
$$C_{n+1} = 0.95C_n + 0.20B_n$$

(٣-٥)

خواص التقارب للمتتابعات

Convergence Properties Of Sequences

نتابع في هذا الفصل دراستنا لتقارب وتباعد المتتابعات. بما أن المتتابعات دوال، فبالإمكان جمع وطرح وضرب وقسمة المتتابعات تماما كما فعلنا في حالة الدوال. إن قواعد النهايات للمتتابعات شبيهة بقواعد النهايات للدوال. نقدم هذا فيما يلي.

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعتين متقاربتين.عندئذ فإن مجموع المتتابعتين $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$، وحاصل ضرب المتتابعة بعدد ثابت c $\{c\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$، وحاصل ضرب المتتابعتين $\{a_n\, b_n\}_{n=1}^{\infty}$،وخارج قسمة المتتابعتين $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$(شريطة أن $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$) جميعها متتابعات متقاربة، كما تنص على ذلك النظرية التالية :

(٣-٥-١) نظرية

(ا) المتتابعة الثابتة $\{c\}_{n=1}^{\infty}$، لها النهاية c .

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(جـ) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(د) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(هـ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ ، شريطة أن $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ و $b_n \neq 0$ لكل n.

نظرا للتشابه التام بين برهان هذه النظرية وبرهان النظرية الخاصة بالدوال، سيترك البرهان كتمرين.

مثال (١)

احسب نهاية المتتابعة $\left\{\dfrac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

الحل

لإيجاد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ، حيث $a_n = \dfrac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}$، نقسم بسط ومقام a_n على n^2 ونستخدم نظرية (٣-٥-١) لنحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+7}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{5+\frac{4}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}$$
$$=\frac{3-0-0}{5+0}=\frac{3}{5}$$

مثال (٢)

استخدم نظرية (٣-٥-١) لإثبات أن المتتابعة $\left\{(1+\frac{1}{n})^n n\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

الحل

المتتابعة $\left\{(1+\frac{1}{n})^n n\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي حاصل ضرب المتتابعتين $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{n\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. في مثال (٥) فصل (٣-٣) أثبتنا أن المتتابعة $\left\{n\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وأن

$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n}=\pi$، وفي مثال (٦) من نفس الفصل أثبتنا أن المتتابعة $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة

وأن $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. لذلك، ومن نظرية (٣-٥-١) (د) فإن

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n.n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n.\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=e.\pi$$

ومنه فإن المتتابعة $\left\{(1+\frac{1}{n})^n n\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، ونهايتها $e\pi$.

النظرية التالية؛ والتي يمكن البرهان عليها بتطبيق تعريف (٣-٣-٢)؛ تربط بين نهاية المتتابعة ونهاية مقياس المتتابعة.

(٣-٥-٢) نظرية

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة. إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

مثال (٣)

إذا كان $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ ، فاثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

الحل

بما أن.

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

فمن نظرية (٣-٥-٢)، يقتضي أن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

يجدر التنويه هنا على أن نظرية (٣-٥-٢) صحيحة فقط في حالة كون $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ ، ولكن إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$ ، فإن النظرية قد لا تكون صحيحة. فمثلا نهاية المتتابعة $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ غير موجودة، كما بينا ذلك في مثال (٣) من فصل (٣-٣)، بينما $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$.

بالرغم من النظريات التي عرضناها لدراسة تقارب أو تباعد المتتابعات، إلاّ أنه لا يزال هناك بعض المتتابعات التي لا يمكن دراسة تقاربها أو تباعدها باستخدام تلك النظريات، مثال ذلك المتتابعة $\left\{\dfrac{\sin n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$. النظرية التالية؛ التي تسمى نظرية الحصر؛ تساعد في دراسة مثل هذه المتتابعات.

(٣-٥-٣) نظرية (نظرية الحصر)

إذا كانت $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ متتابعات وكانت $b_n \le c_n \le a_n$ لكل n وإذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

البرهان

بما أن $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L$ ، فإنه لأي $\varepsilon > 0$ يوجد N_1 و N_2 بحيث أن $|a_n - L| < \varepsilon$ و $|b_n - L| < \varepsilon$ لكل $n > N_1$ و $n > N_2$ على الترتيب. ليكن $N = max\{N_1, N_2\}$ ، ومنه لكل $n > N$

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ و } |b_n - L| < \varepsilon$$

من المتراجحة الأولى نحصل على $a_n < \varepsilon + L$ ومن المتراجحة الثانية نحصل على $-\varepsilon + L < b_n$ ، ومن الفرض $b_n \le c_n \le a_n$. أي أن

$$-\varepsilon + L < b_n \le c_n \le a_n < \varepsilon + L$$

أي أن

$$-\varepsilon + L < c_n < \varepsilon + L$$

وهذا يقتضي أن

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L \quad \blacksquare$$

مثال (٥)

اثبت أن المتتابعة $\left\{\frac{\sin n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل

نعلم أن

$$0 \le |\sin n| \le 1$$

وحيث أن مضروب n أكبر من الصفر، فإن بالقسمة على $n!$ نجد أن

$$0 \le \left|\frac{\sin n}{n!}\right| \le \frac{1}{n!}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$. فإنه من نظرية (٣-٥-٣) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin n}{n!}\right| = 0$ ، ومن نظرية (٣-٥-٢) نجد أن $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n!} = 0$. أي أن المتتابعة متقاربة ونهايتها ٠ .

مثال (٥)

اثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 2 - \cos^2 n}{5^n} = 0$$

الحل

$$0 \le \left|\frac{(-1)^n 2 - \cos^2 n}{5^n}\right| \le \left|\frac{(-1)^n 2}{5^n}\right| + \left|\frac{\cos^2 n}{5^n}\right| = \left|\frac{2}{5^n}\right| + \left|\frac{\cos^2 n}{5^n}\right|$$

ولكن $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2}{5^n}\right| = 0$. بما أن

$$0 \le \cos^2 n \le 1$$

فبالقسمة على 5^n نحصل على

$$0 \le \frac{\cos^2 n}{5^n} \le \frac{1}{5^n}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ ، فمن نظرية (٣-٥-٣) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{5^n} = 0$.

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{2}{5^n}\right| + \left|\frac{\cos^2 n}{5^n}\right|\right) = 0$$

وعليه فمن نظرية (٣-٥-٣) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n 2 - \cos^2 n}{5^n}\right| = 0$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 2 - \cos^2 n}{5^n} = 0$

المتتابعات المحدودة والمضطردة

بعض المتتابعات تعطى تسميات معينة، فيما يلي نتعرض لنوع من المتتابعات وندرس تقاربها أو تباعدها.

(٣-٥-٤) تعريف

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة (Bounded) ، إذا وجد عدد حقيقي M موجب بحيث أن $|a_n| \le M$ لكل $n \ge 1$، وفيما سوى ذلك، يقال أن المتتابعة غير محدودة (Unbounded).

مثال (٦)

اثبت أن المتتابعتين (i) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ii) $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ محدودتان.

الحل

(i) بما أن $n<n+1$ لكل $n\geq 1$ ، فإن $\left|\dfrac{n}{n+1}\right|=\dfrac{n}{n+1}<1$. وحينئذ $\left|\dfrac{n}{n+1}\right|<M$ لأي عدد حقيقي موجب $M\geq 1$. أي أن المتتابعة محدودة.

(ii) $\left|(-1)^n\right|=1^n=1$، ومنه $\left|(-1)^n\right|\leq M$ لأي عدد حقيقي موجب $M\geq 1$. أي أن المتتابعة محدودة.

مثال (٧)

اثبت أن المتتابعة $\left\{n^2\right\}_{n=4}^{\infty}$ غير محدودة.

الحل

نفرض العكس، أي أن المتتابعة $\left\{n^2\right\}_{n=4}^{\infty}$ محدودة. هذا يقتضي وجود عدد حقيقي موجب M بحيث أن $\left|n^2\right|=n^2\leq M$ لكل $n\geq 4$. بما أن $M+1>M$ فإننا نستطيع أن نجد عدد صحيح موجب N بحيث أن $N>M$، ومنه $N^2>M$. وهذا يتناقض مع كون $\left|n^2\right|=n^2\leq M$ لكل $n\geq 4$. وعليه المتتابعة غير محدودة.

في النظرية التالية سنثبت أن المتتابعات المتقاربة دائما محدودة، أو بصيغة مكافئة، المتتابعات غير المحدودة متباعدة.

(٣-٥-٥) نظرية

(ا) إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متقاربة، فإنها محدودة.

(ب) إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة غير محدودة، فإنها متباعدة.

البرهان

(ا) لنفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ ، عندئذ يوجد عدد N بحيث أن

$$|a_n-L|<1 \quad \text{لكل} \quad n\geq N \quad .$$

فإذا كان $n\geq N$، فإن $|a_n|=|a_n-L+L|\leq|a_n-L|+|L|\leq 1+|L|$

ليكن $M>max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|,\ldots,|a_{N-1}|,1+L\}$

عندئذ، $M \le |a_n|$ لكل $n \ge 1$، أي أن المتتابعة محدودة.

(ب) هذا الفرع من النظرية يكافئ منطقيا فرع (ا). وهذا ينهي البرهان على النظرية.■

كتطبيق مباشر على نظرية (٣-٥-٥)، نستنتج أن المتتابعتين $\{\ln n\}$ و $\{2^n\}$ غير المحدودتين متباعدتان.

تنبيه

إن نظرية (٣-٥-٥) (أ) تنص على أن المتتابعة المتقاربة محدودة ولكن العكس غير صحيح دائما .بمعنى أنه إذا كانت المتتابعة محدودة فإنها متقاربة ، وكمثال على ذلك فإن المتتابعة $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ولكنها متباعدة، كما بينا ذلك في مثال (٣) من فصل (٣-٣).

(٣-٥-٦) تعريف

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

(i) متزايدة (Increasing) إذا كان $a_n \le a_{n+1}$ لكل $n \ge 1$.

(ii) متناقصة (Decreasing) إذا كان $a_n \ge a_{n+1}$ لكل $n \ge 1$.

ويقال أن المتتابعة مضطردة، إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

إذا كان $a_n < a_{n+1}$ (كحالة خاصة من $a_n \le a_{n+1}$) فإن المتتابعة متزايدة فعلا (Strictly increasing). إذا كان $a_n > a_{n+1}$ (كحالة خاصة من $a_n \ge a_{n+1}$) فإن المتتابعة متناقصة فعلا (Strictly decreasing).

نستعرض في الأمثلة التالية طرائق لإثبات أن المتتابعة مضطردة.

مثال (٨)

اثبت أن المتتابعة $\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}_{n=3}^{\infty}$ متزايدة.

الحل

نعرف $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ لكل $x \ge 3$، ومنه فإن $f(n)=1-\dfrac{1}{n}$ لكل $n \ge 3$. نجد المشتقة الأولى $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ، وبما أن $x^2>0$ و $x \ge 3$ ، فإن $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$. أي أن f دالة متزايدة. وهذا يقتضي أن المتتابعة متزايدة.

مثال (٩)

اثبت أن المتتابعة $\left\{1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة.

الحل

هنا لا نستطيع تعريف دالة كما فعلنا في المثال السابق.ولذلك لإثبات أن المتتابعة متناقصة نحسب إما النسبة بين a_{n+1} ، a_n أو الفرق بينهما. وفي هذا المثال فإن حساب الفرق أفضل كما يلي:

$$a_{n+1}-a_n=\left\{1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1!}\right\}-\left\{1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}=\frac{1}{n+1!}>0$$

أي أن $a_{n+1}>a_n$. ومنه فإن المتتابعة متزايدة.

مثال (١٠)

اثبت أن المتتابعة $\left\{\frac{1}{n+1!}\right\}_{n=5}^{\infty}$ متناقصة.

الحل

لإثبات أن المتتابعة متناقصة نحسب النسبة بين a_n/a_{n+1}

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+2)!}=\frac{(n+1)!}{(n+2)(n+1)!}=\frac{1}{n+2}<1$$

أي أن $a_{n+1}<a_n$. ومن ثم فإن المتتابعة متناقصة.

يجب على القارئ أن لا يأخذ انطباعا من هذه الأمثلة أن كل متتابعة تكون إما متزايدة أو متناقصة. كما هي الحال في الدوال، هناك متتابعات ليست متزايدة أو متناقصة، فمثلا المتتابعة $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متناقصة أو متزايدة.

بالرغم من أن المتتابعات المحدودة قد تكون متباعدة، إلا أن المتتابعات المحدودة والمضطردة متقاربة. برهان هذه النظرية يعتمد على خاصية للأعداد الحقيقية لم نتعرض لها من قبل في هذا الكتاب. وقبل تقديم الخاصية، نعمم خاصية المحدودية (Boundedness) التي قدمناها للمتتابعات. سنفترض أن أي مجموعة قيد الدراسة فيما تبقى من هذا الفصل تحتوي على الأقل عنصرا واحدا.

(٣-٥-٧) تعريف

لتكن A مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

(ا) يقال أن المجموعة A محدودة من أعلى (Bounded above) إذا وجد عدد حقيقي M بحيث أن $x \le M$ لكل x في A. يسمى أي عدد M حد علوي (Upper bound) للمجموعة A .

(ب) يقال أن المجموعة A محدودة من أسفل (Bounded below) إذا وجد عدد حقيقي m بحيث أن $x \ge m$ لكل x في A يسمى أي عدد m حد سفلي(Lower bound) للمجموعة A .

(جـ) يقال أن المجموعة A محدودة (Bounded) إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل.

مثال (١١)

إذا كانت $A=(0,1]$. أوجد الحدود العلوية والسفلية للمجموعة A .

الحل

لأي $M \geq 1$ ولأي $x \in A$ فإن $x \leq M$. ومنه فإن الحدود العلوية للمجموعة A هي المجموعة $[1,\infty)$.

لأي $m \leq 0$ ولأي $x \in A$ فإن $x \geq m$. ومنه فإن الحدود السفلية للمجموعة A هي المجموعة $(-\infty,0]$.

أن الفترات (a,b) $[a,b]$, $[a,b)$, أو $(a,b]$ جميعها محدودة استنادا إلى تعريف (٣-٥-٧). لكل فترة فإن b حد علوي و a حد سفلي. أي فترة على الشكل $(-\infty,a)$ أو $(-\infty,a]$ محدودة من أعلى وليست محدودة من أسفل. بالمثل، أي فترة على الشكل (a,∞) أو $[a,\infty)$ محدودة من أسفل وليست محدودة من أعلى. واستنادا إلى تعريف (٣-٥-٧) فإن الفترات $(-\infty,a)$، $(-\infty,a]$، (a,∞) أو $[a,\infty)$ ليست محدودة.

