الباب الثاني

• التكاملات المتعددة

MULTIPLE INTEGRALS

• مقدمة • التكامل الثنائي • حساب التكاملات الثنائيـــة • المـــساحات والحجـــوم
• الاحداثيات القطبية • التكامل الثلاثي • الاحـــداثيات الاســـطوانية والكرويـــة
• العزم ومركز الثقل • المساحة السطحية • التحويلات العامة للتكامل المتعدد

(٢-١)

● مقدمة

إن الحافز وراء تعريف التكامل $\int_a^b f(x)dx$ لدالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$ كان مفهوم المساحة. سنقوم في هذا الباب بتعريف التكامل لدالة في متغيرين ودالة في ثلاث متغيرات. سيمكننا ذلك من حساب مساحة مناطق أكثر تعقيدا، حجم العديد من المجسمات، كذلك الكتلة ومركز الثقل. نعرف في الفصل الثاني التكامل الثنائي لدالة معرفة على منطقة مستوية معينة. في الفصل الثالث نتناول حساب التكامل الثنائي مع الأخذ بالاعتبار تغيير الترتيب في بعض الاحيان. وكتطبيق على هذا التكامل نتعرض إلى المساحات والحجوم في الفصل الخامس. هناك العديد من التكاملات الثنائية والتي لا يمكن حسابها كتكاملات بالاحداثيات الكارتيزية وبأي ترتيب، كما وأن البعض منها حتى وإن استطعنا حسابه بهذه الاحداثيات سيكون الأمر معقدا، ندخل في الفصل السابع مفهوم الاحداثيات القطبية والتكامل الثنائي بهذه الاحداثيات والتي ستمكننا من حساب العديد من التكاملات الثنائية بطريقة ميسرة. اما في الفصل التاسع فنتناول التكامل الثلاثي ولتبسيط هذه العلاقات نعرف الاحداثيات الاسطوانية والكروية في الفصل الحادي عشر وكتطبيق على التكامل الثلاثي ندرس العزم ومركز الثقل والمساحة السطحية في الفصل الثالث عشر. وأخيراً في الفصل الخامس عشر نتناول التحويلات العامة للتكامل المتعددة وذلك للتبسيط. ونختتم هذا الباب بتمارين عامة. نظرا لأن براهين النظريات في هذا الباب معقدة فقد تم حذفها.

(٢-٢)

• التكامل الثنائي
Double Integral

عند تعريف التكامل المحدود لدالة f في متغير واحد x معرفة على فترة مغلقة $[a,b]$ نتبع ما يلي:

(أ) نحدث تجزئة $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ للفترة $[a,b]$ بحيث إن $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$.

(ب) نعرف $\|P\|$ بأنه طول أكبر فترة $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ لكل $k=1,2,\ldots,n$، من فترات التجزئة $[x_{k-1},x_k]$.

(ج) نختار نقطة $w_k\in[x_k,x_{k+1}]$، $k=1,\ldots,n$. ثم نكون مجموع ريمان للتجزئة P

$$R_P=\sum_{k=1}^{n}f(w_k)\,\Delta x_k$$

(د) نجد $\lim\limits_{\|P\|\to 0}R_P$، إذا كانت النهاية موجودة ووحيدة لأي تجزئة P ولأي w_k فإننا نقول أن f قابلة للتكامل على $[a,b]$ ونكتب

$$\lim_{\|P\|\to 0}R_P=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(w_k)\,\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

سنطلق على هذا بالتكامل الأحادي.

الوضع لا يختلف كثيرا في حالة دالة في متغيرين. لتكن f دالة في متغيرين x,y معرفة على منطقة مغلقة ومحدودة R في المستوى xy - . وليكن W مستطيل يحتوي المنطقة R ، لتعريف التكامل الثنائي المحدود للدالة f نتبع مايلي:

(أ) نحدث تجزئة للمنطقة R وذلك برسم موازيات للمحاور الاحداثية، فتنقسم R إلى مستطيلات جزئية نختار التجزئة $P=\{R_1,R_2,\ldots,R_n\}$ التي تتكون من المستطيلات التي تقع بكاملها داخل R. كما هو موضح بالشكل (٢-١).

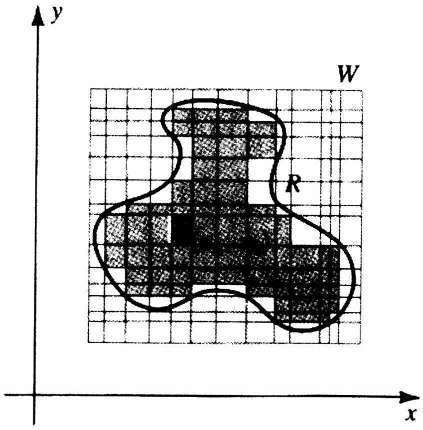
(ب) نعرف $\|P\|$ بأنه طول أكبر قطر من أقطار مستطيلات الجزئة.

(ج) نختار نقطة $(u_k,v_k)\in R_K$ لكل $k=1,2,\ldots,n$. ثم نكون مجموع ريمان للتجزئة P

$$R_P=\sum_{k=1}^{n}f(u_k,v_k)\,\Delta A_k$$

حيث ΔA_k مساحة المستطيل R_k.

(د) نحسب $\lim\limits_{\|P\|\to 0}R_P$.



الشكل (٢-١)

يمكن تعريف التكامل الثنائي للدالة f كما يلي.

(٢-٢-١) تعريف

لتكن f دالة في متغيرن معرفة على المنطقة R نعرف التكامل الثنائي للدالة f على المنطقة R ، ونرمز له بالرمز $\iint_R f(x,y)dA$ ، بأنه

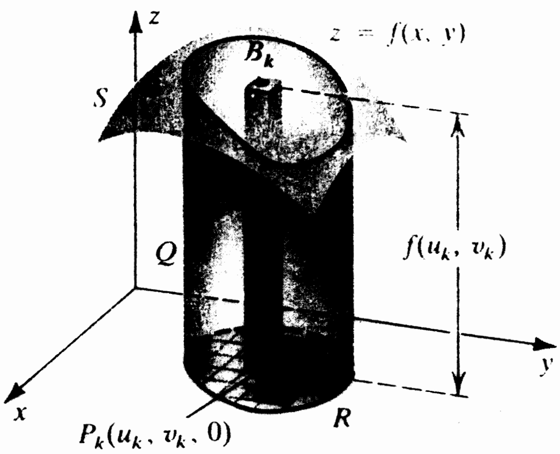
$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(u_k, v_k)\,\Delta A_k = \iint_R f(x,y)dA \qquad (1)$$

شريطة أن النهاية موجودة ووحيدة لأي تجزئة P ولأي $(u_k , v_k) \in R_K$.

إذا كان التكامل الثنائي للدالة f موجودا، فإنه يقال أن الدالة f قابلة للتكامل عل R .

يمكن البرهنة على أنه إذا كانت الدالة f متصلة على المنطقة R ، فإنها قابلة للتكامل على R .

التفسير الهندسي التالي يوضح مفهوم التكامل الثنائي ومجموع ريمان في حالة أن الدالة f متصلة و $f(x,y) \ge 0$ على R . ليكن S سطح الدالة f ، وليكن Q الجسم الواقع تحت السطح S وفوق R ، كما هو موضح بالشكل (٢-٢). إذا كانت $P_k(u_k,v_k,0)$ نقطة في المستطيل R_k من التجزئة P للمنطقة R ، فإن $f(u_k , v_k)$ تمثل المسافة من المستوى — xy إلى النقطة B_k على السطح S والواقعة مباشرة فوق P_k . بالتالي فإن حاصل الضرب $f(u_k , v_k)\,\Delta A_k$ يمثل حجم الموشور الذي مساحة قاعدته المستطيلة الشكل ΔA_k والموضحة بالشكل (٢-٢). مجموع



الشكل (٢-٢)

حجوم المواشير هو تقريب للحجم V للمجسم Q. بالتأكيد، هذا التقريب يتحسن كلما اقترب $\|P\|$ من الصفر. نعرف V كنهاية لمجموع الأعداد $f(u_k, v_k)\Delta A_k$. بتطبيق تعريف (٢-٢-١) نحصل على التالي.

(٢-٢-٢) تعريف

إذا كانت f دالة متصلة في متغيرين بحيث إن $f(x,y) \geq 0$ لكل (x,y) في المنطقة R. فإن الحجم V للمجسم الواقع تحت سطح الدالة $z = f(x,y)$ وفوق المنطقة R، هو $V = \iint_R f(x,y)dA$.

إذا كانت $f(x,y) \leq 0$ على R، فإن التكامل الثنائي للدالة f يساوي سالب حجم المجسم فوق السطح S وتحت المنطقة R.

في النظرية التالية نسرد، دون برهان، بعض خواص التكامل الثنائي.

(٢-٢-٣) نظرية (خواص التكامل الثنائي)

لتكن f و g دالتين في متغيرين x,y قابلتين للتكامل على منطقة مستوية R مغلقة ومحدودة، عندئذٍ.

(١) $\iint_R cf(x,y)\, dA = c \iint_R f(x,y)\, dA$ ، حيث $c \in R$

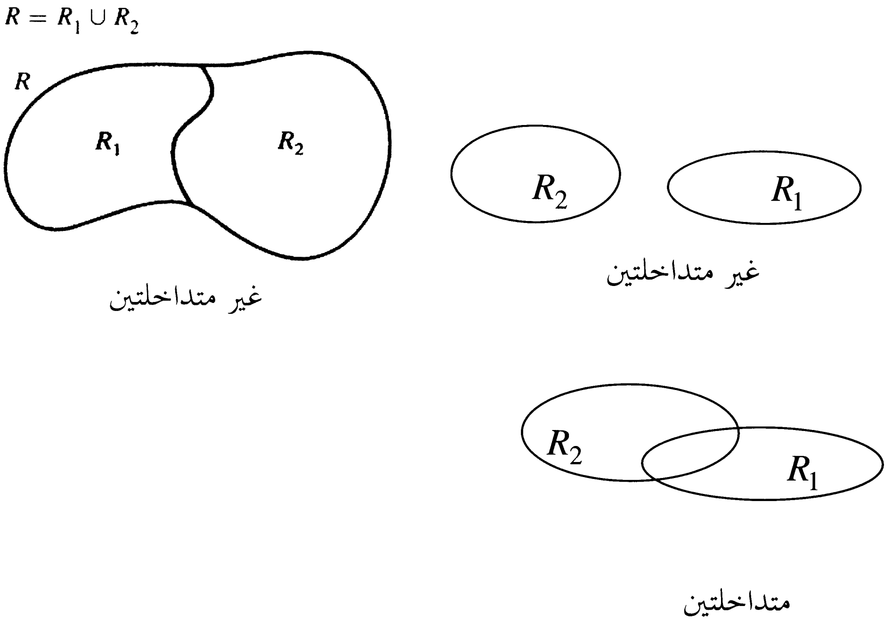
(٢) $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA \pm \iint_R g(x,y)\, dA$

(٣) إذا كانت R هي اتحاد منطقتين R_1 ، R_2 غير متداخلتين كما في شكل (٢-٣) فإن

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$

(٤) إذا كانت $f(x,y) \geq 0$ لكل $(x,y) \in R$ فإن $\iint_R f(x,y)\, dA \geq 0$

إن المصطلح غير متداخلتين الوارد في (٣) يعني أن المنطقتين قد تشتركان على الأكثر بنقاط حد. كما يتضح من الشكل (٢-٣)



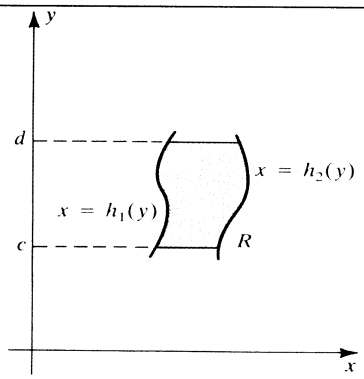
الشكل (٢-٣)

ستقتصر دراستنا للتكامل الثنائي على المنطقتين المستويتين التاليتين أو على اتحاد عدد منته من كل منهما أو اتحاد عدد منته من كليهما.

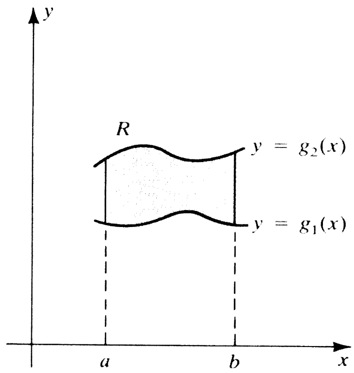
(٢-٢-٤) تعريف

(أ) نعرف المنطقة المستوية R_x بأنها المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين المعرفتين والمتصلتين $y=g_1(x)$ و $y=g_2(x)$ على الفترة المغلقة $[a,b]$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$، بحيث أن $g_2(x) \geq g_1(x)$ لكل $a \leq x \leq b$. كما هو موضح بالشكل (٢-٤) (ا).

(ب) نعرف المنطقة المستوية R_y بأنها المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين $x=h_1(x)$ و $x=h_2(y)$ المعرفتين والمتصلتين على الفترة المغلقة $[c,d]$ والمستقيمين $y=c$ و $y=d$، بحيث أن $h_2(y) \geq h_1(y)$ لكل $c \leq y \leq d$. كما هو موضح بالشكل (٢-٤) (ب).



الشكل (٢-٤) (ب)



الشكل (٢-٤) (أ)

ملاحظة

إذا كانت R منطقة مغلقة ومحدودة في المستوى xy ، وكانت f دالة متصلة على R وإذا كانت R اتحاد لعدد منته $R_1 ,\ldots, R_K$ من المناطق من النوع R_x أو R_y غير المتداخلة أو خليط منهما فإن الخاصية (٣) في تعريف (٢-٢-٣) يمكن تعميمها على النحو:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA + \cdots + \iint_{R_K} f(x,y)dA$$

(٢-٣)

● حساب التكاملات الثنائية

Evaluation Of Double Integrals

إن حساب التكاملات الثنائية لدوال غير بسيطة باستخدام مجموع ريمان إن لم يكن مستحيلا، فإنه من الصعوبة بمكان يجعلنا نتطلع إلى طرق أخرى. زودتنا النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل بطريقة لإيجاد التكامل المحدود الإحادي وذلك بإيجاد دالة أصلية (أو تكامل غير محدود) للدالة المكاملة. هناك طريقة مشابهة لحساب التكامل الثنائي والتي تتلخص بحساب تكاملات أحادية متعاقبة. نبدأ أولا بحساب التكامل الثنائي على مستطيل مغلق.

لتكن f دالة معرفة ومتصلة على المستطيل المغلق

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \le x \le b \ , c \ \le y \le d \ \right\}$$

إن الرمز $\int_c^d f(x,y)\ dy$ يعني أن x ثابت وأن y هو متغير التكامل. لذلك نقول أحيانا أن هذا التكامل هو التكامل الجزئي بالنسبة للمتغير y . لكل x في الفترة $[a,b]$ توجد قيمة وحيدة للتكامل $\int_c^d f(x,y)\ dy$. بالتالي فإن هذا يحدد دالة $A(x)$ تعطى بالعلاقة

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\ dy$$

يمكن البرهنة على أن $A(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، وبالتالي فهي قابلة للتكامل على الفترة، أي أن

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

بالمثل فإن التكامل الجزئي $\int_a^b f(x,y)\ dx$ يحدد دالة $B(y) = \int_a^b f(x,y)\ dx$ $B(y)$ متصلة على الفترة $[c,d]$ وبالتالي فهي قابلة للتكامل على الفترة، أي أن

$$\int_c^d B(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

هذا يقودنا للتعريف التالي.

(٢-٣-١) تعريف

$$\text{(i)}\ \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

$$\text{(ii)}\ \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

يسمى التكامل في الطرف الأيمن في (i) و (ii) بالتكامل المتعاقب.