إذا كان M_1 حدا علويا للمجموعة A وإذا كان $M_2 > M_1$ ، فإن M_2 أيضا حد علوي للمجموعة A . لذلك إذا كان للمجموعة حد علوي، فإن لها عدد غير منته من الحدود العلوية. إن اهتمامنا يتركز في احتمال وجود أصغر حد علوي للمجموعة.

(٣-٥-٨) تعريف

(ا) يقال أن العدد M هو أصغر حد علوي (Least upper bound) للمجموعة A إذا كان

(١) M حدا علويا

(٢) لأي حد علوي K للمجموعة A فإن $M \leq K$. أي لا يوجد حد علوي للمجموعة A أصغر من M .

(ب) العدد m هو أكبر حد سفلي (Greatest lower bound) للمجموعة A إذا كان

(١) m حدا سفليا

(٢) لأي حد سفلي k للمجموعة A فإن $m \geq k$. أي لا يوجد حد سفلي للمجموعة A أكبر من m .

إذا كان كل من M_1 و M_2 هو أصغر حد علوي للمجموعة A ، فمن التعريف لا يمكن أن يكون أحدهما أصغر من الآخر، ويكون $M_1 = M_2$. نستنتج أن المجموعة يمكن أن يكون لها على الأكثر أصغر حد علوي واحد. بالمثل، المجموعة يمكن أن يكون لها على الأكثر أكبر حد سفلي واحد. أصغر حد علوي للفترات (a,b) $[a,b]$, $[a,b)$, أو $(a,b]$ هو b ، وأكبر حد سفلي هو a . من هذه الأمثلة نلاحظ أن أصغر حد علوي ، وأيضا أكبر حد سفلي، يمكن أن ينتمي أو لا

ينتمي للمجموعة. وبشكل مغاير فإن الفترتين (a,∞) و $[a,\infty)$ ليس لهما أصغر حد علوي، كما أن الفترتين $(-\infty,a)$ و $(-\infty,a]$ ليس لهما أكبر حد سفلي.

نذكر الآن خاصية الأعداد الحقيقية التي أشرنا إليها سابقا.

مسلمة أصغر حد علوي (Least Upper Bound Axiom)

كل مجموعة من الأعداد الحقيقية محدودة من أعلى لها أصغر حد علوي.

يمكن إثبات أن مسلمة أصغر حد علوي تكافئ أن كل مجموعة من الأعداد الحقيقية محدودة من أسفل لها أكبر حد سفلي. نثبت الآن النظرية التي أشرنا إليها سابقا.

(٣-٥-٩) نظرية

إذا كانت المتتابعة محدودة ومضطردة فإنها متقاربة.

البرهان

نفرض أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة محدودة ومتزايدة. نعرف المجموعة A بأنها المجموعة التي عناصرها حدود المتتابعة، أي أنها تتكون من العناصر $a_1,a_2,a_3,\ldots$. من مسلمة أصغر حد علوي، يوجد أصغر حد علوي L للمجموعة A . سنثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن L أصغر حد علوي للمجموعة A ، فإن $L-\varepsilon$ ليس حدا علويا للمجموعة A . لذلك يوجد عدد a_N في A بحيث أن $L-\varepsilon < a_N \le L$. وبما أن المتتابعة متزايدة فإن $a_N \le a_n$ ، ومنه

$$L-\varepsilon < a_N < a_n \le L \quad \text{لكل} \quad n \ge N.$$

وبالتالي

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad n \ge N$$

لذلك $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

بالمثل يمكن البرهان على أن المتتابعة المحدودة والمتناقصة متقاربة. ■

تنص نظرية (٣-٥-٩) على أنه إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ، فإنه يوجد عدد L بحيث أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ، ولكنها لا تنص على كيفية إيجاد L . تسمى نظرية (٣-٥-٩) بنظرية الوجود (Existence Theorem) . تعتمد العديد من المفاهيم الرياضية الهامة على نظريات الوجود. بشكل خاص، هناك العديد من المتتابعات التي لا نستطيع إيجاد نهايتها بتطبيق التعريف أو باستخدام نظريات النهايات، لكن معرفة أن النهاية موجودة يكون ذات قيمة كبيرة للعاملين في الرياضيات.

رأينا في برهان نظرية (٣-٥-٩) أن أصغر حد علوي L للمتتابعة نهاية لها. وبالتالي، إذا كان M حدا علويا للمتتابعة، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = L \le M$. لذلك، لدينا النظرية التالية:

(٣-٥-١٠) نظرية

إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ومتزايدة، وكان M حدا علويا للمتتابعة. فإن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، كما أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le M$$

عند البرهنة على نظرية (٣-٥-٩) وجدنا في الحالة التي تكون فيها المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ومتناقصة أن أكبر حد سفلي للمتتابعة هو نهاية لها، وبصورة مشابهة لنظرية (٣-٥-١٠) لدينا النظرية التالية:

(٣-٥-١١) نظرية

إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ومتناقصة، وكان K حدا سفليا للمتتابعة. فإن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، كما أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge K$$

مثال (١٢)

إذا كان $a_1 = \dfrac{3}{4}$ و $a_n = \dfrac{4n^2-1}{4n^2} a_{n-1}$ لكل $n \ge 2$. فاثبت أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ متقاربة.

الحل

سنثبت أن المتتابعة محدودة ومضطردة واستنادا إلى النظرية نستنتج أنها متقاربة. بما أن

$$a_{n+1} = \frac{4(n+1)^2-1}{4(n+1)^2} a_n$$

فإن

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(n+1)^2-1}{4(n+1)^2}$$

ولكن

$$0 < 4(n+1)^2 - 1 < 4(n+1)^2$$

وبالتالي فإن $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ أي أن $a_{n+1} < a_n$ أي أن المتتابعة متناقصة. نثبت الآن أنها محدودة.

$$|a_n| = \left|\frac{4n^2-1}{4n^2}\right| |a_{n-1}|$$

ولكن $\left|\frac{4n^2-1}{4n^2}\right| < 1$، لذلك

$$|a_n| < |a_{n-1}| < |a_{n-2}| < \cdots < |a_1| = \frac{3}{4}$$

وبالتالي فإن المتتابعة محدودة.

إذا كان $m_2 > m_1$ فإن المتتابعتين $\{a_{m_1}\}$ و $\{a_{m_2}\}$ متقاربتان معا أو متباعدتان معا. (يرجع صحة ذلك إلى أننا نستطيع أخذ N في تعريف (٣-٣-٢) أكبر من m_2.) كنتيجة لذلك يمكننا حذف الحدود الأولى من المتتابعة والنظر إلى ما تبقى من حدود المتتابعة عند تحديد كون المتتابعة متقاربة أو متباعدة. وكمثال على ذلك، المتتابعة

$$-\pi, 10, \pi, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

تتقارب من الصفر لأنه بحذف الحدود الأربعة الأولى نحصل على المتتابعة

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

والتي نعلم أنها تتقارب من الصفر.

مما تقدم نستنتج أنه إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وكان k عددا صحيحا موجبا فإن المتتابعة $\{a_{n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، كما أن

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

فمثلا، إذا أخذنا $a_n = \frac{1}{n}$ و $k = 2$، فإننا نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

كما أنه إذا أخذنا $a_n = r^n$ و $k = -1$، فإننا نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} r^{n-1} = \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad \text{لكل} \quad -1 < r < 1$$

مثال (١٣)

ليكن

$$a_1 = \sqrt{2}، a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}، a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}، \cdots$$

وبشكل عام

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

(ا) اثبت أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة محدودة ومتزايدة.

(ب) اثبت أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب من عدد r .

(جـ) استخدم فرع (ب) مع كون

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n$$

لإثبات أن $r = 2$

الحل

(ا) لإثبات أنها محدودة نلاحظ من تعريف المتتابعة أن $a_n \le 2$ ولإثبات ذلك نستخدم الاستنتاج الرياضي:

عندما $n = 1$ فإن $a_1 = \sqrt{2} < 2$، وعندما $n = 2$ فإن $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$. نفرض أنها صحيحة عندما $n = k - 1$ ونثبت أنها صحيحة عندما $n = k$. أي نفرض أن $a_{k-1} \le 2$. بما أن

$$a_k = \sqrt{2 + a_{k-1}}$$

فإن

$$a_k{}^2 = 2 + a_{k-1} \le 4$$

لكن $a_k > 0$ لذلك $a_k \le 2$.

نثبت الآن أن المتتابعة متزايدة. بما أن $a_n \le 2$ فإن

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \ge a_n$$

إذن المتتابعة متزايدة.

(ب) من (ا) وجدنا أن المتتابعة محدودة من أعلى، بالتالي فإن لها أصغر حد علوي وليكن r . ووفقا لنظرية (٣-٥-٩) فإن المتتابعة تتقارب من r.

(جـ) من نظرية (٣-٥-١)(جـ)

$$\lim_{n\to\infty} 2 + a_n = 2 + r \qquad (١)$$

ومن فرع (د) من نفس النظرية والفقرة الأخيرة من هذا الفصل فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = r^2 \qquad (٢)$$

من العلاقة $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$ ومن (١) وكذلك (٢) نحصل على

$$r^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} 2 + a_n = 2 + r$$

أي أن

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$$

ومنه فإن، $r=-1$ أو $r=2$، وبما أن $r>0$. لذلك فإن $r=2$.

(٣-٦) تمارين

في التمارين من (١-٨) حدد ما إذا كانت المتتابعة محدودة.

(١) $\left\{1+\dfrac{2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (٢) $\left\{n+\dfrac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(٣) $\left\{e^{1/n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (٥) $\left\{\operatorname{sech} k\right\}_{k=1}^{\infty}$

(٥) $\left\{\cosh k\right\}_{k=10}^{\infty}$ (٦) $\left\{\dfrac{n^2+3}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(٧) $\left\{\cos n^2\right\}_{n=0}^{\infty}$ (٨) $\left\{3-(-1)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

في التمارين من (٩-٢٥) حدد ما إذا كانت المتتابعة متزايدة، متناقصة أو ليست مضطردة.

(٩) $\left\{\dfrac{3n-1}{4n+5}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (١٠) $\left\{\dfrac{1-2n^2}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(١١) $\left\{\dfrac{2n-1}{4n-6}\right\}_{n=2}^{\infty}$ (١٢) $\left\{\sin k\pi\right\}_{k=1}^{\infty}$

(١٣) $\left\{\cos \frac{1}{3}n\pi\right\}_{n=1}^{\infty}$ (١٥) $\left\{\dfrac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(١٥) $\left\{\dfrac{n^3-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (١٦) $\left\{\dfrac{2^n}{1+2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(١٧) $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (١٨) $\left\{\dfrac{1}{n+\sin k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

(١٩) $\left\{\dfrac{2n!}{5^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (٢٠) $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(٢١) $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (٢٢) $\left\{\dfrac{n!}{1.3.5...(2n-1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(٢٣) $\left\{n^2+(-1)^n n\right\}_{n=1}^{\infty}$ (٢٥) $\left\{\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2^n(n!)}\right\}_{n=1}^{\infty}$

في التمارين من (٢٥-٥٦) أوجد النهايات التالية:

(٢٥) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{2}{n}\right)$

(٢٦) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$

٢٧- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

٢٨- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

٢٩- $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)$

٣٠- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n-1}+3}{3^{n+2}}\right)$

٣١- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}\right)$

٣٢- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2n}\right)$

٣٣- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^3-5}{6n^3+3}\right)$

٣٥- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$

٣٥- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3n}\right)$

٣٦- $\lim\limits_{n\to\infty}(\tanh n)$

٣٧- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-(1+1/n)^2}{1-(1+1/n)}\right)$

٣٨- $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{2k-1}{k^2-7}\right)$

٣٩- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

٥٠- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2(n^2+1)}\right)$

٥١- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

٥٢- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)$

٥٣- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{ne^n}\right)$

٥٥- $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k}$

٥٥- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)$

٥٦- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\ln n}\right)$

(٥٧) اثبت نظرية (٣-٥-١).

(٥٨) اثبت نظريتي (٣-٥-١٠) و (٣-٥-١١).

(٥٩) (ا) إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ وكانت $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة محدودة . فاثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

(تلميح: افرض أن $|b_n|\le M$ لكل n ، واثبت أنه لأي $\varepsilon>0$ ، $|a_n|$ أصغر من $\frac{\varepsilon}{M}$).

(ب) لتكن $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة. استخدم فرع (ا)، لإثبات أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty}|c_n|=0$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. (تلميح: ضع $a_n = |c_n|$ ، وخذ b_n لتكون 1 أو 1- إذا كان $c_n \geq 0$ أو $c_n < 0$ على الترتيب).

(جـ) استخدم فرع (ا)، لكي تتحقق من النهايات التالية:

١- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ ٢- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$

٣- $\lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{e^n} = 0$ ٥- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+(-1)^n}{e^{2n}} = 0$

(٥٠) إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة والمتتابعة $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة، ماذا يمكنك القول عن المتتابعة $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ؟

(٥١) ليكن $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \cdots +\frac{1}{n} - \ln n$ لكل $n \geq 1$.

ا. استخدم تعريف اللوغاريتم الطبيعي لإثبات أن

$$\ln (n+1) - \ln n \geq \frac{1}{1+n} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

ب. استخدم فرع (ا) لإثبات أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متناقصة.

جـ. استخدم

$$\int_1^n \frac{1}{t}dt = \int_1^2 \frac{1}{t}dt + \int_2^3 \frac{1}{t}dt + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}dt \quad \text{لكل} \quad n \geq 2$$

لإثبات أن

$$\ln n \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \cdots +\frac{1}{n-1}$$

وبالتالي فإن $a_n \geq 0$ لكل $n \geq 1$.

د. اثبت أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة.

(٣-٧)

●المتسلسلات غير المنتهية

Infinite Series

تتضمن دراسة موضوع حساب التفاضل والتكامل دراسة جزء هام ألا وهو تمثيل الدوال " كمجموع غير منته " ويتطلب هذا تعميما لعملية الجمع المألوفة لمجموعة منتهية من الأعداد إلى عملية جمع عدد غير منته من الأعداد. لتحقيق ذلك نستخدم مفهوم النهاية للمتتابعات.