لاحظ أن (i) تعني أننا نجد التكامل أولا بالنسبة للمتغير y ، ثم نعوض بحدود هذا التكامل ثم نجد التكامل بالنسبة للمتغير x ثم نعوض بحدود هذا التكامل. بالمثل (ii) تعني أننا نكامل بالنسبة إلى y ثم نعوض عن حدود تكاملها ثم نكامل بالنسبة إلى x ثم نعوض عن حدود تكاملها.

مثال (١)

أحسب التكامل

$$\mathrm{I} = \int_1^2 \int_{-1}^1 (2y+4y^2x)dx\ dy$$

الحل

من الملاحظ أن المنطقة المراد التكامل عليها هي

$$R=\{\ (x,y):\ -1\le x\le 1\ ,\ 1\le y\le 2\ \}$$

من تعريف (٢-٣-١) (ii) فإن

$$\int_1^2 \int_{-1}^1 (2y+4y^2x)dx\ dy = \int_1^2\left(\int_{-1}^1 (2y+4y^2x)dx\ \right)dy$$

$$\int_1^2(\left(2yx+2y^2x^2\right]_{-1}^1)\ dy = \int_1^2[(2y+2y^2)-(-2y+2y^2)]dy$$

$$= \int_1^2 4y dy = \left(2y^2\right]_1^2 = 6$$

مثال (٢)

أحسب التكامل $\mathrm{I} = \int_{-1}^1 \int_1^2 (2y+4y^2x)dx\ dy$

الحل

هذا التكامل هو نفسه التكامل في مثال (١) ولكننا عكسنا ترتيب التكامل، وبإجراء التكامل نجد

$$I=6$$

وهذا يعني أن قيمة التكامل هي نفسها بغض النظر عن ترتيب التكامل. وهذا صحيح بشكل عام.

إن تعريفنا للتكامل المتعاقب والذي أوردناه في تعريف (٢-٢-١) لا يقتصر على المستطيل. فيما يلي نورد تعريف التكامل المتعاقب لدالة f معرفة ومتصلة على إحدى المنطقتين R_x و R_y كما في تعريف (٢-٣).

(٢-٣-٢) تعريف

$$\text{(i)} \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b [\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy]dx$$

$$\text{(ii)} \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d [\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx]dy$$

كما سبق وأوضحنا إن (i) تعني أننا نجد التكامل أولا بالنسبة للمتغير y ، ثم نعوض بحدود هذا التكامل ثم نجد التكامل بالنسبة للمتغير x ثم نعوض بحدود هذا التكامل. بالمثل (ii) تعني أننا نكامل بالنسبة إلى y ثم نعوض عن حدود تكاملها ثم نكامل بالنسبة إلى x ثم نعوض عن حدود تكاملها.

مثال (٣)

أحسب التكامل $\int_0^1 \int_x^{2x} (2x+3y^2)dydx$

الحل

$$\int_0^1 \int_x^{2x} (6x+3y^2)dydx = \int_0^1 [\int_x^{2x} (6x+3y^2)dy]dx = \int_0^1 6xy + y^3 \Big|_x^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 [(12x^2+8x^3)-(6x^2+x^3)]dx$$

$$= \int_0^1 (6x^2+7x^3)dx = 2x^3 + \frac{7}{4}x^4 \Big|_0^1 = 2+\frac{7}{4} = 3\frac{3}{4}$$

مثال (٤)

أحسب التكامل $I = \int_0^{\pi/2} \int_0^y 2x\sin y^3 dxdy$

الحل

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^y (2x\sin y^3)dxdy = \int_0^{\pi/2} [\int_0^y (2x\sin y^3)dx]dy = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin y^3 \Big|_0^y dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} (y^2 \sin y^3)dy = \frac{-1}{3}\cos y^3 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{-1}{3}(\cos(\frac{\pi}{2})^3 - 1)$$

يمكن استخدام التكامل المتعاقب في تعريف (٢-٢-٣) في حساب التكامل الثنائي في تعريف (٢-١-١)، كما توضح ذلك النظرية التالية.

(٢-٣-٣) نظرية

(أ) لتكن $z = f(x,y)$ دالة معرفة ومتصلة على المنطقة $R = R_x$، فإن

$$\text{(i)}\ \iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

(ب) لتكن $z = f\left(x,y\right)$ دالة معرفة ومتصلة على المنطقة $R = R_y$، فإن

$$\text{(ii)}\ \iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

مثال (٥)

احسب التكامل $\mathrm{I} = \iint_R f(x,y)\ dA$

حيث $f(x,y) = 3x + 2y$ ، وَ $R = \left\{ (x,y)\ :\ -1 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le x+1 \right\}$

الحل

$$\mathrm{I} = \iint_R (3x+2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^3}^{x+1} (3x+2y)\,dydx = \int_{-1}^{1} 3xy + y^2\Big|_{x^3}^{x+1}$$

$$= \int_{-1}^{1} \{[3x(x+1) + (x+1)^2] - [3x^4 + x^6]\}$$

$$= 2\int_0^1 (4x^2 + 5x - 3x^4 - x^6 + 1)\ dx = \frac{859}{105}$$

مثال (٦)

احسب التكامل $\mathrm{I}\ = \iint_R f(x,y)\ dA$

حيث إن $f(x,y) = x^3 + 4y$ ، وَ R المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين $\mathrm{y} = 2x$ ، $y = x^2$.

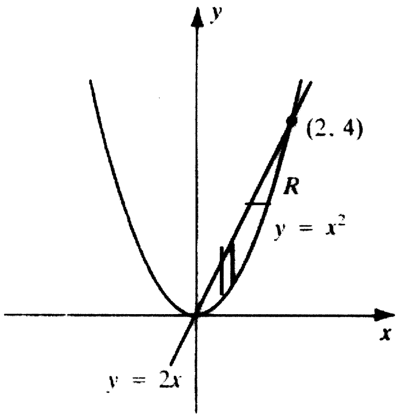
الحل

أولاً: نجد نقاط التقاطع للمنحنيين وذلك بحل معادلتي المنحنيين، أي

$$x^2 = 2x$$

ومنه فإن $x = 2$ وَ $x = 0$

أي أن نقطتي التقاطع هما $(0,0)$ وَ $(2,4)$ كما هو موضح في الشكل (٢-٥)



الشكل (٢-٥)

نرسم شريحة إما رأسية أو أفقية داخل المنطقة، وهنا رسمنا شريحة رأسية. إن حركة الشريحة في المنطقة تحدد حدود التكامل الأول والحركة داخل الشريحة تحدد حدود التكامل الثاني. وبالتالي فإن

$0 \le x \le 2$ ، $x^2 \le y \le 2x$

ومنه فإن

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_R f(x,y)\,dA \\
&= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^3+4y)dy\right) dx \;=\; \int_0^2 [x^3y+2y^2]_{x^2}^{2x}\, dx \\
&= \int_0^2 [(2x^4+8x^2)-(x^5+2x^4)]\, dx \;=\; \int_0^2 (8x^2-x^5)\, dx \\
&= \left[\frac{8}{3}x^3-\frac{x^6}{6}\right]_0^2 \;=\; \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

مثال (٧)

احسب التكامل $I = \iint_R f(x,y)\,dA$

حيث R هي المنطقة المستوية والمعرفة في المثال (٦) وأن $f(x,y) = x^3 + 4y$.

الحل

لدينا تماماً نفس المثال (٦) ، لكن هنا نأخذ شريحة أفقية بدلا من شريحة رأسية فنجد إن

$$\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}\,,\, 0 \le y \le 4$$

وبالتالي

$$I = \int_0^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^3+4y)\, dx\right)dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^4}{4} + 4xy \right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left[\left(\frac{1}{4} y^2 + 4y^{3/2} \right) - \left(\frac{y^4}{4} \cdot \frac{1}{16} + 2y^2 \right) \right] dy$$

$$= \int_0^4 \left(-\frac{7}{4} y^2 + 4y^{3/2} - \frac{1}{64} y^4 \right) dy$$

$$= \left[-\frac{7}{4} \cdot \frac{y^3}{3} + 4\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{64} y^5 \right]_0^4$$

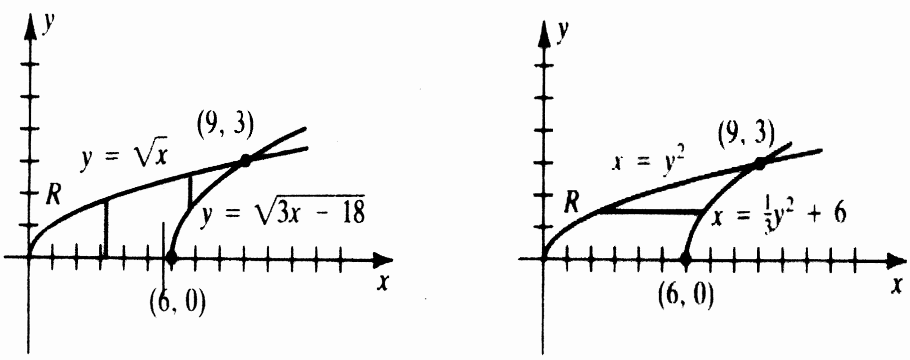
$$= \frac{-112}{3} + \frac{256}{5} - \frac{16}{5} = \frac{-112}{3} + 48 = \frac{32}{3}$$

مثال (٨)

إذا كانت f دالة متصلة على المنطقة المستوية R المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x}$ ، $y = 0$ و $y = \sqrt{3x - 18}$ أكتب $\iint\limits_R f(x, y) dA$ كتكامل متعاقب.

الحل

الطريقة الأولى : نأخذ شريحة أفقية، وهنا نلاحظ أنه أثناء حركة الشريحة من بداية المنطقة إلى نهايتها فإن بداية ونهاية الشريحة تبقى على نفس المنحنيين، وهذا يعني أن لا تجزئة للمنطقة. كما في شكل (٢-٦) .



الشكل (٢-٦)

نجد نقاط تقاطع المنحنيين وذلك بحل المعادلتين $y=\sqrt{3x-18}$ وَ $y=\sqrt{x}$.
أي أن

$$\sqrt{3x-18}=\sqrt{x}$$

بتربيع الطرفين نحصل على

$$3x-18=x$$

ومنه

$$x=9 \text{ ، بالتالي فإن } y=3$$

كما أن $x=\dfrac{y^2+18}{3}$ ، $x=y^2$. من حركة الشريحة في اتجاه محور ــ y ةالحركة داخل الشريحة في اتجاه محور ــ x ، وبالتالي يكون

$$0\le y\le 3 \text{ و } y^2\le x\le \frac{y^2+18}{3}$$

ومنه فإن

$$\mathrm{I} = \iint\limits_R f(x,y)\,dA=\int_0^3 \Big(\int_{y^2}^{\frac{y^2+18}{3}} f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$

الطريقة الثانية : نأخذ شريحة رأسية، نجد أنه أثناء حركة الشريحة من بداية المنطقة إلى نهايتها فإن على الأقل أحد نهايتيها تصبح على منحنى مختلف، هذا يعني أننا علينا تجزئة المنطقة عند الخط الفاصل في تغير نهايتي الشريحة إلى منطقتين R_1 ، R_2. بالمثل من حركة الشريحة والحركة داخل الشريحة فإن $0\le x\le 6\,,0\le y\le\sqrt{x}$ على R_1 وأن $6\le x\le 9\,,\sqrt{3x-18}\le y\le\sqrt{x}$ على R_2
وبالتالي فإن :

$$\mathrm{I} = \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA+\iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA$$

$$= \int_0^6 \Big(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\Big)\,dx+\int_6^9 \Big(\int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\Big)\,dx$$

من الملاحظ أن أخذ شريحة أفقية في هذا المثال أفضل من الشريحة الرأسية.

(٢-٣-٤) **تغير ترتيب التكامل المتعاقب** : كما رأينا فإن التكامل $\iint\limits_R f(x,y)dA$ يمكن حسابه بإحدى التكاملين المتعاقبين $\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$ أو $\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$. ولكن أي من التكاملين نستخدم، هذا يعتمد على الدالة المكاملة وقد يعتمد أيضا على حدود التكامل والمنطقة المراد

حساب التكامل عليها. على سبيل المثال فإن التكامل $\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}dydx$ بسبب الدالة المكاملة، بينما التكامل $\int_0^1\int_0^{x^2} e^y dydx$ لا يمكن حسابه بسبب حدود التكامل. هل هذا يعني أن مثل هذه التكاملات لا يمكن حسابها. الإجابة بالنفي فقد نستطيع حساب بعض هذه التكاملات إذا ما كتبت بطريقة ثانية مكافئة. فإذا ما كتبنا التكامل الأول على الصورة المكافئة $\int_0^1\int_0^y e^{y^2}dxdy$ نستطيع حساب هذا التكامل. ما قمنا به هو أننا كتبنا التكامل بصورة مكافئة ولكننا عكسنا ترتيب التكامل. كما هو موضح بالأمثلة الآتية :

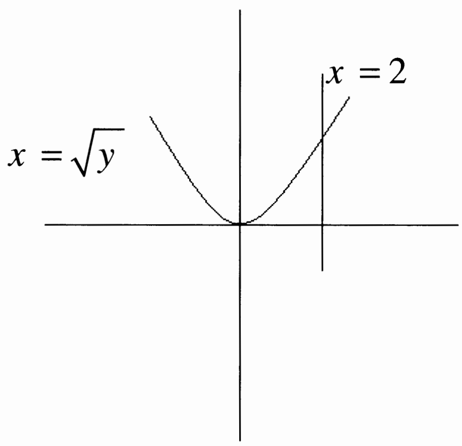
مثال (٩)

أحسب التكامل

$$\mathrm{I}=\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)dx\,dy$$

الحل

من حدود التكامل نلاحظ أن $\sqrt{y}\le x\le 2$ وأن $0\le y\le 4$ كما هو موضح بالشكل (٢-٧) كما أن هذا التكامل لا يمكن إجراءه بالترتيب المعطى لذلك سوف نعيد كتابة التكامل بطريقة مكافئة ولكن بعكس ترتيب التكامل. من الترتيب المعطى فإن الشريحة المأخوذة أفقية. بالتالي لعكس ترتيب التكامل نأخذ شريحة رأسية، نجد أن $0\le y\le x^2, 0\le x\le 2$ كما يتضح من الشكل (٢-٧).



الشكل (٢-٧)

وبالتالي فإن

$$I = \iint_R y\cos(x^5)dA \quad = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{x^2} y\cos(x^5)dy \right] = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \cos(x^5) \right]_0^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^4 \cos(x^5)\, dx = \frac{1}{10}\left[\sin(x^5) \right]_0^2 = \frac{1}{10}\sin(32) = 0.053$$

مثال (١٠)

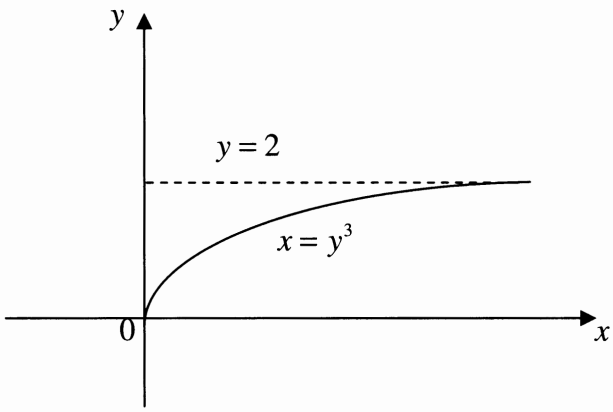
أحسب التكامل $\qquad I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} dydx$

الحل

من حدود التكامل نلاحظ أن $\sqrt[3]{x} \le y \le 2$ وأن $0 \le x \le 8$ كما هو موضح بالشكل (٢-٨)
من الواضح أنه من الصعب إيجاد التكامل بهذا الترتيب وبعكس ترتيب التكامل نجد أن

$$0 \le x \le y^3, 0 \le y \le 2$$

وبالتالي فإن



الشكل (٢-٨)

$$I = \iint_R \frac{1}{y^4+1} dA = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\, dx}{y^4+1} = \int_0^2 \left(\int_0^{y^3} \frac{dx}{y^4+1} \right) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy = \frac{1}{4} \left[\ln y^4 + 1) \right]_0^2 = \frac{1}{4}\ln(17).$$

(٢-٤) تمــــاريــن

في التمارين من ١-٣ احسب التكامل المعطى على R

١- $I=\iint\limits_R \frac{\sin x}{x} dA$ ، حيث أن R هي المنطقة المحدودة بالمثلث الذي رؤوسه $(0,0)$، $(1,0)$ ، $(1,1)$.

٢- $I=\iint\limits_R \frac{y^2}{x^2} dA$، حيث R المنطقة المحدودة بالمنحنيات $yx=1, y=2, y=x$.

٣- $I=\iint\limits_R x^2\sqrt{9-y^2}\, dA$، حيث R المنطقة المحدودة بمحيط الدائرة $x^2+y^2=9$.

٤- $I=\iint\limits_R xy^2 dA$، حيث R المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $y=4-x^2$ ومحور السينات على الفترة $[-1,1]$.

٥- $I=\iint\limits_R x dA$ ، حيث R المنطقة على شكل شبه منحرف محدودة بالخطوط المستقيمة $x=3$ ، $x=5$ ، $y=1$ ، و $y=x$.

٦- $I=\iint\limits_R x(x-1)e^{xy} dA$ ، ، حيث R المنطقة على شكل مثلث محدودة بالخطوط المستقيمة $x=0$ ، $y=0$ ، و $y+x=2$.

٧- $I=\iint\limits_R (3x-5) dA$، حيث R المنطقة على شكل مثلث محدودة بالخطوط المستقيمة $y=5+x$، $y=-x+7$، و $x=10$.

٨- $I=\iint\limits_R xy dA$، حيث R المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y=x^2$ و $y=x$.

٩- $I=\iint\limits_R 1 dA$ ، حيث R المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y=1+x$ و $y=\sin x$ على الفترة $[\pi,2\pi]$.

١٠- $I=\iint\limits_R (4+x^2) dA$ ، حيث R المنطقة المحدودة بالمنحنى $y=1+x^2$ والمنحنى $y=9-x^2$.

١١- $I=\iint\limits_R x dA$، حيث R القرص المغلق $x^2+y^2\le 16$.

في التمارين من ١٢-٢٥ احسب التكاملات المعطاة.

١٢- $\int_0^1\int_0^1 e^{x+y} dy dx$

١٣- $\int_0^1\int_x^{x^2} 1 dy dx$

١٤- $I=\int_0^1\int_0^1 |x-y|\; dy\, dx$

١٥- $\int_0^1\int_0^y x\sqrt{y^2-x^2}\, dx dy$

١٦- $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} y\,dx\,dy$

١٧- $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy$

١٨- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sin\theta\,dr\,d\theta$

١٩- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta$

٢٠- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

٢١- $\displaystyle\int_1^3 \int_0^x \frac{2}{x^2+y^2}\,dy\,dx$

٢٢- $\displaystyle\int_1^e \int_1^{\ln y} e^x\,dx\,dy$

٢٣- $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx$

٢٤- $\displaystyle\int_{\ln\pi/6}^{\ln\pi/2} \int_0^{e^y} \cos e^y\,dx\,dy$

٢٥- $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos y} e^x \sin y\,dx\,dy$

في التمارين من ٢٦- ٣٥. استخدم طريقة عكس ترتيب التكامل لحساب التكاملات المعطاة.

٢٦- $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin(\pi y^3)\,dy\,dx$

٢٧- $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

٢٨- $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y}\sin y \cos\frac{x}{y}\,dy\,dx$

٢٩- $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} y\,dy\,dx$

٣٠- $\displaystyle\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y e^{(x-1)^2}\,dx\,dy$

٣١- $\displaystyle\int_1^e \int_{1/e}^{1/y} \cos(x-\ln x)\,dx\,dy$

٣٢- $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\pi/2} \sec^2 x(\cos x)\,dx\,dy$

٣٣- $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_y^{\sqrt{\pi/2}} y^2 \sin x^2\,dx\,dy$

٣٤- $\displaystyle\int_0^{\pi^{1/3}} \int_{y^2}^{\pi^{2/3}} \sin x^{3/2}\,dx\,dy$

٣٥- أثبت أن

$$\int_{x=1}^2 \int_{y=\sqrt{x}}^x \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\,dx + \int_{x=2}^4 \int_{y=\sqrt{x}}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\,dx = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

٣٦- أثبت أن $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right\} dx = \frac{1}{2}$

وَ

$$\int_0^1 \left\{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right\} dy = -\frac{1}{2}$$

علل سبب اختلاف الجواب ؟

(٢-٥)

• المساحات والحجوم
Areas And Volumes

في هذا الفصل نقدم تطبيقين على التكامل الثنائي، على وجه التحديد حساب المساحة والحجم.

(٢-٥-١) حساب المساحة

لتكن f دالة في المتغيرين y,x معرفة ومتصلة على منطقة مستوية R. من تعريف (٢-٢-٢) إذا كانت $f(x,y)\geq 0$ لكل (x,y) في المنطقة R. فإن $\iint_R f(x,y)dA$ يمثل حجم المجسم الواقع تحت سطح الدالة $z=f(x,y)$ وفوق المنطقة R. الآن إذا كانت $z=f(x,y)=1$ فإن التكامل $\iint_R 1\,dA$ يمثل مساحة المنطقة R والذي نرمز له بالرمز A ونكتب $A=\iint_R dA$.

هنا لدينا الحالتين التاليتين.

(١) إذا كانت $R=R_x$، فإن

$$A=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx=\int_a^b [g_2(x)-g_1(x)]\,dx$$

(٢) إذا كانت $R=R_y$، فإن

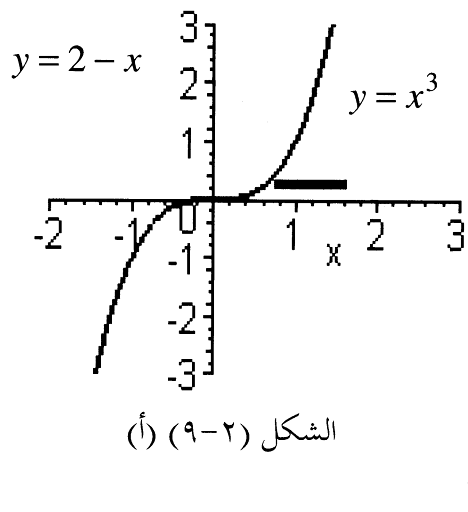
$$A=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\,dy=\int_c^d [h_2(y)-h_1(y)]\,dy.$$

مثال (١)

احسب مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيات الدوال $y=0$ ، $x+y=2$ ، $y=x^3$

الحل

الطريقة الأولى : إذا أخذنا شريحة أفقية فإننا نلاحظ أن لا تغير في نهايتي الشريحة أثناء حركتها من بداية إلى نهاية المنطقة، وكما ذكرنا سابقا فإن هذا يعني أن لا تجزئة للمنطقة ومن حركة الشريحة والحركة داخل الشريحة نجد أن $0\leq y\leq 1$ و $\sqrt[3]{y}\leq x\leq 2-y$. أنظر شكل (٢-٩) (أ).



الشكل (٢-٩) (أ)

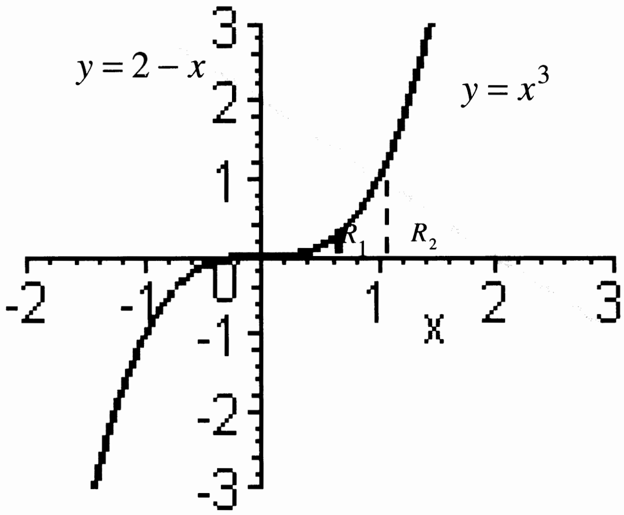
وبالتالي فإن

$$A = \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} dxdy = \int_0^1 [x]_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} dy$$
$$= \int_0^1 (2 - y - \sqrt[3]{y})dy = \frac{3}{4}$$

الطريقة الثانية : إذا أخذنا شريحة رأسية فإننا نلاحظ أن هناك تغير في نهايتي الشريحة أثناء حركتها من بداية إلى نهاية المنطقة، وكما ذكرنا سابقا فإن هذا يعني أن علينا تجزئة المنطقة R إلى منطقتين R_1 ، R_2 ومن حركة الشريحة والحركة داخل الشريحة على كل منطقة، نجد أن على R_1 فإن

$$0 \le x \le 1 \quad \text{و} \quad 0 \le y \le x^3 .$$

أنظر الشكل (٢-٩) (ب).



الشكل (٢-٩) (ب)

وعلى R_2 فإن

$$1 \le x \le 2 \quad \text{و} \quad 0 \le y \le 2 - x .$$

وبالتالي فإن

$$\therefore \quad A = \iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA$$
$$= \int_0^1 \int_0^{x3} dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dy\, dx$$
$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} .$$

ملاحظة

من الواضح أن الطريقة الأولى أسهل من الطريقة الثانية.

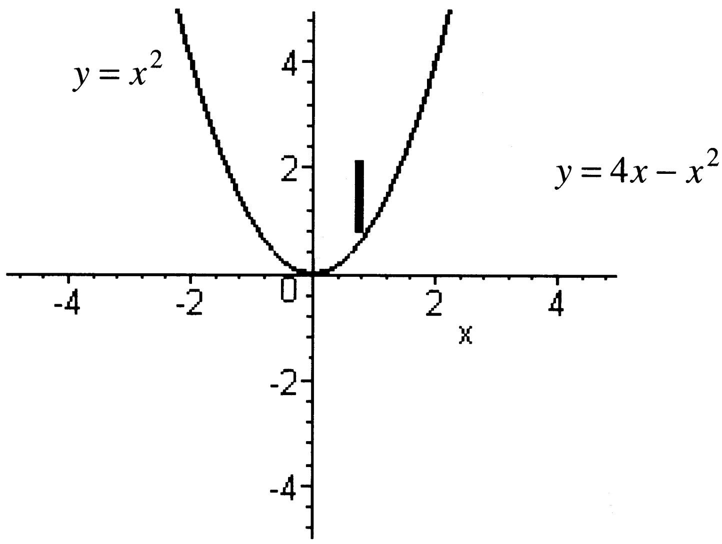
مثال (٢)

احسب مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين

$$y = x^2 \text{ ، } y = 4x - x^2$$

الحل

في هذا المثال بأخذ أي من الشريحتين الأفقية أو الرأسية فلن يكون هناك تجزئة للمنطقة، وهنا الأفضلية للشريحة الرأسية لأنها تعطينا حدود تكاملات أسهل من الشريحة الأفقية. أنظر شكل (٢-١٠). نجد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4x - x^2$ ، $y = x^2$ وذلك بحل المعادلتين. $x^2 = 4x - x^2$ ، وهذا يقتضي أن $2x^2 = 4x$، ومنه فإن $x = 0$ أو $x = 2$. بالتالي فإن $y = 0$ أو $y = 4$ على الترتيب. وعلي فإن $0 \le x \le 2$ و $x^2 \le y \le 4x - x^2$ أنظر شكل (٢-١٠)



الشكل (٢-١٠)

ومن ذلك نجد أن

$$A = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy\, dx = \int_0^2 (4x - x^2 - x^2)\, dx$$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx = \frac{8}{3} .$$

(٢-٥-٢) حساب حجوم المجسمات

لقد رأينا في البند السابق كيف يمكن إستخدام التكامل الثنائي لحساب مساحة منطقة في المستوى والآن سنرى كيف يمكن استخدام التكامل الثنائي لحساب حجوم بعض المجسمات وذلك كتطبيق آخر على التكامل الثنائي وكما أوضحنا في بداية هذا الفصل فمن تعريف (٢-٢-٢) إذا كانت $f(x,y)\geq 0$ لكل (x,y) في المنطقة R. فإن $\iint_R f(x,y)dA$ يمثل حجم المجسم الواقع تحت سطح الدالة $z=f(x,y)$ وفوق المنطقة R.

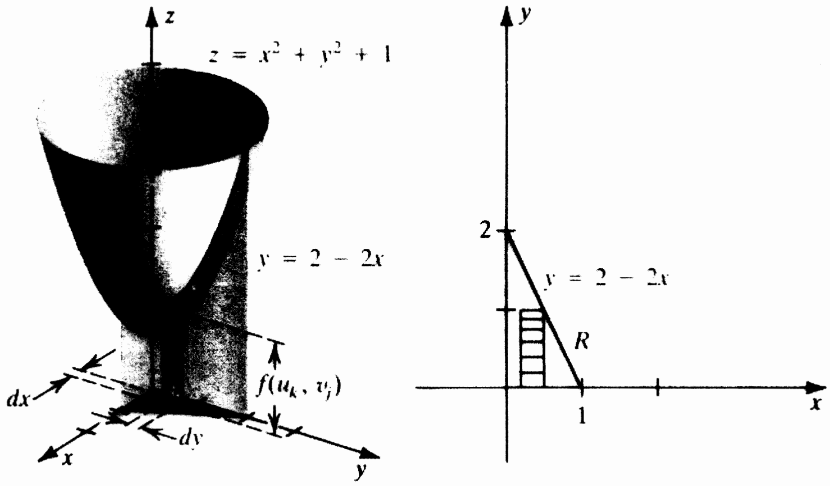
مثال (٣)

أوجد حجم المجسم الواقع في الثمن الأول (أي $x\geq 0$، $y\geq 0$، $z\geq 0$) والمحدود بالمستويات الإحداثية وبالسطوح

$$2x+y=2,\quad z=x^2+y^2+1$$

الحل

إن الدالة $z=x^2+y^2+1$ موجبه على المنطقة R الوضحة بالشكل (٢-١١)



الشكل (٢-١١)

$$R=\{(x,y):0\leq y\leq 2-2x,0\leq x\leq 1\}$$

$$V=\iint_R f(x,y)dA=\int_0^1\int_0^{2-2x}(x^2+y^2+1)dydx$$

$$=\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right]_0^{2-2x}dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{-14}{3}x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right) dx$$

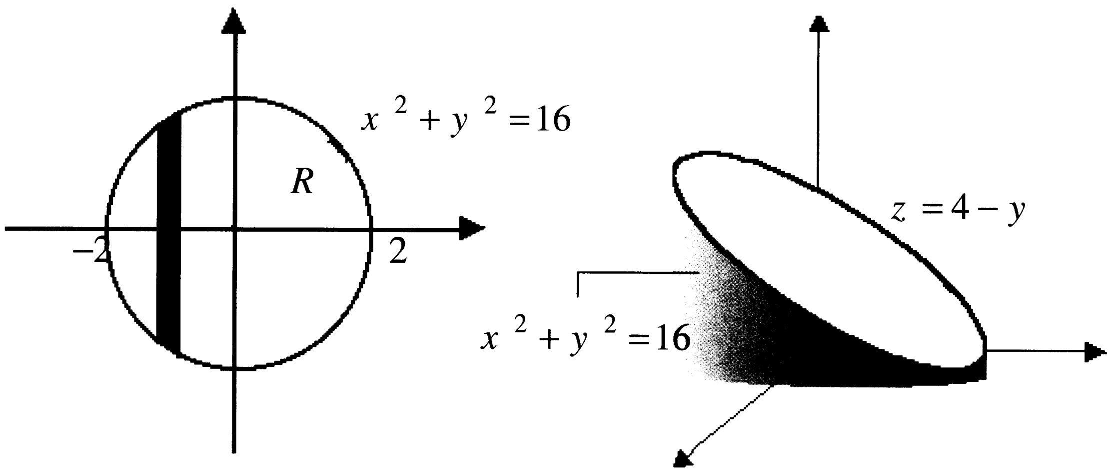
$$= \frac{11}{6}$$

مثال (٤)

أوجد حجم الجسم المحدود بالأسطوانه $x^2 + y^2 = 16$ وبالمستويين $y + z = 4$ ، $z = 0$.