دعنا نعرف للمتتابعة $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ " مجموع غير منته " نرمز له

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

إن السؤال المطروح هو، ماذا يعني هذا التركيب الجبري؟ وبعبارة أخرى، ماذا نعني بـــ " مجموع " عدد غير منته من الحدود، وتحت أية شروط يوجد المجموع؟ لتكوين فكرة حدسية عن مفهوم الجمع هذا، نفرض أن لدينا قطعة سلك طولها 2 متر. قسمنا القطعة إلى نصفين لنحصل على قطعتين طول كل منهما 1 متر. وضعنا أحد القطعتين جانبا وقسمنا القطعة الثانية إلى نصفين لنحصل على قطعتين طول كل منهما $\frac{1}{2}$ متر. وضعنا أحد القطعتين جانبا وقسمنا القطعة الثانية إلى نصفين لنحصل على قطعتين طول كل منهما $\frac{1}{4}$ متر. وضعنا أحد القطعتين جانبا وقسمنا القطعة الثانية إلى نصفين لنحصل على قطعتين طول كل منهما $\frac{1}{8}$ متر. إذا تابعنا هذه العملية لمرات غير منتهية، فإن مجموع أطوال القطع التي تركت جانبا يمكن اعتباره المجموع غير المنتهي

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots \qquad (١)$$

بدأنا بقطعة سلك طولها متران ولهذا فإن حدسنا يوحي بأن المجموع غير المنتهي في (١) يجب أن يكون 2 . وسنثبت أن هذا هو المجموع فعلا في مثال (٢). لكن وقبل كل شيء نورد بعض التعاريف الأولية.

(٣-٧-١) تعريف

لتكن $\{a_n\}_1^\infty$ متتابعة. يسمى التركيب $\cdots+a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$ (٢)

متسلسلة غير منتهية (أو متسلسلة)، وباستخدام رمز المجموع نكتب (٢) على الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ أو } \sum a_n$$

كل عدد a_k يسمى حدا للمتسلسلة، كما يسمى a_n الحد النوني أو الحد العام للمتسلسلة.

يحدث أحيانا التباس بين مفهوم المتسلسلة ومفهوم المتتابعة. تذكر أن المتسلسلة تركيب يمثل مجموع غير منته لأعداد. بينما المتتابعة تجمع لأعداد تكون في تقابل مع مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. نقدم الآن نوعا خاصا من المتتابعات التي نحصل عليها باستخدام حدود المتسلسلة. من المتتابعة

$$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$$

نكون متتابعة جديدة $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ وذلك بجمع العناصر المتعاقبة للمتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^\infty$:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1\\
s_2 &= a_1+a_2\\
s_3 &= a_1+a_2+a_3\\
s_4 &= a_1+a_2+a_3+a_4\\
&\vdots\\
s_n &= a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n
\end{aligned}$$

المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ التي حصلنا عليها بهذه الطريقة تسمى متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة كما والتي نعرفها كما يلي:

(٣-٧-٢) تعريف

(i) نعرف المجموع الجزئي النوني s_n للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنه

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

(ii) نعرف متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنها المتتابعة

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

من التعريف

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}$$

ومنه

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

مثال (١)

أوجد المتسلسلة التي متتابعة المجاميع الجزئية لها هي $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

الحل

بما أن $s_1 = \frac{1}{2}$ فإن $a_1 = \frac{1}{2}$. إذا كان $n > 1$ فإن

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n}$$

كذلك فإن المتسلسلة هي: $\frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

مثال (٢)

من المتتابعة $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_1^{\infty}$ كون متتابعة المجاميع الجزئية ثم اكتب المتسلسلة.

الحل

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{3}$$
$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$
$$\vdots$$
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

وهي متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

مثال (٣)

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة

(ا) أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ب) أوجد صيغة جبرية للحد النوني s_n بدلالة n .

الحل

(ا)

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$$
$$s_4 = s_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$$

(ب) بما أن $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$، فإنه باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

وبالتالي فإن

$$a_1 = 1-\frac{1}{2}،\ a_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}،\ a_3 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ \cdots\ a_{n-1} = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}،\ a_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ومن هنا نجد أن

$$s_n = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ \cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

بعد إزالة الأقواس والاختصار نحصل على

$$s_n = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

الطريقة التي اتبعناها في المثال السابق تطبق فقط للحالات الخاصة. وبصفة عامة فإنه يتعذر إيجاد صيغة جبرية عامة للحد النوني s_n .

إذا كان للمتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نهاية فإنها تسمى مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ كما يوضح ذلك التعريف التالي:

(٣-٧-٣) تعريف

يقال أن المتسلسلة غير المنتهية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ للمتسلسلة متقاربة ، أي إذا كانت $\lim_{n\to\infty} s_n$ موجودة وتساوي عددا حقيقيا S .

النهاية S هي مجموع المتسلسلة ونكتب

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ويقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة إذا كانت $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة. المتسلسلة المتباعدة ليس لها مجموع.

كما أشرنا سابقا، يتعذر إيجاد صيغة جبرية للحد s_n لمعظم المتسلسلات. ولكن، سنرى في الفصول اللاحقة أنه بالإمكان إثبات أن المتسلسلة متقاربة أو متباعدة، وذلك باستخدام طرائق أخرى. فيما تبقى من هذا الفصل ندرس متسلسلات هامة يمكن إيجاد صيغة جبرية للحد s_n .

نعود إلى المثال الذي أشرنا إليه في المقدمة وهو أيضا مثال (١).

مثال (٤)

اثبت أن المتسلسلة التالية متقاربة وأن مجموعها 2 .

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

الحل

من مثال (١) نجد أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة هي $\{s_n\}$ ، حيث

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

(٣)

لإثبات أن للمتسلسلة مجموع علينا إيجاد $\lim_{n\to\infty} s_n$. نستخدم التعبير الجبري التالي لإيجاد صيغة للمجموع s_n .

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

نستخدم المتساوية بوضع $x = 1$ و $y = \frac{1}{2}$ نحصل على

$$1 - \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - 1/2^n}{1/2}$$

بمقارنة هذه المعادلة مع (٣) نحصل على

$$s_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2$. أي أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها 2 .

مثال (٥)

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ المتسلسلة الواردة في مثال (٢). اثبت أن المتسلسلة متقاربة وأوجد مجموعها.

الحل

في مثال (٢)(ب) أثبتنا أن

$$s_n = \frac{n}{n+1}$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

وبالتالي المتسلسلة متقاربة ومجموعها 1 .

تسمى المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ بالمتسلسلة المتداخلة (Telescopic series).

مثال (٦)

لتكن لدينا المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

(ا) أوجد الحدود الستة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ب) أوجد s_n .

(جـ) اثبت أن المتسلسلة متباعدة.

الحل

(ا) من تعريف (٣-٧-٢)

$s_1 = 1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 0, \quad s_5 = 1,$ و $s_6 = 0$

(ب) نستطيع كتابة s_n كما يلي:

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } n \text{ فرديا} \\ 0 & \text{إذا كان } n \text{ زوجيا} \end{cases}$$

(جـ) بما أن متسلسلة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتذبذب بين 0 و 1. لذلك فإن $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ غير موجودة. وبالتالي فالمتسلسلة متباعدة.

مثال (٧)

اثبت أن المتسلسلة التالية متباعدة:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

الحل

نعيد كتابة المتسلسلة بتجميع حدودها كما يلي:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + (\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}) + (\tfrac{1}{17} + \cdots + \tfrac{1}{32}) + \cdots$$

لاحظ أن عدد حدود كل قوس ضعف عدد حدود القوس الذي يسبقه مباشرة. أيضا كلما كبرت قيمة المقام صغرت قيمة الكسر، لذلك نحصل على:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$$

بما أن مجموع حدود كل قوس أكبر من $\frac{1}{2}$ ، فإننا نحصل على المتراجحات التالية:

$$s_2 = s_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} > 2(\frac{1}{2})$$

$$s_4 = s_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 3(\frac{1}{2})$$

$$s_8 = s_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 4(\frac{1}{2})$$

$$s_{16} = s_{2^4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{16} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 5(\frac{1}{2})$$

$$s_{32} = s_{2^5} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{32} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 6(\frac{1}{2})$$

وباستخدام الاستنتاج الرياضي، يمكن إثبات أن:

$s_{2^k} > (1+k)\frac{1}{2}$ لكل عدد صحيح موجب k .

وهذا يقتضي أن:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^k} > \lim_{n\to\infty} (1+k)\frac{1}{2}$$

لكن

$$\lim_{n\to\infty} (1+k)\frac{1}{2} = \infty$$

ولذلك

$$\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty$$

أي أن

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

ولهذا فالمتتابعة $\{s_n\}$ متباعدة، وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

أثبتنا في المثال السابق أن المتسلسلة

$$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+ \cdots + \frac{1}{n}+\cdots$$

متباعدة بالرغم من أن حدودها تتقارب من الصفر. تسمى هذه المتسلسلة بالمتسلسلة التوافقية (Harmonic series) . تجدر الإشارة هنا إلى أن تباعد هذه المتسلسلة لا يعني أن المجموع الجزئي النوني s_n يتزايد بشكل كبير كلما زادت n ، وعلى النقيض فإن s_n يتزايد ببطء شديد. بينت الحسابات التي أجريت بالحاسب الآلي أن:

$s_n \ge 20$ إذا كان $n \ge 272400600$ و $s_n \ge 100$ إذا كان $n \ge 1.5\times 10^{43}$.

المتسلسلات الهندسية (Geometric series)

يتكرر ظهور بعض المتسلسلات في حلول المسائل التطبيقية. واحدة من أهم هذه المتسلسلات هي المتسلسلات الهندسية. المتسلسلة الهندسية هي المتسلسلة التي تأخذ الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

حيث أن a و r أعداد حقيقية و $a \ne 0$. (اكتسبت المتسلسلات الهندسية اسمها من كون ar^n المتوسط الهندسي للعددين (ar^{n-1} و ar^{n+1}). المتسلسلة في مثال (٤) متسلسلة هندسية، حيث $r=\frac{1}{2}$ و $a=1$. تقارب المتسلسلات الهندسية يعتمد كليا على اختيار r كما سنرى في النظرية التالية.

(٣-٧-٤) نظرية (نظرية المتسلسلات الهندسية)

ليكن a و r عددين حقيقيين و $a \neq 0$. المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

متقاربة ومجموعها $\frac{a}{1-r}$ لكل r ، حيث $|r| < 1$، ومتباعدة لكل r ، حيث $|r| \geq 1$.

البرهان

نثبت النظرية في الحالتين

(i) إذا كان $r = 1$ فان

$$s_n = a + a + \cdots + a = na \quad (n \text{ - مرة})$$

بالتالي

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} na = a \lim_{n\to\infty} n$$

لكن $a \lim_{n\to\infty} n$ تساوي ∞ إذا كان $a > 0$ وتساوي $-\infty$ إذا كان $a < 0$ ، بالتالي فإن $\lim_{n\to\infty} s_n$ غير موجودة ، أي أن المتسلسلة متباعدة.

(ii) إذا كان $r \neq 1$ فإن

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \tag{٤}$$

بالضرب في r نحصل على

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \tag{٥}$$

بطرح (٥) من (٤) نحصل على

$$(1-r)s_n = a\ (1-r^n) \tag{٦}$$

بما أن $r \neq 1$ فإن $1 - r \neq 1$ ، بالقسمة على $1-r$ نجد أن

$$s_n = a\frac{(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}$$

ولهذا فإن

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n$$

ولكن من نظرية (٣-٣-٥) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ إذا كانت $|r| < 1$ ، بالتالي فإن $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-r}$ ، أي أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها $\dfrac{a}{1-r}$ لكل r ، حيث $|r|<1$. من نفس النظرية $\lim_{n\to\infty} r^n$ غير موجودة إذا كانت $|r| > 1$ و $r = -1$، أي أن المتسلسلة متباعدة لكل r، حيث $|r| > 1$ و $r = -1$.

مثال (٨)

اثبت أن المتسلسلة التالية متقاربة وأوجد مجموعها:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$$

الحل

المتسلسلة هندسية حيث $r = \frac{1}{3} < 1$ و $a = 2$، من نظرية (٣-٧-٤) نستنتج أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S = \dfrac{2}{1-1/3} = 3$.

مثال (٩)

اكتب العدد العشري الدوري $0.3333\overline{3}...$ على صيغة كسر.

الحل

$$0.33333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

وهذه متسلسلة هندسية فيها $r = \frac{1}{10} < 1$ و $a = \frac{3}{10}$، من نظرية (٣-٧-٤) نستنتج أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S = \dfrac{3/10}{1-3/10} = \dfrac{1}{3}$.

ذكرنا سابقا أنه يتعذر أحيانا إيجاد تعبير جبري لـــ s_n . لذلك من الآن فصاعدا سيتركز اهتمامنا على تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة.

(٣-٧-٨) نظرية (اختبار للتباعد)

(ا) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ب) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ أو غير موجودة ، فإن المتسلسلة متباعدة.

البرهان

(أ) بما أن $a_n = s_n - s_{n-1}$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$

بما أن المتسلسلة متقاربة ، فإن $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$ ، ومن ثم فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ب) ينتج من (أ) مباشرة. ■

تحذير : ينص فرع (أ) في النظرية السابقة على أنه إذا كانت المتسلسلة متقاربة فإن الحد النوني a_n لها يقترب من الصفر عندما يقترب n من مالانهاية. عكس النظرية قد لا يكون صحيحا، أي أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ فليس ضروريا أن تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة. المتسلسلة التوافقية في مثال (٧) واحدة من المتسلسلات المتباعدة والتي نهاية الحد النوني a_n تساوي الصفر، أي أنه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. كنتيجة لذلك ، فإنه لا يكفي إثبات أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ لمعرفة ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة، حيث أن هذا صحيحا للمتسلسلات المتقاربة وبعض المتباعدة.

ولكن فرع (ب) في النظرية يعتبر اختبارا للتباعد.

التوضيح التالي يوضح كيفية استخدام نظرية (٣-٧-٨).

توضيح

المتسلسلة	النهاية	الاستنتاج
$=\sum_1^{\infty}\frac{n}{3n+5}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+5}=\frac{1}{3}\neq 0$	متباعدة، وفقا لنظرية (٣-٧-٨)(ب).
$=\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$	لا نستطيع تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة، باستخدام نظرية (٣-٧-٨).
$=\sum_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$	لا نستطيع تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة، باستخدام نظرية (٣-٧-٨).
$=\sum_1^{\infty}\frac{e^n}{n}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}=\infty$	متباعدة، وفقا لنظرية (٣-٧-٨)(ب).

سنثبت في الفصل التالي أن المتسلسلة الثانية الواردة في التوضيح السابق متقاربة وأن الثالثة متباعدة.