الحل

أن الدالة $z = f(x, y) = 4 - y$ موجبة فوق المنطقة R والتي تمثلها قاعدة الأسطوانه $x^2 + y^2 = 16$ كما أن حدود R هي :



الشكل (٢-١٢)

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{16 - x^2} \le y \le \sqrt{16 - x^2},\ -4 \le x \le 4 \right\}$$

انظر الشكل (٢-١٢).

وبالتالي فإن حجم الجسم هو :

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$$

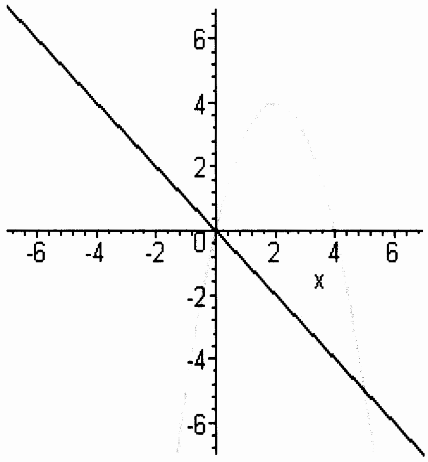
$$= \int_{-4}^{4} \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dx = \int_{-4}^{4} 4\sqrt{16 - x^2}\, dx$$

لحساب التكامل الأخير نجري التعويض التالي $x = 4 \sin\theta$ ، فنجد بعد إجراء الحسابات اللازمة أن $V = 64\pi$.

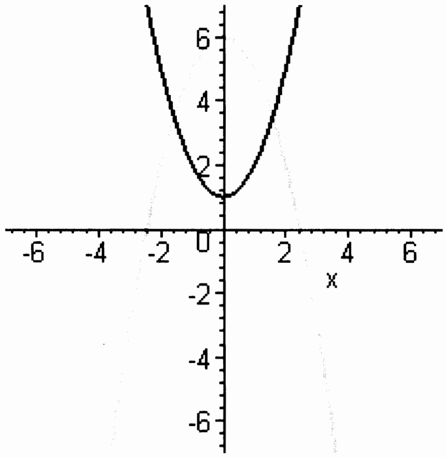
(٢-٦) تمـــــارين

في التمارين من ١- ٣ اكتب التكامل المتعاقب الذي يمكن استخدامه لحساب مساحة المنطقة الموضحة بالشكل.

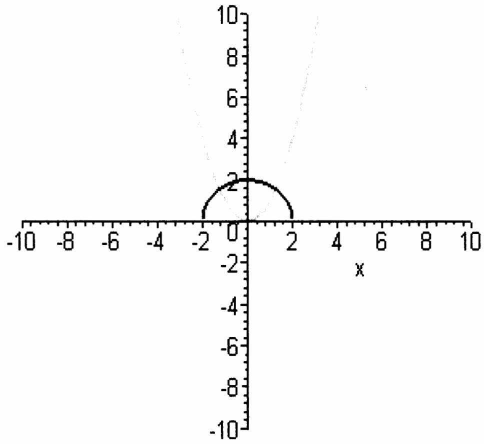
١- معدلات المنحنيات $y=4x-x^2$ و $y=-x$



٢- $y=6-x^2$ و $y=x^2+1$



٣- $x^2+y^2=4$ ، $y=-x+6$ و $y=x^2$



في التمارين من ٤- ١٣ احسب مساحة المنطقة المستوية باستخدام الطريقة المتبعة في هذا الفصل.

٤- المنطقة المحدودة بالقطعين المكافئين $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ على الفترة $[1,4]$.

٥- المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين $y=\cosh x$ و $y=\sinh x$ على الفترة $[-1,1]$. (اترك جوابك بدلالة cosh أو sinh).

٦- المنطقة المحدودة بالقطعين المكافئين $x=y^2$ و $x=32-y^2$.

٧- المنطقة المحدودة بالقطعين المكافئين $x=y^2$ و $x=4y^2-3$.

٨- المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين $y=\dfrac{1}{x^2}$ و $y=-x^2$ على الفترة $[1,2]$.

٩- المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين $y^2=x$ و $x-y=4$ على الفترة $[-1,2]$.

١٠- المنطقة المحدودة بمنحنيات الدوال $y=x$ و $y=3x$ و $x+y=4$.

١١- المنطقة المحدودة بمنحنيات الدوال $x-y=-1$ و $7x-y=17$ و $2x+y=-2$.

١٢- المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين $y=e^x$ و $y=\sin x$ على الفترة $[-\pi,\pi]$.

١٣- المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين $y=x^2$ و $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

في التمارين من ١٤- ٢١ احسب حجم المجسم باستخدام الطرق المتبعة في هذا الفصل.

١٤- المجسم المحدود بالمستوى $x+2y+3z=6$ والمستويات الاحداثية.

١٥- المجسم المحدود بالمستويات $z=1+x+y$ ، $x=2$ و $y=1$ والمستويات الاحداثية.

١٦- المجسم في الثمن الأول والمحدود بالسطح المكافئ $z=x^2$ والمستويات $y=x$، $x=2y$، $y=0$، $z=0$ و $x=2$.

١٧- المجسم في الثمن الأول والمحدود بالإسطوانة $x^2+y^2=4$، والمستوى $z=y$ والمستوى xy، والمستوى yz.

١٨- المجسم المحدود من أعلى بسطح الكرة $x^2+y^2+z^2=1$ ومن الأسفل بالمستوى xy.

١٩- المجسم المحدود من أعلى بسطح الكرة $x^2+y^2+z^2=9$ ومن الأسفل بالمستوى $z=1$.

٢٠- المجسم المحدود بالمستوى $y+z=4$ والأسطوانة $z=y^2$.

٢١- المجسم في الثمن الأول والمحدود بالإسطوانتين $x^2+y^2=4$ و $y^2+z^2=4$ والمستويات الإحداثية.

(٧-٢)

التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية

The Double Integral In Polar Coordinates

هناك العديد من التكاملات الثنائية والتي لا يمكن حسابها بالاحداثيات الديكارتية، على سبيل المثال، التكاملات $\iint_R e^{x^2+y^2}dA$ و $\iint_R (x^2+y^2)^{3/2}dA$ بغض النظر عن R، وهناك العديد من التكاملات التي يمكن حسابها بالاحداثيات الديكارتية ولكن الحسابات قد تكون طويلة ولا بد من

إجراء بعض التعويضات، كمثال على ذلك $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-x^2-y^2)\,dydx$.

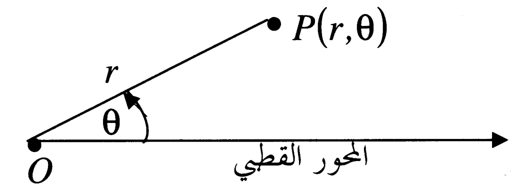
في هذا الفصل نراجع وبشكل مقتضب مفهوم الإحداثيات القطبية، ومن ثم ندخل مفهوم التكامل بهذه الإحداثيات والذي سيساعدنا كثيرا على حساب مثل التكاملات السابقة الذكر بطريقة مختصرة وميسرة.

(٢-٧-١) الإحداثيات القطبية

لإنشاء المستوى القطبي نتبع مايلي:

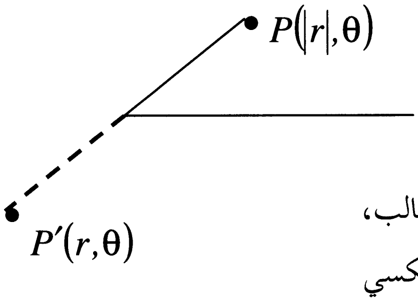
(أ) نختار نقطة في المستوى ونرمز لها بالرمز O وتسمى القطب (pole).

(ب) نرسم من القطب نصف خط مستقيم متجه يسمى المحور القطبي (polar axis) أنظر الشكل (٢- ١٣). لتكن P نقطة تختلف عن القطب.



الشكل (٢-١٣)

إذا كان $r=|OP|$ أي المسافة بين O و P أنظر شكل (٢-١٣)، وإذا كانت θ الزاوية التي يصنعها OP مع نصف المستقيم. فإن الزوج المرتب (r,θ) يسمى الإحداثيات القطبية للنقطة P. إذا انطبق OP على المحور القطبي ثم دار، فإننا سنعتبر الزاوية θ التي يصنعها مع المحور القطبي موجبة إذا كان الدوران مخالف لعقارب الساعة وسالبة إذا كان الدوران مع عقارب الساعة. نعلم أن هناك تقابل واحد لواحد بين مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية ونقا المستوى الديكارت، ولكن هذا ليس صحيحا في المستوى القطبي فالنقطة الواحدة في هذا المسنوى تمثل عددا غير منته من الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية (r,θ)، فمثلا الزوجين المرتبين $(2,\pi/3)$ و $(2,\pi/3+2\pi)$ تمثلهما نفس النقطة في المستوى القطبيي. في الحقيقة فإن الأزواج المرتبة $(r,\theta\pm 2n\pi)$ تمثلها نفس النقطة.



الشكل (٢-١٤)

في الأزواج المرتبة (r,θ) اعتبرنا r عدد حقيقي موجب، لتمثيل الأزواج المرتبة حيث r عدد حقيقي سالب، نمثل أولا الزوج المرتب $(|r|,\theta)$ ثم نمد OP بالاتجاه العكسي بقدر نفسه، فتكون النقطة P' تمثل (r,θ) أنظر شكل (٢-١٤). الكتابة المستوى ـــ $r\theta$ تعني المستوى القطبي.

المعادلة القطبية، هي معادلة في المتغيرين r و θ. فمثلا المعادلة $r=2\sin\theta$ معادلة قطبية. ومنحنى المعادلة القطبية هو مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية والتي تحقق المعادلة.

(٢-٧-٢) العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية:

إن كلا النظامين الديكارتي والقطبي هما تمثيل لنقاط المستوى، أي أن كل نقطة في المستوى تمثل بالإحداثيات الديكارتية (x, y) والقطبية (r,θ)، مما يعني أن هناك علاقة بين هذين النظامين. النظرية التالية توضح هذه العلاقة.

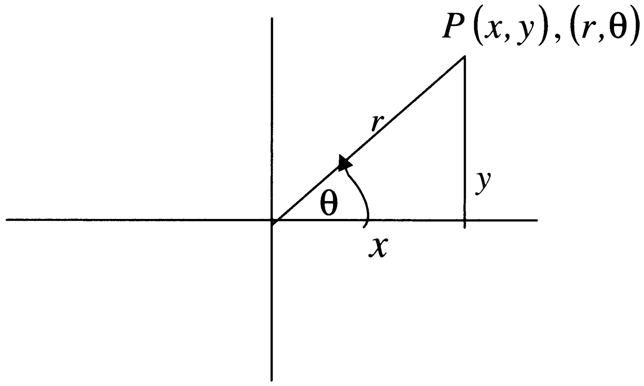
(٢-٧-٣) نظرية

الإحداثيات الديكارتية (x, y) والقطبية (r,θ) لنقطة P في المستوى ترتبطان بالعلاقات التالية.

(a) $x = r\cos\theta$　　(b) $y = r\sin\theta$

(c) $r^2 = x^2 + y^2$　　(d) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$

الشكل (٢-١٥) يوضح كيفية الحصول على العلاقات السابقة. وسنكتفي فقط بأخذ نقطة في الربع الأول، ولكن العلاقات صحيحة مهما كان وضع النقطة.



الشكل (٢-١٥)

مثال (١)

أوجد معادلة المنحنى بالإحداثيات الديكارتية إذا كانت معادلته بالإحداثيات القطبيه هي $r = 4\sin\theta$

الحل

نضرب طرفي المعادلة $r = 4\sin\theta$ بالمتغير r نحصل على $r^2 = 4\,r\sin\theta$، باستخدام العلاقات السابقة نحصل على $x^2 + y^2 = 4y$ ، أي أن $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$، ومنه نجد أن ، $x^2 + (y-2)^2 = 4$. وهذه تمثل معادلة دائرة مركزها $(0,2)$ ونصف قطرها 2 .

مثال (٢)

أوجد الصيغة القطبية للمعادلة $x^2 - y^2 = 16$

الحل

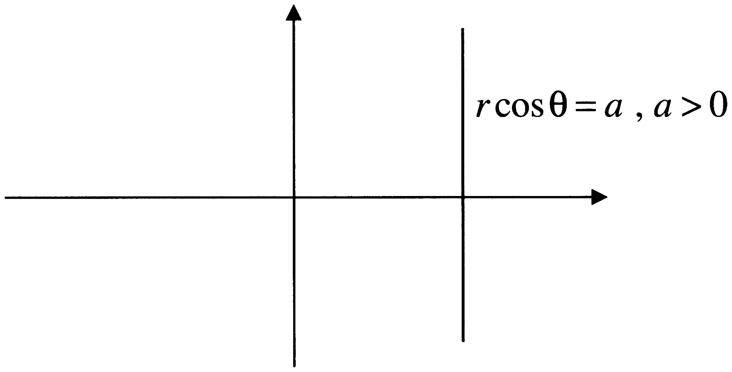
بالتعويض من العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية نحصل على

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= r^2\cos^2\theta r^2 = \sin^2\theta \\ &= r^2\ (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= r^2\cos 2\theta \end{aligned}$$

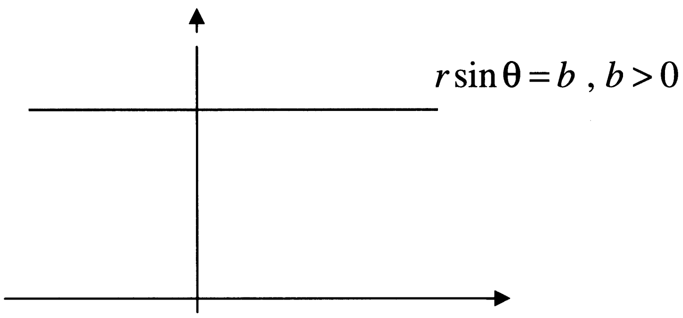
وبالتالي فإن معادلة المنحنى بالإحداثيات القطبية هي: $r^2\cos 2\theta = 16$.

فيما يلي نورد بعضا من المعادلات القطبية ومنحنياتها.

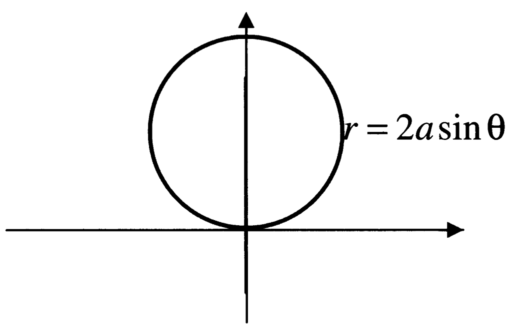
(أ) $r\cos\theta = a$ حيث a عدد حقيقي، وهي معادلة خط مستقيم مواز لمحور الصادات.



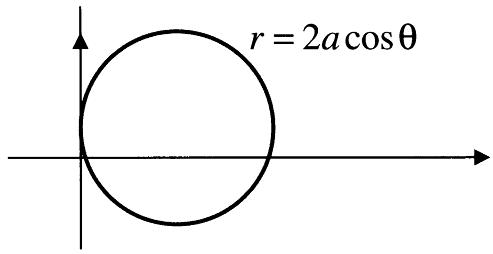
(ب) $r\sin\theta = b$ حيث b عدد حقيقي، وهي معادلة خط مستقيم مواز لمحور السينات.



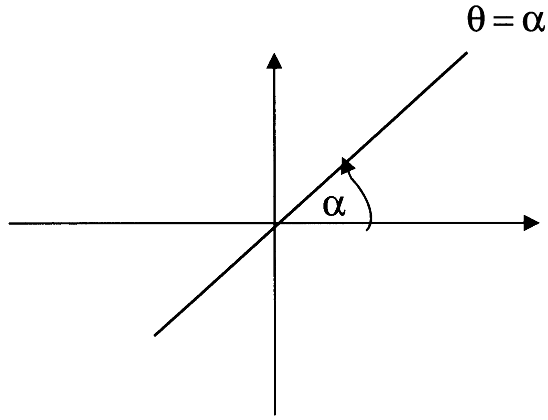
(ج) $r = \pm 2a\sin\theta$ حيث $a > 0$، وهي معادلة دائرة مركزها النقطة $(0,a)$ ونصف قطرها a



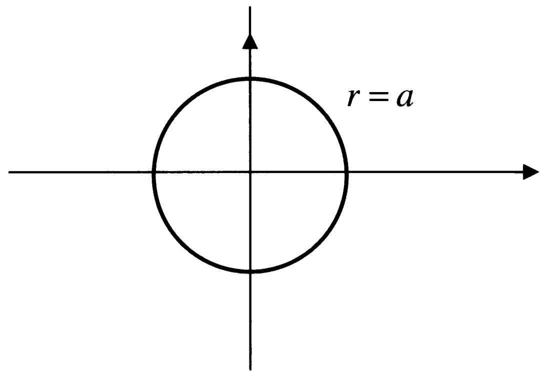
(د) $r = \pm 2a\cos\theta$ حيث $a > 0$، وهي معادلة دائرة مركزها النقطة $(a,0)$ ونصف قطرها a.



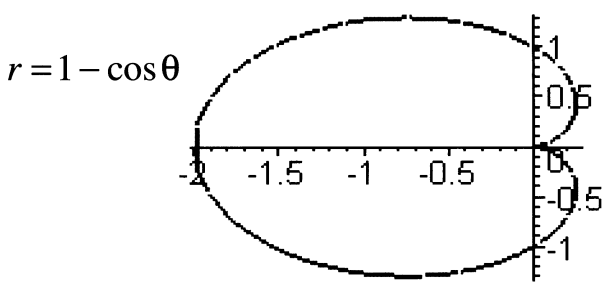
(هـ) $\theta = \alpha$، وهي معادلة خط مستقيم يمر بنقطة الأصل ويصنع زاوية مقــدارها α معـــه الاتجـــاه الموجب لمحور السينات.



(و) $r = a$، وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل $(0,0)$ ونصف قطرها $|a|$.

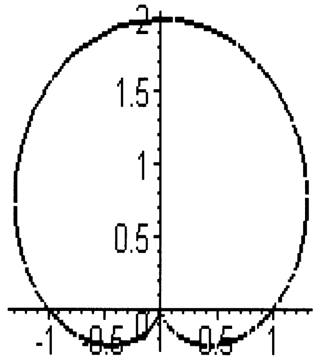


(ز) $r = a(1 \pm \cos\theta)$ حيث $a > 0$، وهي معادلة منحنى القلب.



(ح) $r=a(1\pm\sin\theta)$ حيث $a>0$ ، وهي معادلة منحنى القلب.

$r=1+\sin\theta$



نعود الآن لموضوعنا الرئيسي وهو التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية. نبدأ أولا بالمنطقة القطبية الأولية ،وهي المنطقة المحدودة بقوسي دائرتين مركزهما نقطة الأصل وطول نصف قطر الدائرة الكبرى r_2 وطول نصف قطرالدائرة الصغرى r_1 ولتكن $\Delta\theta$ الزاوية المحصورة بين نصفي القطرين . عندئذٍ فإن مساحة هذه المنطقة هي :

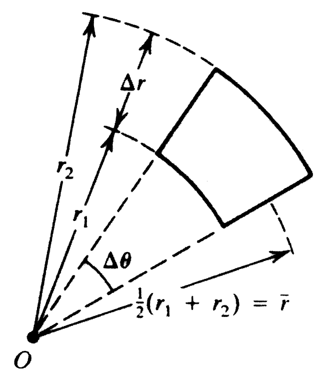
$$\Delta A=\frac{1}{2}r_2^{\,2}\Delta\theta-\frac{1}{2}r_1^{\,2}\Delta\theta$$

$$=\frac{r_2+r_1}{2}(\,r_2-r_1\,)\Delta\theta$$

بوضع : $\Delta r=r_2-r_1$ ، $r=\dfrac{r_1+r_2}{2}$

نجد أن $\Delta A=r\Delta r\;\Delta\theta$

$\Delta A=\bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta$



الشكل (٢-١٦)

ملاحظة

ΔA تعطى بالإحداثيات الديكارتية على الشكل :

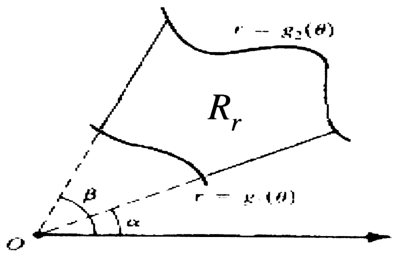
$$\Delta A=\Delta x\;\Delta y$$

نلاحظ أنه يوجد فرق بين العنصر التفاضلي للسطح في الإحداثيات الديكاريتة $dA=dx\,dy$ أو $dA=dy\,dx$ وبين العنصر التفاضلي للسطح في الإحداثيات القطبية $dA=r\,dr\,d\theta$ أو $dA=r\,d\theta\,dr$.

كما الحال في التكامل الثنائي بالإحداثيات الديكارتية، ستقتصر دراستنا للتكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية على نوع واحد من المناطق المستوية R_r أو اتحاد عدد منته منها.

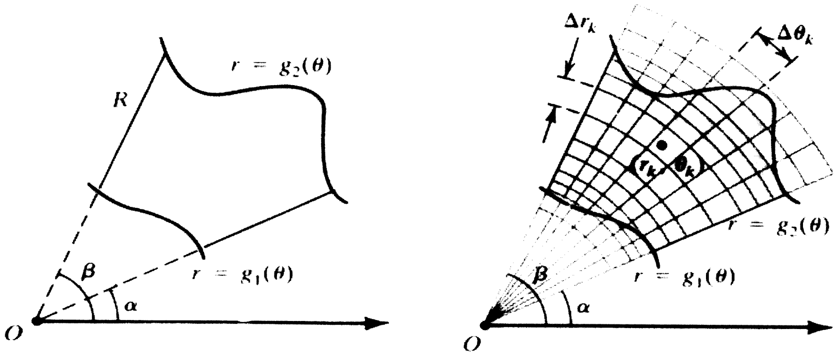
(٢-٧-٤) تعريف

نعرف المنطقة المستوية R_r بأنها المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين القطبيتين $r=g_1(\theta)$ و $r=g_2(\theta)$ المعرفتين والمتصلتين على الفترة المغلقة $[\alpha,\beta]$ والمستقيمين $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$، بحيث أن $0\le\beta-\alpha\le 2\pi$ وأن $g_2(\theta)\ge g_1(\theta)\ge 0$ لكل $\alpha\le\theta\le\beta$. كما هو موضح بالشكل (٢-١٧).



الشكل (٢-١٧)

إذا كانت $z=f(r,\theta)$ دالة في المتغيرين r , θ معرفة ومتصلة على المنطقة $R=R_r$، فإن التكامل $\iint_R f(r,\theta)dA$ يمكن تعريفه بالطريقة ذاتها للتكامل بالإحداثيات الديكارتية باختلاف أن المنطقة R تجزء إلى مناطق قطبية أولية بدلا من مستطيلات. شكل (٢-١٨) يوضح هذه التجزئة للمنطقة R_r. لن نتعرض للتفاصيل هنا.



الشكل (٢-١٨)

(٢-٧-٥) نظرية

لتكن $z=f(r,\theta)$ دالة معرفة ومتصلة على المنطقة $R=R_r$، فإن

$$\text{(i)}\ \iint_R f(r,\theta)dA=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

النظرية (٢-٧-٣) أوضحت العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية. النظرية التالية توضح الكيفية التي تتم فيها عملية التحول من التكامل بالإحداثيات الديكارتية إلى التكامل بالإحداثيات القطبية.

(٢-٧-٦) نظرية

لتكن $z = f(x, y)$ دالة معرفة ومتصلة على المنطقة $R = R_r$، فإن

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

قبل البدء بإعطاء بعض الأمثلة التوضيحية، نود أن نشير إلى أننا استخدمنا في التكامل الثنائي بالإحداثيات الديكارتية شريحة أفقية أو رأسية واستخدمنا حركة الشريحة وسنستخدم في الإحداثيات القطبية شريحة مثلثية وستكون حركة الشريحة هنا دورانية وتعطي قيم تغير θ أما الحركة داخل الشريحة فتعطي قيم تغير r .

مثال (٣)

أحسب التكامل

$$\mathrm{I} = \int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx$$

الحل

بقراءة لحدود التكامل نجد أن المنطقة R محدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{a - x^2}$ ، $y = 0$ و $x = a$ و $x = -a$ أي أن R هي:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\right\}$$

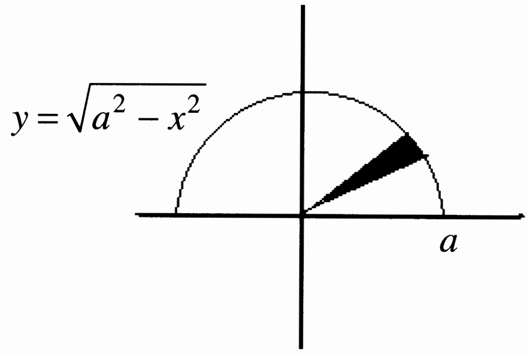
وهي عبارة عن النصف العلوي للقرص الدائري والذي مركزة نقطة الأصل ونصف قطره a .

كما سبق وأن نوهنا في بداية هذا الفصل فإن هذا التكامل لا يمكن حسابه بالإحداثيات الديكارتية ولذلك سوف نستخدم الاحداثيات القطبية وفق الخطوات التالية:

١- نكتب الدالة $f(x, y)$ بالاحداثيات القطبية

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2} = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r^2)^{3/2} = r^3$$

٢- نرسم المنطقة R كما في شكل (٢-١٩)، ثم نرسم شريحة مثلثية تقع بكاملها داخل المنطقة R . أنظر شكل (٢-١٨) . نلاحظ أنه أثناء دوران الشريحة من بداية المنطقة إلى نهايتها فإن نهايتي الشريحة تبقى على نفس المنحنيين مما يعني أن لا تجزئة للمنطقة. من حركة الشريحة نجد أن $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq r \leq a$.



الشكل (٢-١٩)

وعندئذٍ ومن نظرية (٢-٧-٦) يصبح التكامل على الشكل التالي :

$$I=\iint_R f(x,y)dA=\iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)dA$$

$$=\int_0^\pi \int_0^a r^3 dr\, d\theta=\int_0^\pi \int_0^a r^4 dr\, d\theta$$

$$=\int_0^\pi \frac{a^5}{5}d\theta=\frac{\pi a^5}{5}$$

مثال (٤)

احسب التكامل

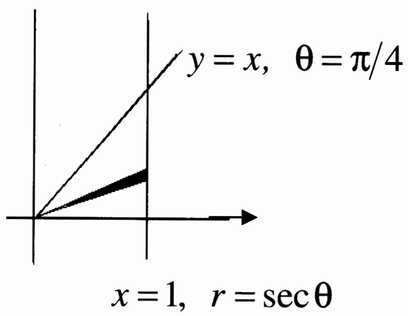
$$I=\iint_R \frac{dA}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

حيث R المنطقة المحدودة بالمستقيمات :

$$y=0\ ,\ x=1\ ,\ y=x$$

الحل

أنظر الشكل (٢-٢٠)



الشكل (٢-٢٠)

هنا أيضاً لا يمكن حساب هذا التكامل بالإحداثيات الديكارتية، لذلك سنستخدم الاحداثيات القطبية.

بما أن $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$ ، فإن $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\dfrac{1}{(1+r^2)^{3/2}}$

لايجاد حدود R بالإحداثيات القطبية نقوم بتحويل معادلات المنحنيات التي تحد المنطقة إلى الإحداثيات القطبية. من المعادلة $y=x$ ، بالتالي $r\sin\theta=r\cos\theta$ ومنه $\sin\theta=\cos\theta$ أي أن $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. أيضا المعادلة $x=1$ تصبح $r\cos\theta=1$ ، أي أن $r=\sec\theta$. وبالنظر إلى الشريحة في شكل (٢-٢٠) نجد أن:

$$R=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le r\le sec\,\theta \text{ ، } 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

وبالتالي، من نظرية (٢-٧-٦) فإن التكامل يصبح

$$I=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}rd\ rd\theta=\int_0^{\pi/4}\left[\ (1+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\sec\,\theta}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/4}\left[1+\sec^2\theta\right]^{-1/2}d\theta=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}\,d\theta$$

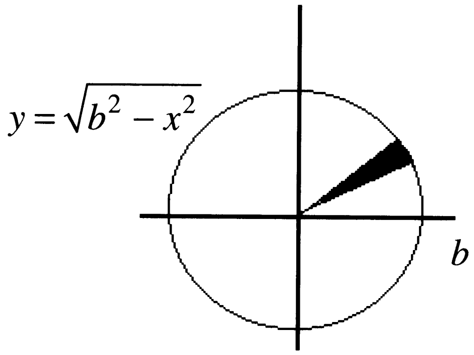
$$=\frac{\pi}{4}-\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\theta\right)\right\}_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}.$$

مثال (٥)

احسب التكامل المعتل $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ إن وجد، باعتباره $\lim\limits_{b\to\infty}\iint_{R_b} e^{-(x^2+y^2)}dA$ ، حيث R_b المنطقة في الربع الأول والمحدودة بالمحورين الإحداثيين والدائرة $x^2+y^2=b^2$.

الحل

المنطقة R_b كما هي موضحة بالشكل (٢-٢١)



الشكل (٢-٢١)

نستخدام الاحداثيات القطبية ، فإذا فرضنا أن

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{b\to\infty} \iint_{R_b} e^{-(x^2+y^2)}dA = \lim_{b\to\infty} \int_0^{\pi/2}\int_0^b e^{-r^2}\, rdrd\theta$$

$$= \frac{-1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\Big|_0^b d\theta = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{\pi/2}(1-e^{-b^2}) = \frac{\pi}{4}\lim_{b\to\infty}(1-e^{-b^2}) = \frac{\pi}{4}$$

بشكل عام يمكننا القول أنه إذا كانت الدالة المكاملة أو جزء منها يحتوى تعريفها على الصيغة التربيعية x^2+y^2 أو أن أحد أو كل حدود المنطقة المراد التكامل عليها تحتوي منحنى دائري، في هذه الحالة فإن استخدام الإحداثيات القطبية لحساب التكامل قد لا يكون هو الأنسب فقط وإنما قد لا نستطيع حسابه إلا بهذه التكاملات كما أوضحت ذلك الأمثلة السابقة.

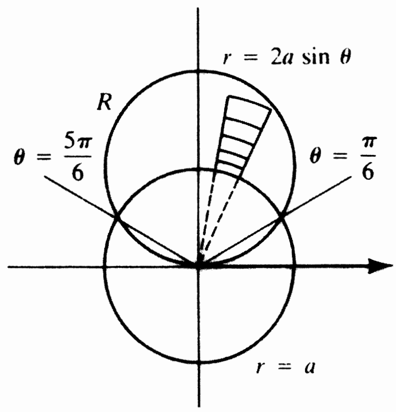
لتكن f دالة في المتغيرين θ, r معرفة ومتصلة على المنطقة R. إذا كانت $f(r,\theta)\geq 0$ لكل (r,θ) في المنطقة R. فإن $\iint_R f(r,\theta)dA$ يمثل حجم المجسم الواقع تحت سطح الدالة $z=f(r,\theta)$ وفوق المنطقة R. الآن إذا كانت $z=f(r,\theta)=1$ فإن التكامل $\iint_R 1\, dA$ يمثل مساحة المنطقة R والذي نرمز له بالرمز A ونكتب $A=\iint_R dA$.

مثال (٦)

أوجد مساحة المنطقة المستوية الواقعة خارج الدائرة $r=a$ ، وداخل الدائرة $r=2a\sin\theta$ حيث إن $a>0$.