تحصيل المتسلسلات (Combinations of series)

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_1^{\infty} b_n$ متسلسلتين ، فإننا نستطيع جمعهما حدا حدا؛ ونستطيع أيضا ضرب كل حدود أي من المتسلسلتين بعدد ثابت c . ينتج عن هاتين العمليتين متسلسلتان جديدتان

$\sum_{1}^{\infty}(a_n+b_n)$ و $\sum_{1}^{\infty}ca_n$ ، حيث أن تقاربهما يتبع من تقارب المتسلسلتين الأصليتين، كما تنص على ذلك النظرية التالية:

(٣-٧-٦) نظرية

(أ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{1}^{\infty}b_n$ متسلسلتين متقاربتين مجموعهما T و R على الترتيب، فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}(a_n+b_n)$ متقاربة أيضا، كما أن

$$\sum_{1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{1}^{\infty}a_n+\sum_{1}^{\infty}b_n=T+R$$

(ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة متقاربة و c عددا حقيقيا ، فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}ca_n$ متقاربة، كما أن

$$\sum_{1}^{\infty}ca_n=c\sum_{1}^{\infty}a_n=cT$$

(جـ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{1}^{\infty}b_n$ كما في (أ) ، فإن $\sum_{1}^{\infty}(a_n-b_n)$ متقاربة وأن

$$\sum_{1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{1}^{\infty}a_n-\sum_{1}^{\infty}b_n=T-R$$

(د) إذا كانت $\sum_{1}^{\infty}a_n$ متسلسلة متباعدة و c عددا حقيقيا ، فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}ca_n$ متباعدة.

البرهان

(أ) لتكن s_n،t_n و r_n المجاميع الجزئية النونية للمتسلسلات $\sum_{1}^{\infty}(a_n+b_n)$، $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{1}^{\infty}b_n$ على الترتيب. عندئذ

$$\begin{aligned}s_n&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=t_n+r_n\end{aligned}$$

ونتيجة لذلك

$$\sum_{1}^{\infty}(a_n+b_n))=\lim_{n\to\infty}s_k=\lim_{n\to\infty}t_n+\lim_{n\to\infty}r_n=T+R$$

نستخدم نفس الفكرة لإثبات فقرتي (ب) و (د). لذلك نتركها كتمرين. أما فقرة (جـ) فإنها تنتج باستخدام فقرتي (أ) و (ب) معا.■

يمكن تعميم نظرية (٣-٧-٦) إلى ثلاث متسلسلات أو أكثر.

مثال (١٠)

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)}\right)$ متقاربة، ثم احسب مجموعها.

الحل

من نظرية المتسلسلات الهندسية فإن

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{4}{2^n}=\frac{4(1/2)}{1-1/2}=4$$

من نظرية (٣-٧-٦)(ب) ومثال (٥) من هذا الفصل نجد أن

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=3$$

من نظرية (٣-٧-٦)(جـ) نحصل على

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)}\right)=4-3=1$$

مثال (١١)

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ متباعدة أو متقاربة.

الحل

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4n}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

بما أن المتسلسلة التوافقية $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة، فمن نظرية (٣-٧-٦)(جـ) نجد أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

دعنا نقارن بين عدد قليل من المجاميع الجزئية للمتسلسلتين $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. حيث أن n تبدأ من 2 للمتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ومن 5 للمتسلسلة $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ لذلك فإن المجاميع الجزئية هي كما يلي:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$s_1 = \frac{1}{2^2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$s_3 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$$

$$s_4 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$$

$$s_5 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$$

$$s_6 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$$

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$r_1 = \frac{1}{5^2}$$

$$r_5 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$$

$$r_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$$

نلاحظ من القائمة السابقة أن

$$s_{n+3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + r_n$$

نستنتج أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة أيضا ، والعكس صحيح. وفضلا عن ذلك، إذا كانت المتسلسلتان متقاربتين فإن

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

نلخص ما تقدم في النظرية التالية:

(٣-٧-٧) نظرية

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين تختلفان قي الحدود الأولى التي عددها m حدا فقط (أي أن $a_k = b_k$ لكل $k > m$) فإما أن المتسلسلتين متقاربتان أو أنهما متباعدتان.

البرهان

لتكن $\{s_n\}$ و $\{r_n\}$ متتابعتي المجاميع الجزئية للمتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ على الترتيب. فإن $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ و

$$t_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n$$

وبما أن $a_k = b_k$ لكل $k > m$ ، فإن

$$\begin{aligned} s_n - t_n &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_m) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_m) \\ &= s_m - t_m \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $s_n = t_n + (s_m - t_m)$

وعليه فإن

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n + (s_m - t_m)$$

وبناءا عليه، إما أن النهايتين موجودتان أو غير موجودتين. أي المتسلسلتين متقاربتان أو أنهما متباعدتان. ■

مثال (١٢)

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{1}{n+4}$ متقاربة أو متباعدة.

الحل

المتسلسلة المعطاة هي

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n+4} = 0+0+0+0+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+4}+\cdots$$

وبمقارنتها بالمتسلسلة التوافقية

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

نلاحظ أن المتسلسلتين تختلفان في الحدود الأربعة الأولى. من نظرية (٣-٧-٦) وبما أن المتسلسلة التوافقية متباعدة، فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

تقتضي نظرية (٣-٧-٧) أن تغيير عدد حدود من حدود المتسلسلة لا يؤثر على تقارب أو تباعد المتسلسلة (على الرغم من أن مجموع المتسلسلة المتقاربة يتغير). كحالة خاصة، إذا حذفنا الحدود الأولى التي عددها k من المتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ، فإن تقارب المتسلسلة لا يتأثر. نورد هذه النتيجة في النظرية التالية:

(٣-٧-٨) نظرية

لكل عدد صحيح موجب k فإن المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \quad \text{و} \quad \sum_{n=k+1}^\infty a_n = a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n+\cdots$$

تكونان متقاربتين معا أو متباعدتين معا. وأيضا إذا كانت المتسلسلتان متقاربتين فإن

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = a_1+a_2+\cdots+a_k+\sum_{n=k+1}^\infty a_n$$

مثال (١٣)

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=4}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة وأوجد مجموعها.

الحل

يمكن الحصول على المتسلسلة المعطاة من المتسلسلة المتداخلة في مثال (٥) وذلك بحذف الحدود الثلاث الأولى. من نظرية (٣-٧-٥) وبما أن المتسلسلة المتداخلة متقاربة ومجموعها 1، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}) = \frac{1}{4}$

تستخدم النظرية التالية؛ وهي نتيجة لنظرية (٣-٧-٦) ؛ لإثبات أن المتسلسلة متباعدة.

> **(٣-٧-٩) نظرية**
>
> إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ متباعدة.

البرهان

نفرض العكس، أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ متقاربة وأن مجموعهما S ، وليكن R مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. بما أن

$$\sum_{1}^{\infty} b_n = \sum_{1}^{\infty} [(a_n+b_n)-b_n]$$

فإننا نستنتج من نظرية (٣-٧-٦) (جـ) أن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة ومجموعها $S-R$. وهذا يناقض الفرضية بأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة. ومنه فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ متباعدة.■

مثال (١٤)

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4^n})$ متقاربة أو متباعدة.

الحل

أثبتنا في مثال (١١) أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ متباعدة كما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ هندسية فيها $|r| = \frac{1}{4} < 1$ فهي متقاربة. من نظرية (٣-٧-٩) نستنتج أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدتين ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ قد تكون متقاربة أو غير متقاربة. فمثلا إذ كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ فإن مجموعهما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ وهي متباعدة. لكن إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ فإن مجموعهما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ وهي متقاربة.

(٣-٨) تمـــــاريـــــن

في التمارين من (١-١٤) اكتب الأربعة حدود الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}$ وأوجد التعبير الجبري للمجموع الجزئي النوني s_n بدلالة n . حدد أيضا ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة وأوجد مجموع المتقاربة منها.

١- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

٢- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(3n+1)(3n-2)}$

٣- $\sum_{n=1}^{\infty}1$

٤- $\sum_{n=1}^{\infty}n$

٥- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

٦- $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

٧- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-3)(4n+1)}$

٨- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}$

٩- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}}$

١٠- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{9n^2+3n-2}$

١١- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)$

١٢- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

١٣- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

١٤- $\sum_{n=1}^{\infty}[n^3-(n+1)^3]$

في التمارين من (١٥-٢٤) حدد المتسلسلة المتباعدة التي نهاية حدها العام لا ينتهي إلى الصفر.

١٥- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

١٦- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

١٧- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}$

١٨- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$

١٩- $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)$

٢٠- $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi$

٢١- $\sum_{n=2}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)$

٢٢- $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$

٢٣- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

٢٤- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n+1}$

في التمارين من (٢٥-٣٢) اكتب الأربعة حدود الأولى للمتسلسلة، ثم حدد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة وأوجد مجموع المتقاربة منها.

٢٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

٢٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$

٢٧- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{n}$

٢٨- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$

٢٩- $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

٣٠- $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (1)^n]$

٣١- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$

٣٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$

في التمارين من (٣٣-٤٤) حدد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة وأوجد مجموع المتقارب منها.

٣٣- $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{4}{7}\right)^n$

٣٤- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n$

٣٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

٣٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n 5^n}$

٣٧- $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (0.33)^n$

٣٨- $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} - 2^{-3n})$

٣٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{5^{n-1}}$

٤٠- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

٤١- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}\right)$

٤٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}}\right)$

٤٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$

٤٤- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

في التمارين من (٤٥- ٥٠) اكتب المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ المعطاة على الصيغة $c + \sum_{n=4}^{\infty} a_n$، حيث c عدد ثابت.

٤٥- $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \cdots$

٤٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

٤٧- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

٤٨- $1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \cdots$

٤٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

٥٠- $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

في التمارين من (٥١– ٥٦) عبر عن الكسور العشرية الدورية على صيغة كسر اعتيادي.

٥١- $0.242424\cdots$ ٥٢- $0.6666666\cdots$ ٥٣- $0.0727272\cdots$

٥٤- $0.45323232\cdots$ ٥٥- $27.56123123123\cdots$ ٥٦- $0.00649649649\cdots$

(٥٧) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة. اثبت أن المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ هو $(a_1 - a_{n+1})$. ثم استنتج أن المتسلسلة متقاربة إذا وفقط إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجودة ، وأن المجموع في هذه الحالة هو $a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$.

(٥٨) إذا علمت أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. فأوجد $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

(٥٩) إذا علمت أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$. فأوجد $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

(٦٠) اثبت أن $\frac{1}{1+r}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n$ لكل r، حيث $-1 < r < 1$.

(٦١) اثبت الفقرات (ب) ، (جـ) ، (د) من نظرية (٣–٧–٦).

(٦٢) استخدم عالم الرياضيات السويسري ليونارد أويلر فكرة نظرية المتسلسلات الهندسية ليستنتج انه لكل $r > 0$ ، فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{1-1/r} = -\frac{r}{1-r}$$

من ثم استنتج أن

$$\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^4}+\cdots\right)+(r+r^2+\cdots)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty} r^n = -\frac{1}{1-r}+\frac{r}{1-r}=0$$

هذا مخالف للمنطق لأن جميع حدود المتسلسلتين على الطرف الأيسر للمعادلة موجبة، وضح الخطأ في هذا البرهان ؟

(٦٣) حدد الخطأ في البرهان التالي: ليكن

$$a = 1+2+4+8+16+\cdots$$

فإن

$$2a = 2+4+8+16+\cdots$$
$$= (1+2+4+8+16+\cdots)-1 = a-1$$

لذلك فإن

$$a=-1$$

(٦٤) (ا) اثبت أن $0<q!\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}<1$

(ب) اثبت أن e عدد غير كسري. (تلميح : افرض أن e عددا كسريا. عندئذ يوجد عددان صحيحان موجبان p و q بحيث أن $e=\frac{p}{q}$ و $q\geq 2$. اثبت أن

$$p[(q-1)!]=q!\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}+q!\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad (٧)$$

باستخدام فقط (ا)، حدد أي من الحدود في (٧) أعدادا صحيحة وأي منها ليست أعدادا صحيحة، ثم استنتج أن الفرض بأن e عددا كسريا فرضا خاطئا).

(٦٥) أسقطت كرة من ارتفاع عشرة أمتار على سطح أملس. في كل ارتداد ترتفع الكرة 60 بالمائة من الارتفاع السابق الذي وصلت إليه. أوجد المسافة الكلية التي قطعتها الكرة.

ح (٦٦) (ا) حدد اصغر قيمة للعدد j بحيث أن $\sum_{n=1}^{j}\frac{1}{n}\geq 3$.

(ب) استخدم الحاسبة أو الحاسب لتحديد أصغر قيمة للعدد j بحيث أن $\sum_{n=1}^{j}\frac{1}{n}\geq 4$.

(٦٧) يتذبذب بندول على قوس طوله 24 سم في الذبذبة الأولى. إذا كانت كل من الذبذبات التالية تساوي تقريبا خمسة أسداس الذبذبة التي تسبقها، استخدم المتسلسلة الهندسية لحساب المسافة التي يقطعها البندول قبل أن يتوقف.

(٦٨) إذا أعطيت جرعة من عقار معين قدرها Q وحدة لشخص، فإن كمية العقار المتبقية في الدم بعد زمن قدره t دقيقة تعطى بالعلاقة Qe^{-ct} ، حيث $c>0$. إذا أعطي نفس العقار على فترات زمنية متعاقبة قدرها T – دقيقة

(ا) اثبت أن كمية العقار $A(k)$ المتبقية في الدم مباشرة بعد عدد من الجرعات قدرها k تعطى بالعلاقة $A(k)=\sum_{n=0}^{k-1}e^{-ncT}\geq 4$.

(ب) أوجد حدا علويا لكمية العقار في الدم بعد أي عدد من الجرعات.

(جـ) أوجد أصغر زمن بين الجرعات بحيث أن كمية العقار $A(k)$ في الدم لا تزيد عن مستوى معين M حيث $M>Q$.

(٦٩) في مركز لمكافحة الحشرات الضارة، يطلق سراح عدد من ذكور الذباب العقيمة مقداره N إلى القطيع كل يوم ، و $90\ \%$ منها تبقى يوما على قيد الحياة.

(ا) اثبت أن عدد الذباب العقيم في القطيع بعد n يوم هو $N+(0.9)N+\cdots+(0.9)^n N$.

(ب) إذا كان الهدف البعيد للبرنامج الإبقاء على 20000 من هذه الذكور العقيمة في القطيع، فكم عدد الذكور التي يجب إطلاقها كل يوم.

(٧٠) (ا) يسير قطاران بسرعة 15 كم/الساعة على نفس خط سكة حديدية مستقيمة وفي اتجاهين متعاكسين. بدأت نحلة بالطيران بينهما (إلى الأمام والخلف) بسرعة 30 كم/الساعة عندما أصبحت المسافة بينهما 1 كم . عبر عن المسافة التي قطعتها النحلة كمتسلسلة قبل أن يصطدم القطاران. وأوجد مجموعها.