الحل

لنحسب أولاً نقاط تقاطع الدائرتين فنجد أنه بوضع $2a\sin\theta=a$ ، نحصل على $2a\sin\theta=a$



الشكل (٢-٢٢)

ومنه فإن $\sin\theta = \frac{1}{2}$، وبالتالي فإن $\theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}$. من حركة الشريحة والحركة داخل الشريحة نجد أن :

$$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad a \le r \le 2a\sin\theta$$

وبالتالي فإن مساحة المنطقة المستوية هي:

$$A = \iint_R dA = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_a^{2a\sin\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{2a\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (4a^2\sin^2\theta - a^2)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} 4a^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - \frac{a^2}{2}[\,\theta\,]_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$= a^2\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{a^2}{2}\left[\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right].$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

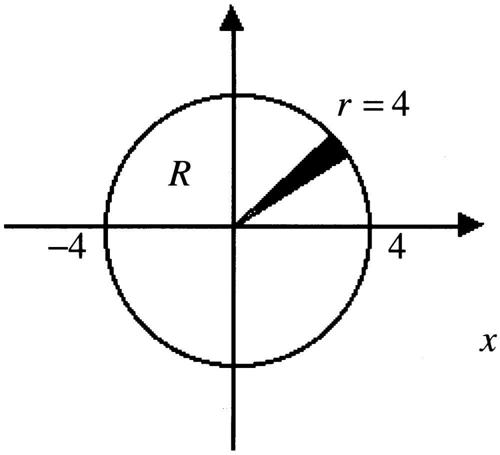
$$= \frac{\pi}{3}a^2 + a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}a^2 + a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

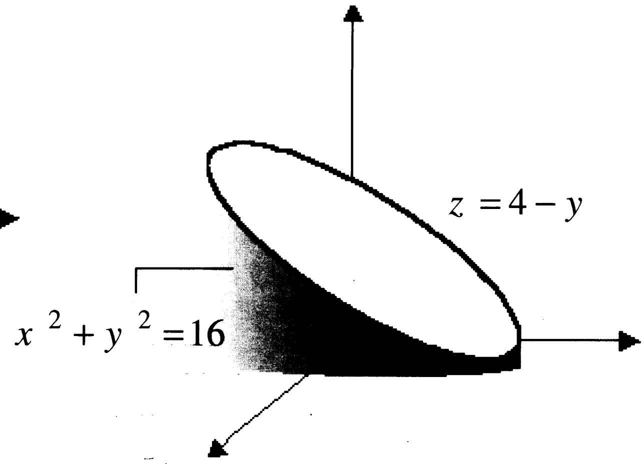
مثال (٧)

أوجد حجم المجسم المحدود بالأسطوانه $x^2 + y^2 = 16$ وبالمستويين $y + z = 4$ ، $z = 0$.

الحل

سبق وأن ناقشنا هذا المثال عند دراستنا للحجوم بالإحداثيات الديكارتية. أنظر مثال (٤) من الفصل (٢-٥).





$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^4 (4 - r\sin\theta)r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_0^4 d\theta$$

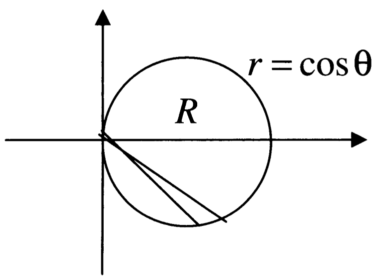
$$= \int_0^{2\pi}(32 - \frac{64}{3}\sin\theta)\,d\theta = \left[32\theta + \frac{64}{3}\cos\theta\right]_0^{2\pi} = (64\pi + \frac{64}{3}) - (0 + \frac{64}{3}) = 64\pi$$

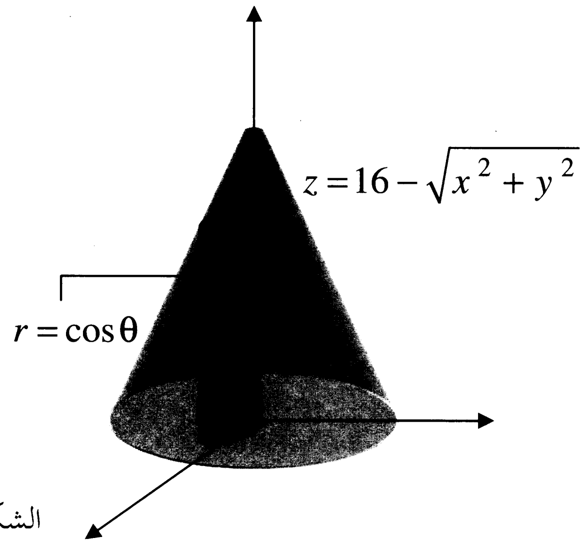
مثال (٨)

احسب حجم المجسم المحدود من الجوانب بالإسطوانة $r = cos\theta$ ومن الأعلى بالسطح المخروطـــي $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$

الحل

المجسم هو الموضح بالشكل (٢-٢٣)، وكذلك R.





الشكل (٢-٢٣)

بالنظر إلى R نجد أن $0 \le r \le \cos\theta$ و $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. بالتالي فإن

$$V = \iint_R (16 - \sqrt{x^2 + y^2})dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} (16 - \sqrt{r^2})rdr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[8r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_0^{\cos\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (8\cos^2\theta - \frac{\cos^3\theta}{3})\, d\theta = 4\pi - \frac{4}{9}$$

(٢-٨) تمارين

في التمارين من ١-٤ عبر عن التكامل كتكامل متعاقب بالإحداثيات القطبية، ثم احسبه.

١- $\mathrm{I} = \iint_R 2y\, dA$، حيث إن R هي المنطقة المحدودة بالدائرة $(x-1)^2 + y^2 = 1$ والمستقيم $y = x$ والمستقيم $y = -x$.

٢- $\mathrm{I} = \iint_R \sin(x^2 + y^2)dA$، حيث إن R هي المنطقة $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 16\}$.

٣- $\iint_R \sin\theta\, dA$. حيث أن R المنطقة المستوية خارج الدائرة $r = 2$ وداخل منحنى القلب $r = 2\,(1 + \cos\theta)$.

٤- $\iint_R y\, dA$، حيث أن R المنطقة المستوية المحدودة الدائرة $r = 2\cos\theta$.

في التمارين من ٥-١١ احسب مساحة المنطقة المستوية باستخدام التكامل المتعاقب بالإحداثيات القطبية.

٥- المنطقة داخل منحنى القلب $r = 1 + \cos\theta$ وخارج الدائرة $r = \frac{1}{2}$.

٦- المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة $r = \sin\theta - \cos\theta$.

٧- المنطقة المحدودة بمنحنى القلب $r = 1 + \sin\theta$ والدائرة $r = -\sin\theta$.

٨- المنطقة داخل الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ وعلى يمين الخط $x = 1$.

٩- المنطقة المحدودة بالمنحنى $r = 1 - \cos\theta$

١٠- المنطقة في الربع الأول داخل الدائرة $r = 4\sin\theta$ وخارج $r^2 = 8\cos 2\theta$.

١١- المنطقة في الربع الأول والمحدودة بالمنحنيات $5y = 2x - 4$ و $8y = 16 + x^2$.

في التمارين من ١٢-١٦ استخدم التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية لحساب حجم الجسم.

١٢- الجسم المحدود بنصف الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3.

١٣- الجسم داخل الكرة $x^2+y^2+z^2=4$ وخارج الأسطوانة $x^2+y^2=1$ وفوق المستوى — xy.

١٤- الجسم الذي تقطعه الأسطوانة $r=a\cos\theta$ من الكرة التي نصف قطرها a.

١٥- الجسم المحدود من أعلى بالسطح $z=(x^2+y^2)^{3/2}$ ومن الأسفل بالمستوى xy ومن الجوانب بالاسطوانتين $x^2+y^2=1$ وَ $x^2+y^2=9$.

١٦- الجسم المحدود بالسطح المكافئ $z=4-x^2-y^2$، المستوى $z=3$ والمستوى — xy.

في التمارين من ١٧-٢٤ غير التكامل إلى تكامل متعاقب بالإحداثيات القطبية، ثم احسبه.

١٧- $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

١٨- $\int_0^1\int_y^{\sqrt{2-y^2}} dxdy$

١٩- $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} dydx$

٢٠- $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dy\,dx$

٢١- $\int_{3\sqrt{2}}^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx$

٢٢- $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dydx$

٢٣- $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dydx$

٢٤- $\displaystyle\int_{-b}^{b}\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} dydx$

٢٥- (أ) بفرض أن $\mathrm{I}=\int_0^\infty e^{-x^2}\, dy$، وبالتالي $\mathrm{I}=\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy$، ومنه

$$\mathrm{I}^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}\,e^{-y^2}dxdy$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

استخدم مثال (٥) لإثبات أن $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(ب) استخدم (أ) لإثبات أن $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

(ج) استخدم أفكار مثال (٥) وفرعي (أ) و (ب). لإثبات أن $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$.

(النتيجة الأخيرة تعني أن مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y=e^{-x^2/2}$ ومحور السينات تساوي $\sqrt{2\pi}$ وهي ذات أهمية خاصة في علم الإحصاء).

(٢-٩)

• التكامل الثلاثي

The Triple Integral

في هذا الفصل نعرف التكامل الثلاثي لدالة في ثلاث متغيرات. أي أننا نعرف التكامل الثلاثي لدالة $w = f(x, y, z)$ معرفة على منطقة مغلقة ومحدودة Q في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$. وطريقة التعريف هنا شبيهة بتلك في التكامل الثنائي والأحادي وتستند إلى إيجاد مجموع ريمان وذلك بإحداث تجزئة للمنطقة Q على شكل متوازيات مستطيلات $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ تقع بكاملها داخل المنطقة Q ، ويتم ذلك برسم مستويات موازية للمستويات xy و xz و yz فيكون حجم متوازي المستطيلات Q_k هو $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$. نختار نقطة (u_k, v_k, w_k) من Q_k فيكون مجموع ريمان لهذه التجزئة هو

$$R_P = \sum_{k=1}^{n} f(u_k, v_k, w_k)\Delta V_k$$

فإذا كانت $\lim\limits_{\|P\|\to 0} R_P = \lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(u_k, v_k, w_k)\Delta V_k$ ؛ حيث $\|P\|$ يرمز لطول أكبر قطر من متوازيات مستطيلات التجزئة $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$؛ موجودة ووحيدة لأي تجزئة P ولأي نقطة (u_k, v_k, w_k) من Q_k فإننا نقول أن الدالة f قابلة للتكامل على Q ونكتب

$$\iiint\limits_{Q} f(x, y, z)\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} f(u_k, v_k, w_k)\Delta V_k \right)$$

حيث dV يمثل العنصر التفاضلي للحجم .

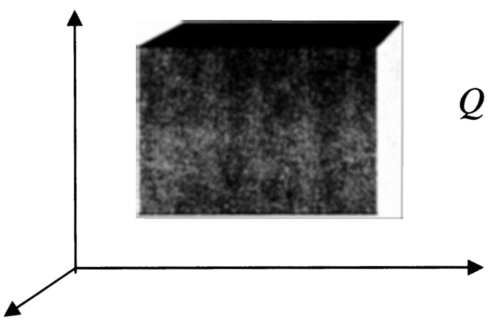
يمكن البرهنة على أنه إذا كانت الدالة f متصلة على Q فإنها قابلة للتكامل على Q.

ستقتصر دراستنا للتكامل الثلاثي على الأنواع التالية من المناطق Q في الفضاء الثلاثي. سنعتبر فيما يلي أن $w = f(x, y, z)$ دالة متصلة على Q.

النوع الأول :

المنطقة Q عبارة عن متوازي مستطيلات المعرف كما يلي :

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ c \le y \le d, m \le z \le n\right\}$$



بالتالي فإن :

$$I=\iiint_Q f(x,y,z)dV=\int_m^n\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$
$$=\int_a^b\int_m^n\int_c^d f(x,y,z)dy\,dz\,dx$$
$$=\int_c^d\int_a^b\int_m^n f(x,y,z)dz\,dx\,dy=\cdots$$

الحقيقة أن ترتيب التكامل هنا ليس ذا أهمية، أي يمكننا تغيير ترتيب التكامل دون تغيير في قيمة التكامل.

مثال (١)

احسب التكامل $\mathrm{I}=\iiint_Q 3xy^3z^2dy$

حيث Q معرفة كما يلي :

$$Q=\{(x,y,z):-1\le x\le 3,\ 1\le y\le 4, 0\le z\le 2\}$$

الحل

$$\mathrm{I}=\int_1^4\int_{-1}^3\int_0^2 3xy^2z^2dz\,dx\,dy=\int_1^4\int_{-1}^3\left[xy^3z^3\right]_0^2dxdy$$
$$=\int_1^4\int_{-1}^2 8xy^3dxdy=\int_1^4\left[4x^2y^3\right]_{-1}^3dy$$
$$=\int_1^4 32y^3dy=\left[8y^4\right]=2040\cdot$$

نأخذ ترتيبا آخر لحدود الكامل فعلى سبيل المثال :

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^3\int_0^2\int_1^4 3xy^3z^2dy\,dz\,dx=\int_0^2\int_1^4\int_{-1}^3 3xy^3z^2dx\,dy\,dz=2040$$

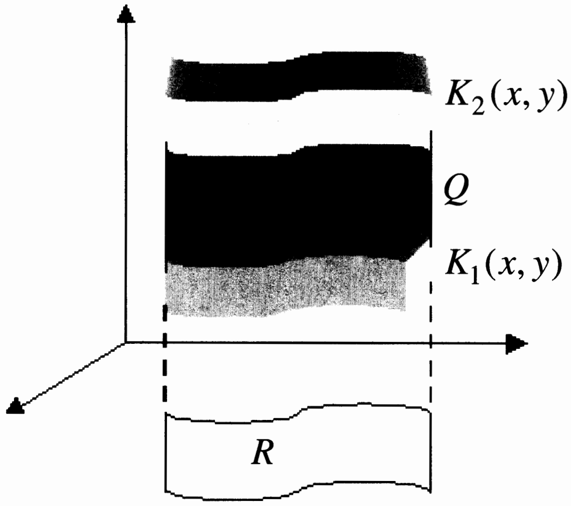
النوع الثاني :

لتكن R إما R_x أو R_y، ولتكن Q المنطقة في $\mathbb{R}^3$ المحصورة بسطحي الدالتين المتصلتين $z=K_1(x,y)$ و $z=K_2(x,y)$ لكل $(x,y)\in R$ أي أن

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: K_1(x,y)\le z\le K_2(x,y)\ \text{لكل}\ (x,y)\in R\right\}$$

أنظر شكل (٢-٢٤). عندئذٍ فإن f قابلة للتكامل على Q كما أن :

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\iint_R\left[\int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dA$$



الشكل (٢-٢٤)

على وجه الخصوص إذا كانت

(أ) $R=R_x$ ، فإن

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

(ب) $R=R_y$ ، فإن

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}\int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dx\,dy$$

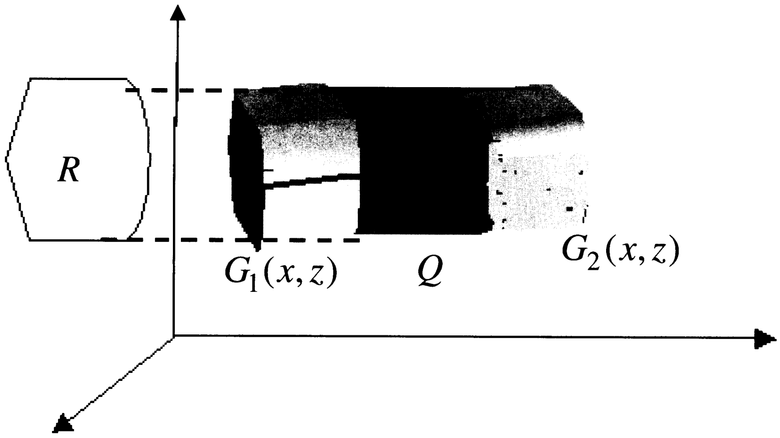
النوع الثالث:

لتكن R إما R_x أو R_z المنطقة المستوية في المستوى — xz ، ولتكن Q المنطقة في $\mathbb{R}^3$ المحصورة بسطحي الدالتين المتصلتين $y=G_1(x,z)$ و $y=G_2(x,z)$ لكل $(x,z)\in R$ أي أن

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: G_1(x,z)\le y\le G_2(x,z) \text{ لكل } (x,z)\in R\right\}$$

أنظر شكل (٢-٢٥). عندئذٍ فإن f قابلة للتكامل على Q كما أن :

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)\,dv=\iint_R\left[\int_{G_1(x,z)}^{G_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right]dA$$



الشكل (٢-٢٥)

إذا كانت R إما R_x أو R_z، فإننا نكتب التكامل المتعاقب كما في النوع الثاني (أ) و (ب) مع مراعاة المتغيرات.