(ب) أوجد حلا سهلا لمسألة النحلة دون استخدام المتسلسلات.

(٧١) تزحف نملة على قطعة مطاطية تتمدد بشكل منتظم. افرض أن الطول الابتدائي لقطعة المطاط هو ١ مترا وتتمدد مترا إضافيا عند نهاية كل دقيقة. إذا بدأت النملة الزحف عند أحد طرفي القطعة ، هل تصل النملة إلى الطرف الآخر؟ إذا كان هذا ممكنا، فما هو الزمن الذي تستغرقه النملة؟

(٧٢) يبلغ دخل أحد الأشخاص 2000 ريالا شهريا ويصرف كل شهرا جزءا قدره p (حيث $0<p<1$) مما يجمعه من الشهر والأشهر السابقة. أوجد صيغة لتوفيره w_n بعد n من الأشهر، واثبت أن ما يوفره يقترب من عدد ما عندما تقترب n من مالانهاية.

(٣ – ٩)

●المتسلسلات ذات الحدود الموجبة

(اختبار التكامل واختبار المقارنة)

Positive Term Series
(Integral and Comparison tests)

اعتمدنا في الفصل السابق على إيجاد صيغة جبرية للحد النوني s_n لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}$، من ثم نحدد ما إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ موجودة أم لا وذلك لإثبات تقارب أو تباعد المتسلسلات. إن إيجاد التعبير الجبري لـــ s_n غالبا ما يكون صعبا إن لم يكن مستحيلا إلا في حالات خاصة كالمتسلسلات الهندسية والمتداخلة. فمثلا ، نعلم أن المتسلسلة $\sum_1^\infty 1/n^3$ متقاربة ولكن لا نعرف مجموعها. يكفي في العديد من التطبيقات معرفة أن المتسلسلة متقاربة ، فمعرفة وجود المجموع يتيح لنا إيجاد قيمة تقريبية لهذا المجموع وذلك بجمع عدد كبير جدا من حدود المتسلسلة.

نورد في هذا الفصل والفصول اللاحقة عدة اختبارات لتحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة . هذه الاختبارات لا تعطينا مجموع المتسلسلة وبدلا من ذلك تساعدنا على معرفة ما إذا كان المجموع موجودا. تقتصر دراستنا في هذا الفصل على المتسلسلات الموجبة (Positive series) أي المتسلسلات التي كل حد من حدودها عدد حقيقي موجب، أي المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n$ بحيث أن $a_n > 0$. قد يظهر أننا ندرس حالة خاصة ، ولكن المتسلسلات الموجبة تشكل الأساس في دراستنا للمتسلسلات. كما سنرى لاحقا فإن دراسة تقارب أو تباعد أي متسلسلة غالبا ما يتم عن طريق دراسة متسلسلة موجبة. إذا كانت المتسلسلة موجبة فإن متتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}$ لها متزايدة، بالتالي إذا كانت $\{s_n\}$ محدودة فإنها متقاربة وإذا كانت غير محدودة فإنها متباعدة . هذا يقود إلى النظرية التالية كنتيجة للنظرية (٣-٤-٤) والنظرية (٣-٤-٥).

(٣-٩-١) نظرية

المتسلسلة الموجبة متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية محدودة من أعلى.

يمكن استخدام الحد النوني a_n للمتسلسلة $\sum a_n$ لتعريف دالة f بحيث أن $f(n) = u_n$ لكل عدد صحيح موجب n . في بعض الحالات، إذا عوضنا x بدلا من n نحصل على دالة معرفة لكل عدد حقيقي $x \geq 1$. يبين الاختبار التالي أنه إذا حصلنا على f بالطريقة ذاتها وتحت شروط معينة فإنه بالإمكان استخدام التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ لاختبار تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n = \sum_1^\infty f(n)$.

(٣-٩-٢) نظرية (اختبار التكامل)

لتكن $\sum_1^\infty a_n$ متسلسلة موجبة، ولتكن f دالة متصلة ومتناقصة معرفة على الفترة $[1,\infty)$ بحيث

$$f(n) = u_n \quad \text{لكل} \quad n \geq 1 \qquad (١)$$

عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ متقاربا .

البرهان

كما في نص النظرية، نضع $f(n) = a_n$ ، حيث $f(x)$ دالة موجبة ومتصلة ومتزايدة لكل $x \geq 1$. الشكل (١) يمثل منحنى دالة من هذا النوع. إذا كان n عدد صحيح موجب فإن مساحة المستطيلات الداخلية هي:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

بالمثل فإن مساحة المستطيلات الخارجية الممثلة في الشكل (١) هي:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

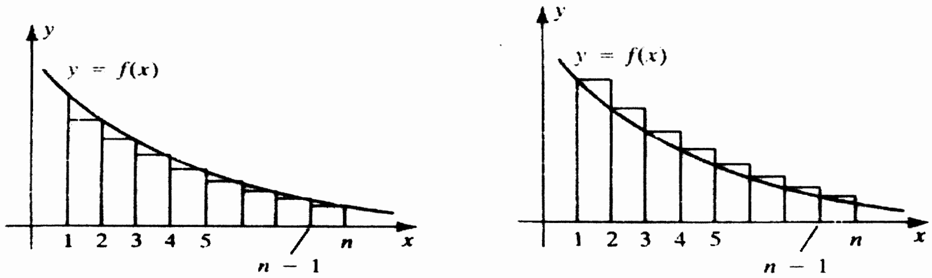
بما أن التكامل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ يمثل مساحة المنطقة المستوية المحدودة بمنحنى الدالة f والمستقيمين $x = 1$ و $x = n$، بالتالي فإن

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

ليكن s_n المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum_1^\infty a_n = \sum_1^\infty f(n)$، فإن المتراجحة السابقة يمكن كتابتها على الصيغة

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq s_{n-1} \qquad (٢)$$

إذا كان التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ متقاربا، فإن المتراجحة في (٢) تقتضي أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_2^\infty a_n$ محدودة من أعلى، وطبقا لنظرية (٣-٩-١) فإن المتسلسلة $\sum_2^\infty a_n$ متقاربة. بالمثل، إذا كانت $\sum_1^\infty a_n$ متقاربة، فمن المتراجحة في (٢) نستنتج أن التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ متقاربا.■



شكل (٣-٤)

نستنتج من المتراجحة في (٢) في برهان اختبار التكامل أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n$ متقاربة أو كان التكامل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ متقاربا، فإن

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int_1^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

المتسلسلة التالية؛ وهي تعميم للمتسلسلة التوافقية ؛ ذات أهمية خاصة عند استخدام اختبار المقارنة.

(٣-٩-٣) تعريف

متسلسلة $- \, p$ ، هي المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

حيث أن p عدد حقيقي.

تزودنا النظرية التالية بالمعلومات عن تقارب أو تباعد متسلسلة $- \, p$.

(٣-٩-٤) نظرية

متسلسلة - p ، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

(ا) متقاربة لكل $p > 1$

(ب) متباعدة لكل $p \leq 1$

البرهان

إذا كان $p \leq 0$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} n^q$ ، حيث $p = -q$ و $q \geq 0$، ومنه

$$\lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 1 & ; q = 0 \\ \infty & ; q > 0 \end{cases}$$

من نظرية (٣-٧-٥) المتسلسلة متباعدة. إذا كان $p = 1$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ وهي المتسلسلة التوافقية، وهي متباعدة من مثال (٧) فصل (٣-٧).

نفرض أن $p > 0$ و $p \neq 1$. لتطبيق اختبار التكامل نعرف الدالة f بالصيغة

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \quad \text{لكل} \quad x \geq 1$$

بما أن $f(n) = \frac{1}{n^p}$ لكل $n \geq 1$، وبما أن الدالة متصلة ومتناقصة على الفترة $[1,\infty)$ ، فإننا نستطيع تطبيق اختبار التكامل، أي ندرس تقارب أو تباعد التكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{p-1} \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right)$$

لكن $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t^{p-1}}$ موجودة لكل $p > 1$ وغير موجودة لكل $0 < p < 1$، وهذا يقتضي أن التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ متقارب لكل $p > 1$ ومتباعد لكل $0 < p < 1$. من اختبار التكامل تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متقاربة لكل $p > 1$ ومتباعدة لكل $0 < p < 1$. بالتالي المتسلسلة متقاربة لكل $p > 1$ ومتباعدة لكل $p \leq 1$. ■

من نظرية (٣-٩-٤) نعلم أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.0001}}$ متقاربة و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.999}}$ متباعدة .

يجب ملاحظة أن نظرية (٣-٩-٤) لا تعطينا مجموع متسلسلة - p . والحقيقة أن قيمة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ حيرت الرياضيين حتى منتصف القرن الثامن عشر عندما اثبت أويلر أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

وحتى الآن فإن مجموع متسلسلة p – معروف للأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة ولكنه غير معروف لأي عدد صحيح فردي أكبر من الواحد (اثبت حديثا أن المجموع عدد غير كسري (irrational).

مثال (١)

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ متباعدة .

الحل

بما أن المتسلسلة موجبة ، لذلك نستخدم اختبار التكامل. نعرف

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad \text{لكل} \quad x \geq 2$$

بما أن x و $\ln x$ متصلتان و $f'(x) = \frac{-(1+\ln x)}{(x \ln x)^2} < 0$ فإن الدالة متصلة ومتناقصة على الفترة $[2,\infty)$ وأيضا $f(n) = \frac{1}{n \ln n}$ لكل $n \geq 2$ ،لذلك نستطيع استخدام اختبار التكامل

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^{t} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} [\ln (\ln x) - \ln (\ln 2)] = \infty$$

أي أن التكامل المعتل متباعد وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

رأينا من نظرية (٣-٩-٤) ومثال (١) أنه لتطبيق اختبار التكامل لا بد من تعريف دالة يمكن إيجاد تكاملها بسهولة. الاختبار التالي يتضمن مقارنة بين متسلسلتين.

(٣-٩-٥) نظرية (اختبار المقارنة Comparison test)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين موجبتين

(أ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة و $a_n \leq b_n$ لكل $n \geq 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة كما أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة و $b_n \leq a_n$ لكل $n \geq 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

البرهان

(أ) لنفرض أن كلا من s_n و t_n يمثل المجاميع الجزئية النونية للمتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ على الترتيب . بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فان $\lim_{n \to \infty} t_n$ موجودة ولتكن L . بما أن $a_n \leq b_n$ لكل $n \geq 1$ ، وبما أن $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدتان فإن

$$0 \leq s_n \leq t_n \leq L \quad \text{لكل} \quad n \geq 1 \qquad (٣)$$

نستنتج من هذا أن المتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ومتزايدة، من نظرية (٣-٩-١) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة. ينتج أيضا من (٣) أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n \le L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(ب) نفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، من فرع (أ) فإن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة ، وهذا يناقض الفرضية (ب) . لذلك فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.■

لاستخدام اختبار المقارنة في إثبات تقارب متسلسلة موجبة، نقارنها بمتسلسلة موجبة ومتقاربة وحدودها أكبر من أو تساوي حدود المتسلسلة قيد الدراسة. ولإثبات أن المتسلسلة الموجبة متباعدة، نقارنها بمتسلسلة موجبة ومتباعدة وحدودها أصغر من أو تساوي حدود المتسلسلة قيد الدراسة.

مثال (٢)

اثبت أن المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ متقاربة.

الحل

نعلم من نظرية المتسلسلات الهندسية أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متقاربة. بما أن

$$\frac{1}{2^n+1} \le \frac{1}{2^n} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

لذلك نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ متقاربة.

مثال (٣)

اختبر المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

الحل

لاحظ أن

$$\frac{1}{2\sqrt{n}-1} \ge \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متسلسلة p - حيث $p = \frac{1}{2}$ ، لذلك فهي متباعدة. ومن ثم فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ أيضا متباعدة. نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ متباعدة.

مثال (٤)

اختبر المتبسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\sin^2 n}{n!}$.

الحل

نعلم أن

$$0 \le \sin^2 n \le 1 \quad \text{لكل} \quad n \ge 0$$

وبالتالي فإن

$$\frac{3\sin^2 n}{n!} \le \frac{3}{n!} \quad \text{لكل} \quad n \ge 0$$

لكن $n! \ge n^2$ لكل $n \ge 4$ ، ولذلك

$$\frac{3\sin^2 n}{n!} \le \frac{3}{n!} \le \frac{3}{n^2} \quad \text{لكل} \quad n \ge 4$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متسلسلة p - حيث $p = 2$ ، لذلك فهي متقاربة ، ومنه فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ وبالتالي فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ أيضا متقاربة. من اختبار المقارنة نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\sin^2 n}{n!}$ متقاربة.

مثال (٥)

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$.

الحل

قد يحاول البعض مقارنة المتسلسلة المعطاة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ، لكن

$$\frac{1}{2^n - 1} \ge \frac{1}{2^n} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

وبالتالي يستحيل تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة المعطاة بمقارنتها بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

لكن، بما أن

$$2^n - 1 \ge 2^n - 2^{n-1}$$

فإن

$$\frac{1}{2^n - 1} \le \frac{1}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

وبما أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ متقاربة، فإننا نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

مثال (٦)

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^3+1}$.

الحل

لاحظ أن $n^3+1>n^3$ و $\ln n<n$ لكل $n\geq 2$، بالتالي فإن $\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^3+1}<\frac{n\sqrt{n}}{n^3}=\frac{1}{n^{3/2}}$،

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ هي متسلسلة - p حيث $p=\frac{3}{2}$ فهي متقاربة. بالتالي المتسلسلة قيد الدراسة متقاربة.

عند تطبيق اختبار المقارنة ، نبحث أولا عن متسلسلة مناسبة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ثم نثبت أن $a_n \leq b_n$ أو $a_n \geq b_n$ لكل n اكبر من أو يساوي عددا صحيحا موجبا k . لكن وبسبب الصيغة الجبرية المعقدة للحد النوني a_n يصعب معه استخدام هذا الإثبات. يعتبر اختبار المقارنة التالي اكثر سهولة، فبعد تحديد $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نحتاج فقط إيجاد نهاية الكسر $\frac{a_n}{b_n}$ عندما $n \to \infty$.

> **(٣-٩-٦) نظرية (اختبار نهاية المقارنة Limit comparison test)**
>
> لتكن $\sum_{1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين موجبتين. عندئذ
>
> (أ) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=L>0$ فإما أن المتسلسلتين كلاهما متقاربتان أو كلاهما متباعدتان.
>
> (ب) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=0$ وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ متقاربة.
>
> (جـ) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\infty$ وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

البرهان

(ا) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=L$ ، فإن هذا يقتضي أنه لكل $0 < \varepsilon$ يوجد عدد N بحيث أن

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-L\right| < \varepsilon \quad \text{لكل } n>N$$

بوضع $\varepsilon = \frac{L}{2}$ ، نحصل على

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \quad \text{لكل} \quad n > N$$

هذا يقتضي أن

$$\frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n \quad \text{لكل} \quad n > N$$

من المتراجحة الأخيرة واختبار المقارنة، نستنتج أن $\sum_1^\infty a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty b_n$ متقاربة. أيضا من نفس المتراجحة واختبار المقارنة نستنتج أن المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n$ متباعدة إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty b_n$ متباعدة.

تترك فقرتي (ب) و(جـ) كتمرين.■

يلزم عند استخدام اختبار نهاية المقارنة إيجاد متسلسلة مناسبة $\sum_{n=1}^\infty b_n$. الطريقة المثلى في حالة كون a_n كسرا هو حذف جميع الحدود من البسط والمقام والإبقاء فقط على الحد ذات الأس الأكبر مع استبدال أي معامل c بالعدد 1 ، ذلك لأن $\sum_{n=1}^\infty cb_n$ و $\sum_{n=1}^\infty b_n$ إما أن كلاهما متقاربتان أو أن كلاهما متباعدتان.

توضيح

a_n	حذف الحدود ذات الأس الأصغر	خيار b_n
$\frac{5n+2}{3n^4+n^3-1}$	$\frac{5n}{3n^4} = \frac{5}{3n^3}$	$\frac{1}{n^3}$
$\frac{9}{\sqrt{5n^3+n^2+3}}$	$\frac{9}{\sqrt{5n^3}} = \frac{9}{\sqrt{5}n^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{1}{n^{1/3}}$
$\frac{\sqrt[3]{n^2+5}}{7n^2+3n-1}$	$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{7n^2} = \frac{n^{3/2}}{7n^2} = \frac{1}{7n^{4/3}}$	$\frac{1}{n^{4/3}}$

مثال (٧)

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3-2}{2^n(3n^3-5n+6)}$.

الحل

بحذف جميع الحدود من البسط والمقام باستثناء الحدود ذات الأس الأكبر، نحصل على

$$\frac{5n^3}{2^n(3n^3)} = \frac{5}{32^n}$$

نختار $b_n = \frac{1}{2^n}$. بتطبيق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-2}{2^n(3n^3-5n+6)} \times \frac{2^n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-2}{3n^3-5n+6} = \frac{5}{3} > 0$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ هي متسلسلة هندسية، من نظرية المتسلسلات الهندسية فهي متقاربة (حيث $r = \frac{1}{2} < 1$). ومنه فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

مثال (٨)

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}}$.

الحل

نكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ كما فعلنا في المثال السابق فنحصل على

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8n^2}} = \frac{1}{2n^{2/3}}$$

نختار $b_n = \frac{1}{n^{2/3}}$، بتطبيق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}} \times \frac{n^{2/3}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}}{\sqrt[3]{8n^2-5n}} = \frac{1}{2} > 0$$

لكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ هي متسلسلة - p حيث $p = \frac{2}{3} < 1$ وبالتالي فهي متباعدة، ومنه فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

مثال (٨)

اختبر تباعد أو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.

الحل

ضمن حل مثال (٤) من هذا الفصل أثبتنا أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ متقاربة. نختار $b_n = \frac{1}{n!}$. بتطبيق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} . \frac{n!}{1} = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$$

هنا لا نستطيع استخدام اختبار نهاية المقارنة فقرة (جـ) لأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة. وبالرغم من ذلك ، نستطيع استخدام اختبار نهاية المقارنة. يمكن كتابة المتسلسلة المعطاة على الشكل

$$\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\frac{5^3}{5!}+\cdots+\frac{n^3}{n!}+\cdots$$

نستطيع من نظرية (٣-٧-٨) حذف عدد منته من حدود المتسلسلة دونما تغيير في تقاربها أو تباعدها. بحذف الحدود الثلاثة الأولى نحصل على

$$\frac{4^3}{4!}+\frac{5^3}{5!}+\frac{6^3}{6!}+\cdots+\frac{n^3}{n!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^3}{(n+3)!}$$

نأخذ $a_n=\dfrac{(n+3)^3}{(n+3)!}$، وكالسابق نأخذ $b_n=\dfrac{1}{n!}$. نطبق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3}{(n+3)!}\times\frac{n!}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3(n!)}{(n+3)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3(n!)}{[(n+3)(n+2)(n+1)](n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2}{(n+2)(n+1)}=1>0$$

ومنه فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

(٣-١٠) تمارين

في التمارين من (١-٣٩) استخدم اختبار التكامل أو اختبار المقارنة أو اختبار نهاية المقارنة لتحديد ما إذا كانت المتسلسلات متقاربة أو متباعدة.

١- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$

٢- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^{3/2}}$

٣- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

٤- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

٥- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$

٦- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$

٧- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

٨- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

٩- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^3-n-1}$

١٠- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n-2)}$

١١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{-n^3}}$

١٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2}}$

١٣- $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3+\cos n}{n^2-4}$

١٤- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$

١٥- $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

١٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$

١٧- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}$

١٨- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^2}$

١٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

٢٠- $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right)$

٢١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+1)^{3/7}}$

٢٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$

٢٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

٢٤- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

٢٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

٢٦- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

٢٧- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$

٢٨- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+n+1}$

٢٩- $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$

٣٠- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$

٣١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n+2^n}{n+5^2}$

٣٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

٣٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3}{(n^3+1)^2}$

٣٤- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+9}$

٣٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$

٣٦- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

٣٧- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

٣٨- $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{(-n^2)}$

٣٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

في التمرينين ٤٠ ، ٤١ أوجد قيم p التي تجعل المتسلسلة متقاربة.

(٤٠) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ (٤١) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$

(٤٢) إذا كانت المتسلسلة الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، فاثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ متقاربة (تلميح: اثبت أن $a_n^2 \le a_n$ لقيم n الكبيرة كبرا كافيا).

(٤٣) إذا كانت المتسلسلتان الموجبتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين فاثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ متقاربة (تلميح: لاحظ أن $b_n \le 1$ لقيم n الكبيرة كبرا كافيا).

(٤٤) يستهلك صاروخ أطلق للفضاء ربع وقوده في المائة ميل الأولى، ويستهلك تسع وقوده في المائة ميل الثانية ، وبشكل عام ، يستهلك $\frac{1}{(n+1)^2}$ من وقوده خلال المائة ميل رقم n . هل يستهلك الصاروخ جميع وقوده. (تلميح: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

(٤٥) اثبت فقرتي (ب) و (جـ) من النظرية (٣-٩-٦)

(٤٦) إذا كانت المتسلسلة الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فاثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ متباعدة.

(٤٧) (ا) استخدم برهان اختبار التكامل ، لإثبات أنه لكل عدد صحيح موجب $n > 1$ فإن

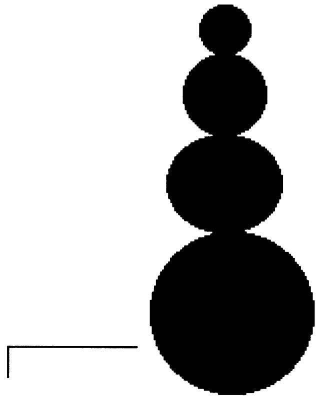
$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$$

(ب) أوجد قيمة تقريبية لعدد الحدود التي يجب جمعها من المتسلسلة التوافقية بحيث أن $s_n > 100$.

(٤٨) الشكل المرافق يوضح المسألة الافتراضية التالية: بدأ شخص بوضع كريات عموديا الواحدة فوق الأخرى، مبتدئا بكرة نصف قطرها 1 قدم ، إذا كان r_k نصف قطر الكرة k ، فإن $r_{n+1} = r_n \sqrt{n/(n+1)}$ لكل عدد صحيح موجب n .

(ا) اثبت أنه يمكن جعل ارتفاع كومة الكريات كبيرا بقدر ما نريد .

(ب) إذا صنعت الكريات من مادة تزن 1 رطلا للقدم المكعب ، فاثبت أن الوزن الكلي لكومة الكريات دائما اصغر من 4π رطلا.



نصف قطر ١ قدم

(٤٩) لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة ومتقاربة، ولتكن f دالة متصلة ومتناقصة لكل $x \geq N$ لعدد صحيح موجب N ، بحيث أن $f(n) = a_n$. اثبت أن مقدار الخطأ في تقريب مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ من مجموع $\sum_{n=1}^{N} a_n$ أصغر من $\int_{N}^{\infty} f(x)dx$.

في التمارين (٥٠-٥٢) استخدم تمرين ٤٩ لتقدير أصغر عدد من الحدود التي يجب جمعها لتقريب مجموع المتسلسلة بخطأ اصغر من قيمة E المعطاة.

(٥٠) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ ؛ $E = 0.001$

(٥١) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$ ؛ $E = 0.01$

(٥٢) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ ؛ $E = 0.01$

ح في التمارين من (٥٣-٥٨) أوجد قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة لأقرب ثلاثة منازل عشرية(استخدم تمرين ٤٩ للتأكد من دقة الإجابة) [الحرف ح في بداية التمرين تعني باستخدام الحاسبة المبرمجة أو الحاسب].

٥٣- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{(-n^2)}$

٥٤- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{(-n^2)}$

٥٥- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$

٥٦- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{1/n}}{n^2}$

٥٧- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$

٥٨- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

ح (٥٩) ارسم ؛ على نفس المحاور؛ منحنى الدالتين $y = x$ و $y = \ln(x^k)$ لكل $k = 1,2,3$ و $1 \leq x \leq 20$. استخدم المنحنيات لاستنتاج ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n)^k}$ متقاربة أو متباعدة لكل $k = 1,2,3$.

(٣-١١)

● اختباري النسبة والجذر

Ratio And Root Tests

نقدم في هذا الفصل اختبارين لتقارب المتسلسلة الموجبة هما اختبار النسبة (Ratio test) واختبار الجذر (Root test). يمتاز هذان الاختباران عن الاختبارات السابقة في أنهما يستخدمان حدود المتسلسلة المعطاة ولا حاجة للبحث عن متسلسلة أخرى أو لاستخدام التكامل المعتل. من هذا المنطلق فإن هذين الاختبارين أيسر في التطبيق من اختباري المقارنة واختبار التكامل ، وبالرغم من عدم الحاجة للمقارنة عند تطبيق هذين الاختبارين إلا أنهما يعتمدان في برهانهما على اختبار المقارنة وعلى المتسلسلة الهندسية.

اختبار النسبة Ratio test

إن اختبار النسبة هو أكثر الاختبارين استخداما .

(٣-١١-١) نظرية (اختبار النسبة)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة ، ولنفرض أن $a_n \neq 0$ لكل n وأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(ا) إذا كان $0 \le L < 1$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) إذا كان $L > 1$ أو $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

(جـ) إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة ام متباعدة. وفي هذه الحالة لا بد من استخدام اختبار آخر.

البرهان

(ا) نفرض أن $0 \le L < 1$ ، وليكن r عددا حقيقيا بحيث أن $0 \le L < r < 1$. بما أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \text{و} \quad L < r$$

فإنه يوجد عدد صحيح N بحيث أنه لكل $n \ge N$ فإن $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$، هذا يعني أن $a_{n+1} < a_n r$.

بوضع $n = N$ نحصل على $a_{N+1} < a_N r$ ، ثم بوضع $n = N + 1$ نحصل على

$$a_{N+2} < a_{N+1} r < (a_N r) r = a_N r^2$$

بشكل عام ، لأي عدد صحيح موجب $m > 0$ نحصل على

$$a_{N+m} < a_{N+m-1} r < a_{N+m-2} r^2 < \cdots < a_{N+1} r^{m-1} < a_N r^m \qquad (١)$$

بما أن $0 < r < 1$ فان المتسلسلة الهندسية $\sum_{m=1}^{\infty} a_N r^m$ متقاربة. من (١) واختبار المقارنة نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty} a_{N+m} = \sum_{m=N+1}^{\infty} a_m$ متقاربة أيضا. بما أن حذف عدد منته من حدود المتسلسلة لا يؤثر على تقاربها، فإننا نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) برهان فقرة (ب) مشابه لبرهان فقرة(ا) ولكن بوضع $L > r > 1$ وعكس جميع المتراجحات في برهان فقرة (ا).

(جـ) نعلم أن المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة وأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة.

بتطبيق اختبار النسبة لكل منهما نحصل على

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ متباعدة و } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ متقاربة و } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \times \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

وبالتالي، يستحيل تطبيق اختبار النسبة لتحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. لذلك لا بد من تطبيق اختبار آخر.

مثال (١)

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

الحل

بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{5^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$$

بالتالي المتسلسلة متقاربة.

مثال (٢)

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}$.

الحل

بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{5^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{(n+1)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2+2n+1} = 5$$

بما أن $5 > 1$، فإن المتسلسلة متباعدة.

مثال (٣)

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

الحل

نطبق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

وبما أن $\frac{1}{e} < 1$، فإن المتسلسلة متقاربة.

اختبار الجذر Root test

يستخدم هذا الاختبار بصفة خاصة عندما يكون a_n مرفوع للأس n .

(٣-١١-٢) نظرية (اختبار الجذر)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة ، نفرض أن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

(ا) إذا كان $0 \le L < 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) إذا كان $L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

(جـ) إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة. وفي هذه الحالة لا بد من استخدام اختبار آخر.

البرهان

(ا) نفرض أن $0 \le L < 1$ ، وليكن r عددا حقيقيا بحيث أن $0 \le L < r < 1$. بما أن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \quad \text{و} \quad L < r$$

فإنه يوجد عدد صحيح N بحيث أنه لكل $n \ge N$ فإن $\sqrt[n]{a_n} < r$، هذا يقتضي أن $a_n < r^n$. بما أن $r < 1$ فإن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ متقاربة ، وبالتالي فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) يبرهن بطريقة مشابهة لفقرة (ا).

(جـ) نعلم أن المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة وأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة.

بتطبيق اختبار الجذر لكل منهما

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة و $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة و

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

إذن، يستحيل تطبيق اختبار الجذر لتحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

لذلك لا بد من تطبيق اختبار آخر.

مثال (٤)

اختبر تباعد أو تقارب المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n$.