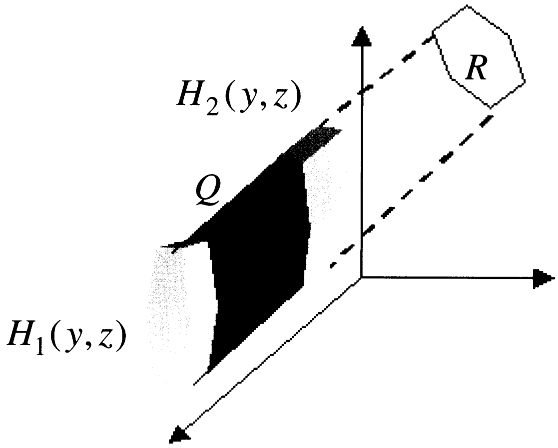
النوع الرابع:

لتكن R إما R_y أو R_z المنطقة المستوية في المستوى ـ yz، ولتكن Q المنطقة في $\mathbb{R}^3$ المحصورة بسطحي الدالتين المتصلتين $x = H_1(y,z)$ و $x = H_2(y,z)$ لكل $(y,z) \in R$ أي أن

$$Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : H_1(y,z) \leq X \leq H_2(y,z) \text{ لكل } (y,z) \in R\right\}$$

أنظر شكل (٢-٢٦). عندئذٍ فإن f قابلة للتكامل على Q كما أن :

$$\mathrm{I} = \iiint_Q f(x,y,z)\, dV = \iint_R \left[\int_{H_1(x,y)}^{H_2(x,y)} f(x,y,z)dx\right] dA$$



الشكل (٢-٢٦)

إذا كانت R إما R_x أو R_z، فإننا نكتب التكامل المتعاقب كما في النوع الثاني (أ) و (ب) مع مراعاة المتغيرات.

ملاحظة : الآن إذا كانت $f(x,y,z)=1$ فإن التكامل الثلاثي $\iiint_Q dV$ يمثل حجم المنطقة Q

ونكتب: $V=\iiint_Q dV$

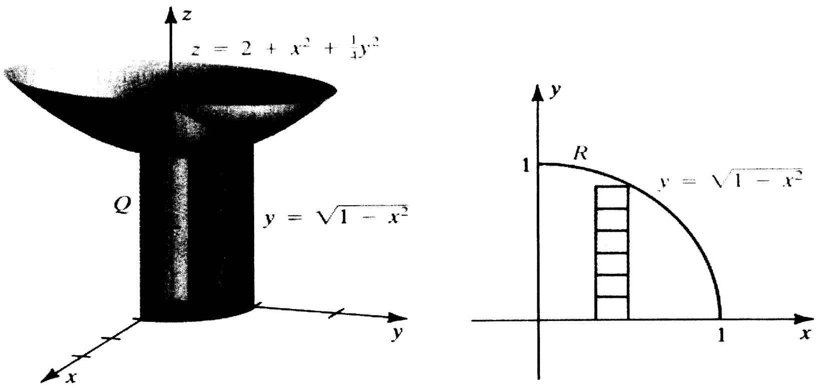
غالبا ما ستكون الأمثلة والتمارين لمناطق من النوع الأول أو الثاني، وقليلا ما توضع تمارين على النوع الثالث أو الرابع.

مثال (٢)

لتكن $w=f(x,y,z)$ دالة متصلة على المنطقة Q الواقعة في الثمن الأول والمحدودة بالمستويات الإحداثية والسطحين

$$z-2=x^2+\frac{1}{4}y^2 \text{ ، } x^2+y^2=1$$

عبر عن التكامل $I=\iiint_Q f(x,y,z)dV$ كتكامل متعاقب. وكذلك عن حجم المجسم Q.



الشكل (٢-٢٧)

الحل

المجسم Q هو :

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 2+x^2+\frac{1}{4}y^2 \text{ لكل } (x,y)\in R\right\}$$

كما هو موضح في شكل (٢-٢٧)

إذاً

$$I=\iiint_Q f(x,y,z)dV=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

أما حجم المجسم Q فهو

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+\frac{1}{4}y^2} dz\, dy\, dx \cdot$$

مثال (٣)

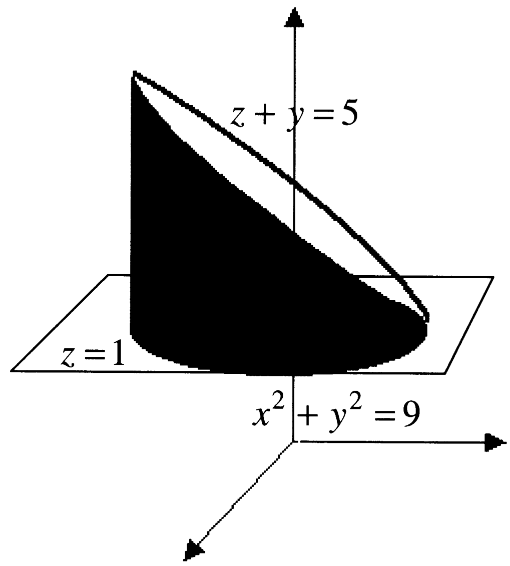
أوجد حجم الجسم المحدود بالاسطوانة $x^2 + y^2 = 9$ وبالمستويين $z = 1$ ، $x + z = 5$

الحل

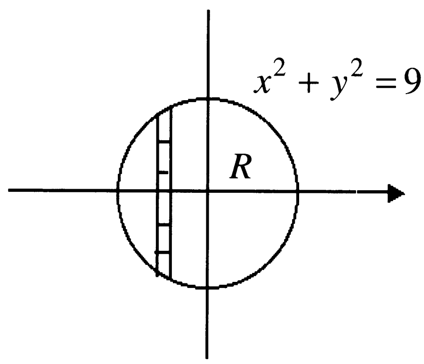
إن حدود الجسم Q هي :

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 5 - y \text{ لكــل } (x, y) \in R\right\}$$

كما هي موضحة في شكل (٢-٢٨)أ. حيث R الموضحة بالشكل (٢-٢٨)ب.



الشكل (٢-٢٨)أ



الشكل (٢-٢٨)ب

وعندئذٍ فإن حجم الجسم يعطي بالعلاقة التالية :

$$V = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{1}^{5-y} dz\, dy\, dx = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (5 - y - 1)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx = \int_{-3}^{3} \left(4y - \frac{y^2}{2}\right) \Bigg|_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$= 8 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx = 36\pi$$

لحساب التكامل نضع $x = 3 \sin\theta$.

وفي الحالة العامة لحساب التكامل الثلاثي لدالة f على مجسم Q يجب إيجاد حدود Q أي إيجاد حدود x, y, z داخل Q .

مثال (٤)

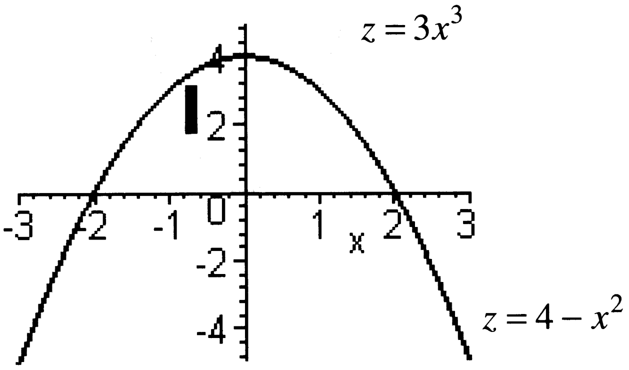
أوجد حجم المجسم Q المحدود بالسطوح $z = 3x^2,\ z = 4 - x^2,\ y + z = 6,\ y = 0$.

الحل

المجسم Q هو:

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le 6 - z \text{ لكل } (x, z) \in R\right\}$$

حيث R هي المنطقة المستوية الموضحة بالشكل (٢-٢٩).



الشكل (٢-٢٩)

بالنظر إلى R نجد أن $3x^2 \le z \le 4 - x^2$ وأن $-1 \le x \le 1$

وبالتالي فإن

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2}\int_{0}^{6-z} dy\, dz\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2} (6 - z)dz\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left[6z - \frac{1}{2}z^2\right]\Bigg|_{3x^2}^{4-x^2} dx = \frac{304}{15}$$

مثال (٥)

أوجد حجم المجسم المحدد بالسطحين $z = 8 - x^2 - y^2$ ، $z = x^2 + 3y^2$.

الحل

أن تقاطع السطحين هو منحنى معادلته ناتجة من العلاقة الآتية : $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$

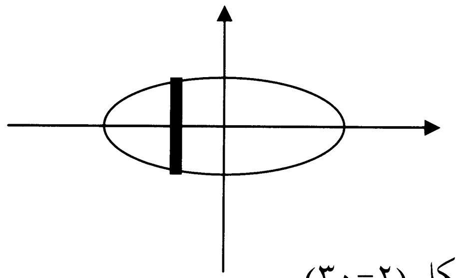
$\frac{y^2}{1/2} + x^2 = 4$ وهي معادلة قطع ناقص .

وبالتالي فإن كل نقطة (x, y, z) واقعة داخل المجسم تقع أيضاً في المنطقة R أي داخل القطع الناقص حدود المجسم Q هي:

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+3y^2\le z\le 8-x^2-y^2 \text{ لكل } (x,y)\in R\right\}$$

حيث R المنطقة المستوية الموضحة بالشكل (٢-٣٠).

ومن ذلك يكون الحجم المطلوب هو



الشكل (٢-٣٠)

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2/2}}^{\sqrt{4-x^2/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\ dy\ dx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2/2}}^{\sqrt{4-x^2/2}}(8-2x^2-4y^2)\ dy\ dx$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=8\pi\sqrt{2}$$

لحساب التكامل الأخير وضعنا $x=2sin\theta$.

(٢-١٠) تـــمـــارين

في التمارين من ١- ١٠ احسب التكاملات المتعاقبة التالية.

١- $\int_{0}^{3}\int_{-1}^{1}\int_{2}^{4}(y-xz)\ dzdydx$

٢- $\int_{0}^{3}\int_{-1}^{1}\int_{2}^{4}(y-xz)\ dydxdz$

٣- $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{x}\int_{x-y}^{x+y}(z-2x-y)\ dzdydx$

٤- $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}x\cos z\ dydxdz$

٥- $\int_{0}^{\ln 3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{y}(z^2+1)\ e^{y^2}\ dxdzdy$

٦- $\int_{0}^{\sqrt{\pi/6}}\int_{0}^{y}\int_{0}^{y}(1+yz\cos xz^2)\ dxdzdy$

٧- $\int_{-15}^{13}\int_{1}^{e}\int_{0}^{1/\sqrt{x}}z(\ln x)^2\ dzdxdy$

٨- $\int_{1}^{2}\int_{2}^{z}\int_{0}^{\sqrt{3}\,y}\frac{y}{x^2+y^2}dx\ dy\ dz$

٩- $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\sin z}x^2\sin y\ dxdydz$

١٠- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\cos z}^{\cos z}\int_{-\cos zy}^{\cos zy}x\cos zy\ dxdydz$

١١- $\int_{-1}^{2}\int_{1`}^{y+2}\int_{e}^{e^2}\frac{x+y}{z}\ dzdxdy$

في التمارين من ١٣- ١٧ احسب التكامل.

١٢- $\iiint\limits_Q zdV$ ، حيث Q المجسم في الثمن الأول المحدود بالأسطوانة $y^2+z^2=1$ ، والمستويات $y=x$ و $x=0$.

١٣- $\iiint\limits_Q \cos\left(\frac{z}{y}\right) dv$ ، حيث Q هي :

$$Q=\left\{(x,y,z): y\le x\le\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}\le y\le\frac{\pi}{2}\ \ ,\ 0\le z\le x\,y\right\}$$

١٤- $\iiint\limits_Q e^y\ dV$ ، حيث Q الجسم المحدود بالمستويات $y=1$ ، $z=0$ ، $y=x$ ، $y=-x$ و $z=y$.

١٥- $\iiint\limits_Q ye^{xy}\ dV$ ، حيث Q المكعب المحدود بالمستويات $x=1$ ، $x=3$ ، $y=0$ ، $y=2$ و $z=-2$ ، $z=0$.

١٦- $\iiint\limits_Q xydV$ ، حيث Q المجسم في الثمن الأول المحدود من أعلى بنصف الكرة $z=\sqrt{4-y^2-z^2}$ ومن الجوانب والأسفل بالمستويات الإحداثية.

١٧- $\iiint\limits_Q zydV$ ، حيث Q المجسم في الثمن الأول المحدود من أعلى بالمستوى $z=1$ ومن الأسفل بالخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

في التمارين من ١٩- ٢٠ أحسب حجم المجسم Q.

١٨-المجسم Q المحدود بالسطوح $z=5x^2+5y^2$ و $z=6-6x^2-y^2$.

١٩- المجسم Q في الثمن الأول والمحدود بالسطح $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ وبالمستويات الإحداثية.

$$(a>0\ ;b>0\ ;c>0)$$

٢٠- المجسم Q $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(٢-١١)

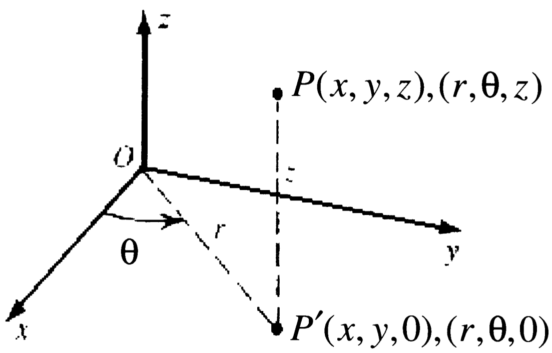
التكامل الثلاثي بالإحداثيات الأسطوانية والكروية

Triple Integral In Cylindrical And Sphirical Coordinates

أوضحنا في التكامل الثنائي عدم إمكانية حساب بعض التكاملات أو صعوبة حسابها بالإحداثيات الديكارتية. الوضع نفسه يتكرر في التكامل الثلاثي. من هنا دعت الحاجة إلى إدخال

إحداثيات جديدة تمكننا من حساب هذه التكاملات. سندرس في هذا الفصل نوعين من الإحداثيات هما الإحداثيات الأسطوانية والكروية.

(٢-١١-١) الإحداثيات الأسطوانية: لتكن (x, y, z) الإحداثيات الديكارتية للنقطة P في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$، ولتكن (x, y) إحداثيات النقطة P' وهي مسقط P في المستوى-xy. لتكن (r, θ) الإحداثيات القطبية للنقطة P'. بالتالي الإحداثيات (r, θ, z) تعرف النقطة P تعريفا تاما. تسمى هذه بالإحداثيات الأسطوانية للنقطة P. أنظر شكل (٢-٣١) .