الحل

نستخدم في هذا المثال اختبار الجذر، لأن a_n مرفوع للأس n ، فنحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{1000} = \infty$$

وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

مثال (٥)

اختبر المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

الحل

نستطيع تطبيق اختبار النسبة أو الجذر في هذا المثال. بتطبيق اختبار الجذر نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{2} = \frac{1}{2}$$

بما أن $\frac{1}{2} < 1$ فإن المتسلسلة متقاربة.

مثال (٦)

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$.

الحل

يتضمن a_n في تعريفه 2^{n^2}، وبالرغم من ذلك فإن اختبار النسبة أفضل هنا من اختبار الجذر. بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}} \times \frac{2^{n^2}}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0$$

بالتالي المتسلسلة متقاربة.

مثال (٧)

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^{100} e^{-n}$.

الحل

هنا الأفضل تطبيق اختبار الجذر.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{100}}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{100/n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

من اختبار الجذر نجد أن المتسلسلة متقاربة.

ننوه هنا إلى أننا لا نستطيع استنتاج أن المتسلسلة متقاربة أو متباعدة إذا كانت النهاية في اختباري النسبة والجذر غير موجودة (أنظر تمريني (٣٦) و (٣٧)).

نستخلص من الأمثلة الواردة في هذا الفصل ، أنه يفضل تطبيق اختبار النسبة إذا تضمن تعريف المتسلسلة مضروبا أو أسا، كما يفضل تطبيق اختبار الجذر إذا تضمن تعريف المتسلسلة أسا

(ولكن ليس مضروبا) . وهذا واحد من الأسباب التي تجعل اختبار النسبة أكثر تطبيقا من اختبار الجذر.

(٣-١٢) تمارين

في التمارين (١-٣٥) حدد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة. قد تحتاج في بعض التمارين إلى اختبارات خلاف اختباري النسبة والجذر.

١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$

٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!}$

٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{10^n}$

٤- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$

٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$

٦- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n-2)!}$

٧- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n!}{(n!)^2}$

٨- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1.1)^n}{n^7}$

٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1.7}}{(1.7)^n}$

١٠- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+4}$

١١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}+10}{n!}$

١٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{n/2}}$

١٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^3+1}}$

١٤- $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$

١٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2n+5}$

١٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

١٧- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^5}$

١٨- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$

١٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}$

٢٠- $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$

٢١- $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$

٢٢- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

٢٣- $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1/n}$

٢٤- $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{1}{n}$

٢٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(5n+3n^{-1})}$

٢٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$

٢٧- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+e^n}$

٢٨- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{5^{n-1}}$

٢٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n(n^5+2)}{n^2 10^{2n}}$

٣٠- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n!)}{n!(2n)^n}$

٣١- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^n$ (تلميح: $\frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{2}$ لكل $n \ge 2$)

٣٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 1/n!}{\cos 1/n!}$

٣٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$

٣٤- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.5.8\ldots(3n+2)}$

(٣٥) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، حيث

$$a_n = \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ فردي} \\ \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

(٣٦) (ا) ليكن $a_{2n} = \frac{1}{n^2}$ و $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}$ ، اثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ غير موجودة في حين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) أوجد متسلسلة موجبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحيث أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ غير موجودة في حين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

(٣٧) (أ) لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ المتسلسلة في تمرين (٣٥). اثبت أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ غير موجودة في حين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) أوجد متسلسلة موجبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحيث أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ غير موجودة في حين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

(٣-١٣)

● المتسلسلات المترددة والتقارب المطلق

Alternating Series
And Absolute Convergence

تطبق اختبارات التقارب التي قدمت حتى الآن للمتسلسلات الموجبة. ندرس الآن متسلسلات تحتوي حدودا موجبة وحدودا سالبة. أبسط هذه المتسلسلات، المتسلسلات المترددة، التي حدودها تتعاقب بين موجب وسالب.

المتسلسلات المترددة (Alternating series)

المتسلسلة المترددة هي المتسلسلة التي تتعاقب حدودها بين الموجب والسالب. أي المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

أو

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n} a_n + \cdots$$

حيث $a_n > 0$ لكل $n \geq 1$. تزودنا النظرية التالية باختبار تقارب لهذه المتسلسلات.

(٣-١٣-١) نظرية(اختبار المتسلسلات المترددة Alternating series test)

المتسلسلة المترددة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

متقاربة إذا تحقق الشرطان التاليان:

(ا) المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تناقصية ، أي $a_{n+1} \leq a_n$ لكل n

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

البرهان

نثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ متقاربة،وبما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^{n-1} a_n$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$ متقاربة. لتكن $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. نثبت أولا أن المتابعة $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ومتزايدة ، بينما المتتابعة $\{s_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ محدودة ومتناقصة ، ومن نظرية (٣-٩-٥) نستنتج أن المتتابعتين متقاربتان. لاحظ أن

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}) \\ &\quad -(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &= a_{2n+1} - a_{2n} \end{aligned} \qquad (١)$$

لكن من الشرط الأول المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متناقصة ومنه فإن $a_{2n+1} - a_{2n} \geq 0$. وبالتالي فالمتتابعة $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة. أيضا نلاحظ أن

$$s_{2n} = a_1 \overbrace{-a_2 + a_3}^{\leq 0} \overbrace{-a_4 + a_5}^{\leq 0} - \cdots \overbrace{-a_{2n-2} + a_{2n-1}}^{\leq 0} \overbrace{-a_{2n}}^{\leq 0} \qquad (٢)$$

من (١) و (٢) نستنتج أن $s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq a_1$ ، أي أن المتتابعة $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة. بالطريقة ذاتها نثبت أن المتتابعة $\{s_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ محدودة ومتناقصة. من النظرية (٣-٩-٥) نستنتج أن المتتابعتين $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{s_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربتان. نضع

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = d \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = c$$

بما أن

$$\begin{aligned} s_{2n+1} - s_{2n} &= (a_1 - a_2 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1}) - (a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &= a_{2n+1} \end{aligned}$$

وبما إن

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ (الشرط (ا)) ، فإن

$$d - c = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

ومنه فإن $d = c$ ، أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. ونتيجة لذلك فإن $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ موجودة.

وهذا يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. ■

مثال (١)

اثبت أن المتسلسلة المترددة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$ متقاربة.

الحل

نضع $a_n = f(n) = \dfrac{1}{n}$. لتطبيق اختبار المتسلسلات المترددة علينا إثبات

(ا) $a_{n+1} \leq a_n$ لكل n

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

عرضنا في فصل (٣-٥) طرائق مختلفة لإثبات (ا) . نستخدم المشتقة للدالة $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

أي أن الدالة f متناقصة ، ومنه فإن المتتابعة $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ متناقصة. لإثبات (ب) نلاحظ أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، ومنه فإن المتسلسلة متقاربة.

مثال (٢)

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$.

الحل

المتسلسلة مترددة ، نطبق اختبار المتسلسلة المترددة.

(ا) نضع $a_n = f(n) = \frac{(\ln n)^2}{n}$ ، وباستخدام المشتقة نحصل على

$$f'(x) = -\frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x[2 - \ln x]}{x^2}$$

لكن $\frac{\ln x}{x^2} > 0$ لكل $x \geq 2$، كذلك $2 - \ln x < 0$ لكل $x \geq 9$، ومنه فإن المتتابعة $\{(\ln n)^2/n\}_{n=9}^{\infty}$ متناقصة

(ب) باستخدام قاعدة لوبيتال مرتين نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

وبالتالي فالمتسلسلة متقاربة.

مثال (٣)

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\pi/2)^{2n-2}}{(2n-2)!}$.

الحل

المتسلسلة مترددة. نضع $a_n = \frac{(\pi/2)^{2n-2}}{(2n-2)!} > 0$ لكل n . نطبق اختبار المتسلسلة المترددة

(أ) لا نستطيع استخدام المشتقة لإثبات تناقص المتتابعة ، وذلك لعدم إمكانية تعريف دالة في هذا المثال. نثبت أن $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ كما يلي

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\pi/2)^{2n}}{(2n)!} \times \frac{(2n-2)!}{(\pi/2)^{2n-2}} = \frac{(\pi/2)^{2n}}{(2n)(2n-1)} = \frac{\pi^2}{8(2n^2 - n)}$$

لكل $n \geq 2$ فإن

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi^2}{8(2n^2-n)} \leq \frac{\pi^2}{8(2(2^2)-2)} < \frac{1}{2} < 1$$

أي أن المتتابعة $\left\{\frac{(\pi/2)^{2n-2}}{(2n-2)!}\right\}_{n=2}^{\infty}$ متناقصة

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\pi/2)^{2n-2}}{(2n-2)!}$ ، $2n-2=2m$ نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \frac{\pi^{2m}}{(2m)!2^{2m}}$$

لإيجاد هذه النهاية نثبت أن المتسلسلة $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\pi^{2m}}{(2m)!2^{2m}}$ متقاربة. بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{(\pi)^{2m+1}}{(2m+1)!2^{2m+1}} \times \frac{(2m)!2^{2m}}{(\pi)^{2m}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\pi^2}{(2m+2)(2m+1)} = 0 < 1$$

أي أن المتسلسلة متقاربة، ومنه فإن

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\pi^{2m}}{(2m)!2^{2m}} = 0 \,.$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

مثال (٤)

اختبر المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$.

الحل

المتسلسلة مترددة.ولكن شرطي اختبار المتسلسلة المترددة غير متوفرين حيث $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$ ،

ومنه فإن المتسلسلة متباعدة.

يمكن استخدام الحد النوني s_n لمتتابعة المجاميع الجزئية لإيجاد قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة المتقاربة S . يصعب في حالات عديدة تحديد دقة التقريب. تزودنا النظرية التالية بطريقة مبسطة لتحديد مقدار الخطأ في التقريب في حالة المتسلسلات المترددة.

(٣-١٣-٢) نظرية

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ متسلسلة مترددة تحقق الشرطين (ا) و (ب) الواردين في اختبار المتسلسلة المترددة. إذا كان S مجموع المتسلسلة وكان s_n المجموع الجزئي النوني، فإن

$$|S-s_n|\le a_{n+1}$$

أي أن قيمة الخطأ في تقريب S بالمجموع s_n أصغر من أو تساوي a_{n+1} .

البرهان

ليكن S هو مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. المتسلسلة تحقق شروط نظرية (٣-١٣-١)، ومن برهان النظرية نستنتج أن المتتابعة $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة كما أن $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}=S$ ، لذلك

$$S-s_{2n}\ge 0 \qquad (٣)$$

بالمثل المتتابعة $\{s_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ متناقصة كما أن $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}=S$ ، لذلك فإن

$$S-s_{2n}\le s_{2n+1}-s_{2n} \qquad (٤)$$

من (٣) و (٤) نحصل على

$$0\le S-s_{2n}\le s_{2n+1}-s_{2n}=a_{2n+1} \qquad (٥)$$

بطريقة مشابهة نحصل على

$$0\le s_{2n+1}-s\le s_{2n+1}-s_{2n+2}=a_{2n+2} \qquad (٦)$$

من (٥) و (٦) نحصل على النتيجة المطلوبة.■

نستخدم في المثال التالي نظرية (٣-١٣-٢) لإيجاد قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة المترددة.

مثال (٥)

اثبت أن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}+\cdots$$

متقاربة وأوجد قيمة تقريبية لمجموعها بخطأ مقداره أصغر من 0.000005 .

الحل

نطبق اختبار المتسلسلة المترددة ، $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)!}=0$ ، كذلك فإن $a_n>a_{n+1}$ لكل n ، ومنه فإن المتسلسلة متقاربة. من نظرية (٣-١٣-٢) إذا استخدمنا s_n لتقريب مجموع المتسلسلة S ، فان قيمة الخطأ في التقريب أصغر من أو تساوي $a_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)!}$، بحساب عدة قيم للحد a_{n+1} نجد

$$a_4 \approx 0.0001984, a_3 \approx 0.0083333, a_2 \approx 0.1666666, a_1 \approx 1$$
$$a_6 \approx 0.00000003, a_5 \approx 0.0000028$$

وبالتالي عندما $n = 4$ فإن

$$a_5 = \frac{1}{9!} \approx 0.0000028 < 0.000005$$

أي أن المجموع الجزئي s_4 يعطي قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة S بخطأ مقداره أصغر من 0.000005. بما أن

$$s_4 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} \approx 0.841468$$

فإن $S = 0.841468$.

لإيجاد قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة S بخطأ مقداره أصغر من العدد c ، نجد أصغر عدد صحيح موجب n يحقق المتراجحة $a_{n+1} < c$.

التقارب المطلق والتقارب الشرطي

رأينا أن اختبارات التقارب التي درست حتى الآن تطبق لاختبار المتسلسلة الموجبة أو المترددة، أما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ليست من النوعين السابقين فلا نستطيع تطبيق هذه الاختبارات مباشرة. الطريقة الحدسية لدراسة مثل هذه المتسلسلات هي دراسة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ وهي متسلسلة موجبة. نثبت فيما يلي أن تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ يقتضي تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(٣-١٣-٣) نظرية

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة .

البرهان

إذا وضعنا $b_n = a_n + |a_n|$ مع ملاحظة أن $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ ، فإن

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \quad \text{أو} \quad 0 \le b_n \le 2|a_n|$$

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ متقاربة أيضا بالفرض، من اختبار المقارنة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ متقاربة. من نظرية (٣-٧-٦) (جـ) فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - |a_n|$ متقاربة. أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة. ■

مثال (٦)

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$.

الحل

نعلم أن $-1 \le \sin n \le 1$ وبما أن $n^3 > 0$ لكل n وبحساب عدد قليل من حدود المتسلسلة نلاحظ أنها ليست موجبة ولا مترددة. لذلك لا يمكن تطبيق أيا من الاختبارات السابقة مباشرة.

ولاختبار هذه المتسلسلة نختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin n/n^3\right|$. بما أن $\left|\sin n/n^3\right| \le \frac{1}{n^3}$ ، كذلك بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ متقاربة لأنها متسلسلة- p حيث $p = 3$ ، فمن اختبار المقارنة، نجد أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin n/n^3\right|$ متقاربة، ومن نظرية (٣-١٣-٣) فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

تنبيه

من الخطأ الاستنتاج أن تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. كمثال على عدم صحة ذلك في مثال (١) من هذا الفصل أثبتنا أن المتسلسلة المترددة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ متقاربة بينما المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|$ متباعدة. وبناءا عليه، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ قد تكون متقاربة وقد تكون متباعدة.

(٣-١٣-٤) تعريف (التقارب المطلق والتقارب الشرطي)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة

(ا) يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقاربا مطلقا (أو متقاربة مطلقا Converges absolutely)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة.

(ب) يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقاربا شرطيا (أو متقاربة شرطيا Converges conditionally)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة.

طبقا لهذه التسميات فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ متقاربة مطلقا والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ متقاربة شرطيا. بالطبع فإن المتسلسلات الموجبة المتقاربة متقاربة مطلقا. يمكن تصنيف أي متسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ على أنها واحدة فقط من المتسلسلات الثلاثة التالية:

(ا) متقاربة مطلقا (ب) متقاربة شرطيا (جـ) متباعدة.

تعميم اختبارات التقارب

باستخدام نظرية (٣-١٣-٣) واختبارات التقارب للمتسلسلات الموجبة، يمكن الحصول على اختبارات للتقارب لأية متسلسلة سواء كانت موجبة أم غير موجبة.

(٣-١٣-٥) نظرية (تعميم اختبارات التقارب)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة

(ا) **تعميم اختبار المقارنة** . إذا كانت $|a_n| \le |b_n|$ لكل $n \ge 1$ وإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا .

(ب) **تعميم اختبار النهاية للمقارنة**. إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = L > 0$ وإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا .

(جـ) **تعميم اختبار النسبة**. نفرض أن $a_n \ne 0$ لكل $n \ge 1$ وأن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = L$$

(١) إذا كان $0 \le L < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا .

(٢) إذا كان $L > 1$ أو $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة .

(٣) إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أو متباعدة.

(د) **تعميم اختبار الجذر**. لنفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = L$

(١) إذا كان $0 \le L < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا .

(٢) إذا كان $L > 1$ أو $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة .

(٣) إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أو متباعدة.

البرهان

لإثبات الفقرات (ا) و(ب) و (١) من (جـ) و (د) نطبق النظريات (٣-٩-٥) و (٣-٩-٦) و (٣-١١-١) و (٣-١١-٢) على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ثم نستخدم نظرية (٣-١٣-٣)

للحصول على النتيجة. لإثبات الفقرتين (جـ) (٢) و (د) (٢) ، نلاحظ أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ لا تتقارب من الصفر، من نظرية (٣-٧-٥) (ب) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة. ■

مثال (٧)

حدد ما إذا كانت المتسلسلة التالية متقاربة مطلقا أو متقاربة شرطيا أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$$

الحل

بتطبيق اختبار الجذر نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{(-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^2(3^{1/n})}{n^2} = 0 < 1$$

من تعميم اختبار الجذر نستنتج أن المتسلسلة المعطاة متقاربة مطلقا.

مثال (٨)

اثبت أن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

متقاربة مطلقا لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتقاربة شرطيا عندما $x = -1$ ومتباعدة عندما $x = 1$ ولكل x ، حيث $|x| > 1$.

الحل

إذا كان $x = 0$ فإن المتسلسلة متقاربة مطلقا. لنفرض أن $x \neq 0$ ، نطبق اختبار النسبة المعمم نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{x^n}\right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x|$$

لذلك فالمتسلسلة متقاربة مطلقا لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $|x| > 1$. بقي اختبار المتسلسلة عند $x = \pm 1$. نناقش الحالتين كل على انفراد.

١. عند $x = 1$ نحصل على المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ وهي متباعدة.

٢. عند $x = -1$ نحصل على المتسلسلة المترددة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ وهي متقاربة شرطيا.

مثال (٩)

اثبت أن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

متقاربة مطلقا لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتقاربة شرطيا عند $|x| = 1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $|x| > 1$.

الحل

إذا كان $x = 0$ فإن المتسلسلة متقاربة مطلقا. نفرض أن $x \neq 0$، نطبق اختبار النسبة المعمم فنحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1} \times \frac{(-1)^n (2n+1)}{x^{2n+1}}\right|$$

$$= \left|x^2\right| \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \left|x^2\right|$$

لذلك المتسلسلة متقاربة مطلقا لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $|x| > 1$. بقي اختبار المتسلسلة عندما $x = \pm 1$. نناقش الحالتين كل على انفراد.

١. عندما $x = 1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ومن اختبار المتسلسلة المترددة، المتسلسلة متقاربة وباستخدام اختبار التكامل أو اختبار المقارنة نثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ متباعدة .

٢. عندما $x = -1$ نحصل على المتسلسلة المترددة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{2n+1}$ وهي متقاربة . كذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ متباعدة.

لذلك فالمتسلسلة المعطاة متقاربة شرطيا عندما $|x| = 1$.

إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة وكانت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1 \quad \text{أو} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = L < 1$$

فإننا نعلم من تعميم اختبار النسبة والجذر أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة. وهذا يقتضي وفقا لنظرية (٣-٩-٤) أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

نظرا لأهمية هذه النتيجة وللإشارة إليها فيما بعد نصيغها في النتيجة التالية:

(٣-١٣-٦) نتيجة

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة، إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1 \quad \text{أو} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = L < 1$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

مثال (١٠)

اثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ لكل x .

الحل

إذا كان $x = 0$ فإن النهاية تساوي صفرا ، نفرض $x \neq 0$، نضع $a_n = \frac{x^n}{n!}$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1$$

من نتيجة (٣-١٣-٦) نحصل على المطلوب.

ننهي بذلك اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات.

(٣-١٤) تمـــاريـــن

في التمارين (١-١٨) حدد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة.

١- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$

٢- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n^2}$

٣- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{3}{n^2+1}$

٤- $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\ln n}$

٥- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+2}$

٦- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{3^n}{n^2}$

٧- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n}$

٨- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$

٩- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n!}$

١٠- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{e^n}{n}$

١١- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2^n}$

١٢- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n-1}$

١٣- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n^{1/10}}$

١٤- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{3^n}{1+3^n}$

١٥- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$

١٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$

١٧- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \sin\frac{\pi}{n}$

١٨- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\ln n}$

في التمارين (١٩-٤١) حدد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة مطلقا أو متقاربة شرطيا أو متباعدة.

١٩- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{3n+4}$

٢٠- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^n}{n!}$

٢١- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^{1/n}}$

٢٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-5)^n}$

٢٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$

٢٤- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln n}$

٢٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+4}}$

٢٦- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^{2/3}}$

٢٧- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$

٢٨- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{6}\pi n}{n^2}$

٢٩- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$

٣٠- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\frac{1}{n}$

٣١- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan n}{n^2}$

٣٢- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{1/n}}{n!}$

٣٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(-5)^n}$

٣٤- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^4}{e^n}$

٣٥- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$

٣٦- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+4^n}{1+3^n}$

٣٧- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$

٣٨- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{(\ln n)^n}$

٣٩- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

٤٠- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{(\ln n)^{1/n}}$

٤١- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.5.8\ldots(3n+2)}$

في التمارين من (٤٢-٤٧) استخدم نظرية (٣-١١-٢) لإيجاد الحد العلوي في مقدار الخطأ في مجموع الأربعة حدود الأولى كتقريب لمجموع المتسلسلة.

٤٢- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ٤٣- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^2}$

٤٤- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ ٤٥- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n+4}}$

٤٦- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)^2}$ ٤٧- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$

في التمارين من (٤٨-٥٣) أوجد قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة بخطأ مقداره أقل من 0.01

٤٨- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3}$	٤٩- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{8}{10^n+1}$
٥٠- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)^3}$	٥١- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n}$
٥٢- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}$	٥٣- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$

في التمارين من (٥٤-٥٨) أوجد قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة بخطأ مقداره أقل من .0.0005

٥٤- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!}$ ٥٥- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{5^n}$

٥٦- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^5}$ ٥٧- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^2}$

٥٨- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$

في التمرينين ٥٩ و ٦٠ اثبت أن المتسلسلة المترددة متقاربة لكل عدد صحيح موجب k .

٥٩- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(\ln n)^k}{n}$ ٦٠- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{n}}$

في التمارين من (٦١-٦٦) استخدم نتيجة (٣-١١-١) للتحقق من صحة النهايات المعطاة.

٦١- $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$ ٦٢- $\lim_{n\to\infty}\frac{n!x^n}{n^n}=0$ لكل $|x|<e$

٦٣- $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=0$ ٦٤- $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{n}=0$ لكل $|x|<1$

٦٥- $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{2^n}=0$ لكل $|x|<2$ ٦٦- $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{n^n}=0$ لكل x

(٦٧) اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}x^n$ متقاربة لكل x ، حيث $|x| < e$.

(٦٨) افرض أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وليست بالضرورة موجبة. أورد مثالا لمتسلسلة تثبت به أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ليست بالضرورة متقاربة (تلميح: اختار $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة مترددة تتقارب حدودها من الصفر ببطء شديد).

(٦٩) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا. فهل من الضرورة أن تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ متقاربة مطلقا ؟ وضح إجابتك.

(٧٠) ليكن $L \neq 0$ ، ولنفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ وأن $a_n \neq 0$ لكل n . اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1} - a_n|$ متقاربة إذ وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|$ متقاربة.

ملخص لاختبارات التقارب

اسم الاختبار	نص الاختبار	ملاحظات
اختبار الحد النوني	إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.	يستخدم لإثبات التباعد وليس التقارب.
اختبار التكامل	إذا كانت f دالة متصلة ومتناقصة وموجبة لكل $x \geq 1$ بحيث $f(n) = a_n$ لكل $n \geq 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان التكامل المعتل $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ متقارب.	يستخدم إذا أمكن تعريف دالة سهلة التكامل.
اختبار المقارنة	إذا كانت $\lvert a_n \rvert \leq \lvert b_n \rvert$ لكل $n \geq 1$ وإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert b_n \rvert$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا . إذا كان $a_n \geq b_n > 0$ لكل $n \geq 1$ وإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة. إذا كان $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$ وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ معلوم تقاربها أو تباعدها مسبقا.

	متباعدة.	
اختبار نهاية المقارنة	إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \lvert a_n/b_n \rvert = L > 0$ وإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert b_n \rvert$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا .	المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ معلوم تقاربها أو تباعدها مسبقا.
اختبار النسبة	نفرض أن $a_n \neq 0$ لكل $n \geq 1$ وأن $\lim_{n\to\infty} \lvert a_n/b_n \rvert = L$. إذا كان $L < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا ، وإذا كان $L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \lvert a_n/b_n \rvert = \infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة .	يستخدم إذا تضمن تعريف المتسلسلة مضروبا أو قوى لـ n . يفشل الاختبار إذا كان $L = 1$.
اختبار الجذر	نفرض أن $\lim_{n\to\infty} \lvert \sqrt[n]{a_n} \rvert = L$ ، إذا كان $L < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا . وإذا كان $L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \lvert \sqrt[n]{a_n} \rvert = \infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة .	يستخدم إذا كانت حدود المتسلسلة مرفوعة لقوى n . يفشل الاختبار إذا كان $L = 1$.
اختبار المتسلسلة المترددة	إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجبة ومتناقصة وإذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ متقاربتان.	يستخدم للمتسلسلات المترددة فقط.
$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.	يستخدم للمتسلسلات التي تتضمن حدودا موجبة وسالبة

المصطلحات

المتتابعة

المتتابعة المتقاربة؛ المتتابعة المتباعدة

المتتابعة المتزايدة؛ المتتابعة المتناقصة

المتتابعة المحدودة

المتسلسلات؛ مجموع المتسلسلة؛ المتسلسلة المتقاربة؛ المتسلسلة المتباعدة

المجموع الجزئي

المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الموجبة

متسلسلة $-\ p$

المتسلسلة المترددة

التقارب المطلق؛ التقارب الشرطي

تمارين عامة

في التمارين من (١-٩) أوجد النهاية إن وجدت.

١- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{e}{n}\right)^n$

٢- $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(2k)!}{2^k k^k}$

٣- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3n^2}{4+2n^3}$

٤- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}$

٥- $\lim\limits_{n\to\infty}(2+(-1)^n)$

٦- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{\sqrt{n}+4}-\dfrac{n}{\sqrt{n}+9}\right)$

٧- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n^2+1)}{n}$

٨- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

٩- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+(-2)^n\right)$

في التمارين من (١٠-٣٣) إذا كانت المتسلسلة موجبة فحدد ما إذا كانت متقاربة أو متباعدة؛ وإذا كانت تتضمن حدودا موجبة وسالبة حدد ما إذا كانت متقاربة مطلقا ؛ متقاربة شرطيا أو متباعدة.

١٠- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+3)^2}{(n+1)^3}$

١١- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2+(\frac{1}{2})^n}$

١٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+n\sqrt{n})}$

١٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

١٤- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{n5^{n-1}}$

١٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$

١٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^4}{n}$

١٧- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^n$

١٨- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-3}$

١٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\ln(n+1)}$

٢٠- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^2+3}$

٢١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+1}$

٢٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{5\pi}{3} n}{n^{5\pi/3}}$

٢٣- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n^2(\ln n)^2}$

٢٤- $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(0.9)^n}{\ln n}$

٢٥- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^2}$

٢٦- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^e}$

٢٧- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n-1}}{n^2-1}$

٢٨- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$

٢٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{(2n-1)!}$

٣٠- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$

٣١- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{\sqrt{1+n^2}}$

٣٢- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^2+9}$

٣٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{5}{\sqrt{n}}\right)$

(٣٤) اكتب العدد العشري $2.1318318318\cdots$ على شكل كسر اعتيادي.

(٣٥) إذا علمت أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

فأوجد مجموع المتسلسلة

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(٣٦) اثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = 1$

(٣٧) هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}\right)$ متقاربة.

(٣٨) اثبت أن

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{1-x}$$ لكل x ، حيث $|x|<1$

(٣٩) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعتين متقاربتين بحيث أن $a_n \le b_n$ لكل n . اثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

(٤٠) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فاثبت أن

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

(٤١) إذا كان المجموع الجزئي النوني لمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يعطى بـــ $s_n = 2-\frac{2}{n}$ لكل عدد صحيح موجب n .

(ا) فأوجد $\sum_{n=1}^{25} a_n$.

(ب) حدد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة، وأوجد مجموعها إذا كانت متقاربة.

(جـــ) أوجد $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(د) أوجد صيغة جبرية للحد العام a_n بدلالة n .

في التمرينين ٤٢ و٤٣ أوجد قيمة تقريبية للمتسلسلة بخطأ مقداره أصغر من 0.000005 .

٤٢- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)!}$ ٤٣- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2(n^2+1)}$

في التمرينين ٤٤ و ٤٥ باستخدام التكامل $\int_N^{\infty} f(x)$ ، أوجد قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة بخطأ مقداره أقل من 0.00005 .

٤٤- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n-1)^2}$ ٤٥- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n^2}$