الشكل (٢-٣١)

بالتالي إذا أعطينا الإحداثيات الديكارتية للنقطة فإنه يمكننا تحديد الإحداثيات الأسطوانية بالاستعانة بالمعادلات التالية:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \tan\theta = \frac{y}{x} \ (x \neq 0)$$

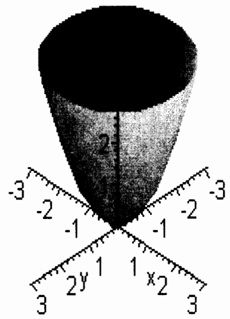
وإذا أعطينا الإحداثيات الأسطوانية للنقطة فإنه يمكننا تحديد الإحداثيات الديكارتية بالاستعانة بالمعادلات التالية:

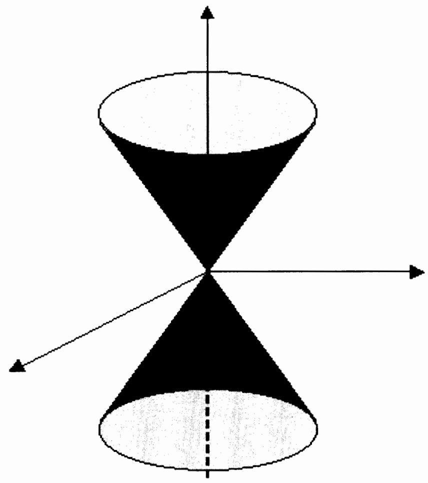
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

الجدول التالي يبين بعض السطوح ومعادلاتها بكلا النظامين أنظر شكل (٢-٣٢) (فقط تم رسم المخروط الثنائي والسطح المكافيء الدائري).

السطح	المعادلة بالإحداثيات الديكارتية	المعادلة بالإحداثيات الإسطوانية
الاسطوانة القائمة	$x^2 + y^2 = a^2$	$r = a$
الكرة	$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	$r^2 + z^2 = a^2$
السطح المكافيء الدائري	$x^2 + y^2 = az$	$r^2 = az$
السطح المخروطي الثنائي	$x^2 + y^2 = a^2 z^2$	$r = az$

لاحظ أن معادلة الاسطوانة بهذه الإحداثيات هي $r = a$ ولبساطة هذه المعادلة فقد كانت السبب وراء تسمية هذا النظام بالإحداثيات الأسطوانية.





الشكل (٢-٣٢)

مثال (١)

أوجد معادلة السطحين التاليين بالإحداثيات الديكارتية

(أ) $z = r^2$ (ب) $r = 4\sin\theta$

الحل

(أ) $z = r^2 = x^2 + y^2$ وهي معادلة سطح مكافئ دائري. أنظر الجدول.

(ب) بضرب الطرفين في r نحصل على $r^2 = 4r\,sin\theta$ ، وبالتالي فإن $x^2 + y^2 = 4y$، أي أن $x^2 + (y-2)^2 = 4$، وهي معادلة اسطوانة محورها مواز للمحور oz ونصف قطر قاعدتها 2، ومحورها يمر بالنقطة $(0,2,0)$. أنظر الجدول.

مثال (٢)

أكتب معادلتي السطحين التاليين بالإحداثيات الأسطوانية

(أ) $z^2 = x^2 - y^2$ (ب) $z^2 = x^2 + y^2$

الحل

(أ) $z^2 = x^2 - y^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta$

(ب) $z^2 = x^2 + y^2 = r^2$ ومنه $r = z$ وهي معادلة سطح مخروط ثنائي. أنظر الجدول.

(٢-١١-٢) التكامل الثلاثي بالإحداثيات الأسطوانية:

من الملائم أحيانا استخدام الإحداثيات الأسطوانية لحساب التكاملات الثلاثيـة، وأبسط الحالات عندما تكون f دالة بالمتغيرات (r,θ,z) معرفة ومتصلة على المنطقة

$$Q=\{(r,\theta,z): a\le r\le b,\ \ c\le\theta\le d,\ m\le z\le n\}$$

فإن f قابلة للتكامل على Q كما أن :

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)dv=\int_m^n\int_c^d\int_a^b f(r,\theta,z)rdrd\theta dz$$

هناك خمس ترتيبات أخرى لحساب هذا التكامل.

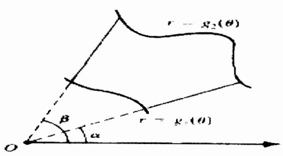
يمكن حساب التكامل الثلاثي أيضا لمناطق قطبية أكثر تعقيدا من تلك في الفقرة السابقة. على وجه التحديد إذا كانت R المنطقة القطبية التي ناقشناها عند دراستنا للتكامل الثنائي وإذا كانت

$$Q=\{(r,\theta,z): K_1(r,\theta)\le z\le K_2(r,\theta),\ \text{لكل}\ (r,\theta)\in R\}$$

حيث إن K_2 , K_1 دالتان متصلتان على المنطقة R . بالتالي فإن

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(r,\theta,z)dV=\iint_R\Big[\int_{K_1(r,\theta)}^{K_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)rdz\ drd\theta\Big]$$

وبشكل خاص، إذا كانت $R=R_r$ المنطقة القطبية في تعريف (٢-٤-٧) والموضحة في شكل (٢-٣٣) فإنه يمكن حساب التكامل الثلاثي للدالة f على المنطقة Q كما يلي.



الشكل (٢-٣٣)

(٢-١١-٣) نظرية

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)dV=\int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{K_1(r,\theta)}^{K_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)rdzdrd\theta$$

سبق وأن بينا أنه تحت شروط معينة فإن

$$\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\iint_R\left[\int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dA$$

ونحن نعلم كيف نجد التكامل الثنائي المتعاقب بالإحداثيات القطبية وذلك حسب نظرية (٢-٧-٦). باستخدام كليهما نحصل على النظرية التالية:

(٢-١١-٤) نظرية

لتكن Q المنطقة المجسمة المحدودة بسطحي الدالتين K_1 و K_2 المعرفتين والمتصلتين على المنطقة $R=R_r$، فإن

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV=\int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{K_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{K_2(r\cos\theta,r\sin\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdzdrd\theta$$

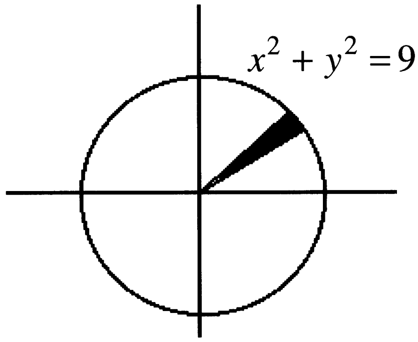
مثال (٣)

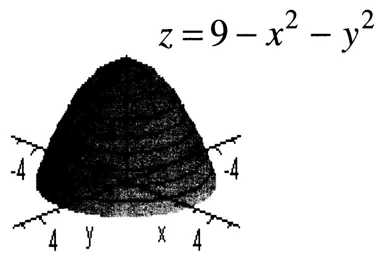
أحسب التكامل

$$I=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2 dz\,dy\,dx$$

الحل

المجسم Q والمنطقة R موضحة بالشكل (٢-٣٤)





الشكل (٢-٣٤)

نلاحظ صعوبة في أيجاد هذا التكامل كما هو معطى، لذلك سوف نستخدم الإحداثيات الأسطوانية .

من شكل (٢-٣٤) نلاحظ أن المنطقة Q بالإحداثيات الأسطوانية هي.

$$Q=\{(r,\theta,z):0\le z\le 9-r^2,\ \text{لكل}\ (r,\theta)\in R\}$$

والمنطقة المستوية R هي.

$$R=\{(r,\theta,z):\ 0\le r\le 3, 0\le\theta\le 2\pi\ \}$$

بالتالي من نظرية (٢-١١-٤) فإن

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2 dz\,dy\,dx=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{0}^{9-r^2} r^2\cos^2 r dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3} r^2\cos^2\theta\,(9-r^2)dr\,d\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\cos^2\theta(9r^3-r^5)dr\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\cos^2\theta\left[\frac{9r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^3 d\theta=\frac{243}{4}\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{243}{4}\pi$$

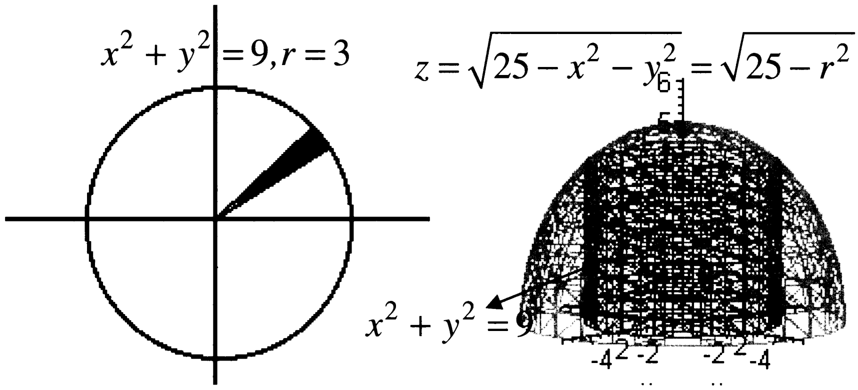
مثال (٤)

أحسب حجم المجسم Q المحدود من الأعلى بنصف الكرة $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ ، ومن الأسفل بالمستوى xy — ومن الجوانب بالاسطوانة $x^2+y^2=9$.

الحل

المجسم Q والمنطقة R موضحة بالشكل (٢-٣٥)

كما في المثال السابق فإن استخدام الإحداثيات الديكارتية لحساب الحجم سيكون صعبا. لذلك سنستخدم الإحداثيات الأسطوانية.



الشكل (٢-٣٥)

من شكل (٢-٣٥) نجد أن

$$Q = \left\{ (r,\theta,z) : 0 \le z \le \sqrt{25 - r^2},\ \text{لكـل}\ (r,\theta) \in R \right\}$$

وأن المنطقة المستوية

$$R = \{ (r,\theta) :\ 0 \le r \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

بالتالي فإن الحجم المطلوب هو :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} r dz\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r\sqrt{25 - r^2}\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(25 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{61}{3} d\theta = \frac{122}{3}\pi$$

مثال (٥)

أحسب التكامل $I = \iiint\limits_Q 2y\ (x^2 + z^2)^{3/2} dV$، حيث Q المجسم المحدود بالأسطوانة $x^2 + z^2 = 1$ والمستوى $y = 1$ ونصف الكرة $y = -\sqrt{1 - x^2 - z^2}$ (أنظر شكل (٢-٣٦).

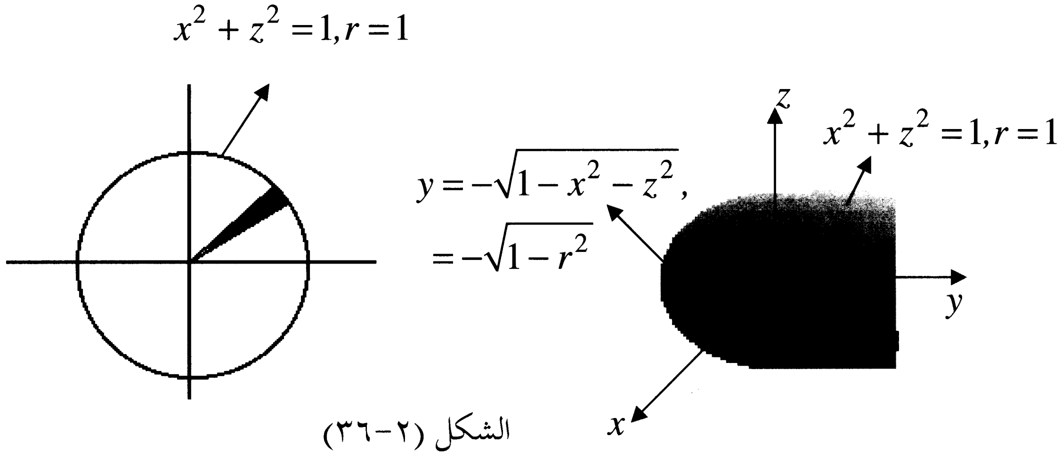
الحل

من الشكل (٢-٣٦) فإن

$$Q = \left\{ (r,\theta,y) : 1 \le y \le -\sqrt{1 - r^2},\ \text{لكـل}\ (r,\theta) \in R \right\}$$

وأن

$$R=\{(r,\theta):\ 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi\ \}$$



الشكل (٢-٣٦)

بالتالي، فإن

$$I=\iiint_Q 2y(x^2+z^2)^{3/2}dV=\iint_R\Big[\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{1} 2y\,(x^2+z^2)^{3/2}dy\Big]\,dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{1} 2y\ \ (r^4)\,dydrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^4)\Big[y^2\Big]_{-\sqrt{1-r^2}}^{1}drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^6)\,drd\theta=\frac{2\pi}{7}$$

مثال (٧)

أحسب حجم المجسم Q المحدود من الأعلى بنصف الكـرة $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ ، ومـن الأسفل بالمستوى ـ xy ومن الجوانب بالاسطوانة $r=4\cos\theta$.

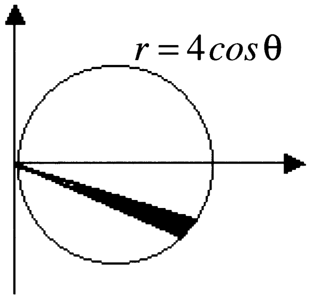
الحل

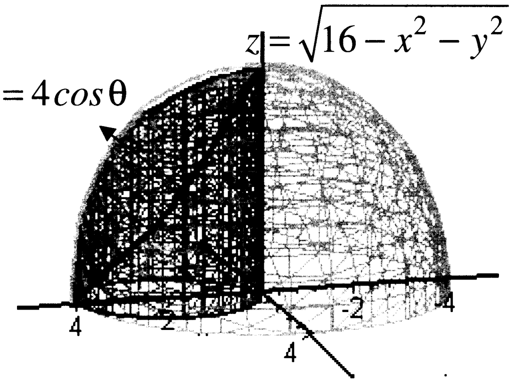
المجسم Q والمنطقة R موضحة بالشكل (٢-٣٧). ومن الشكل فإن

$$Q=\left\{(r,\theta,z):0\le z\le\sqrt{16-r^2},\ \text{لكل}\ (r,\theta)\in R\right\}$$

وأن

$$R=\left\{(r,\theta):\ 0\le r\le 4\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$





الشكل (٢-٣٧)

بالتالي، فإن

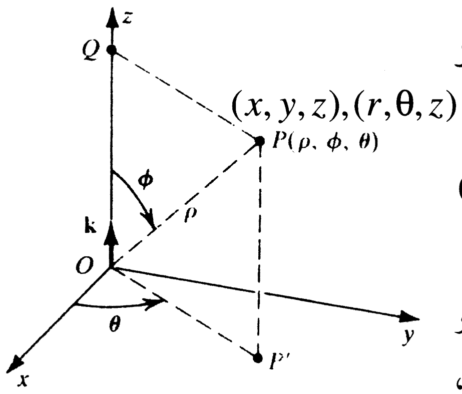
$$V = \iiint_Q dV = \iint_R [\int_0^{\sqrt{16-r^2}} dz]\, dA$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r dz dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} r[z]_0^{\sqrt{16-r^2}}\, dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} (r\sqrt{16-r^2})\, dr d\theta = \frac{8\,(3\pi-4)}{9}$$

(٢-١١-٥) الإحداثيات الكروية

آخر نظم الإحداثيات والتي سنناقشها هو نظام الإحداثيات الكروية. نظام الإحداثيات هذا يبسط حساب العديد من التكاملات وبالذات تلك التي تحوي كرة أو مخروطا. لتكن (x, y, z) و (r, θ, z) الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية للنقطة P في الفضاء الثلاثي، بحيث أن $0 \le \theta \le 2\pi$ و $r \ge 0$. ليكن ρ طول القطعة المستقيمة $\rho = |OP|$، أنظر شكل (٢-٣٨).



الشكل(٢-٣٨)

إذا كان $\rho \ne 0$، ندع ϕ تساوي الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{OP}$ مع الاتجاه الموجب لمحور z، بالتالي فإن $0 \le \phi \le \pi$. وإذا كان $\rho = 0$ فإن ϕ تكون اختيارية. أخيرا لا زلنا نعتبر θ الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{OP'}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x. يتضح أن الكميات الثلاث ρ، ϕ و θ تحدد النقطة P تحديدا تاما. يسمى الثلاثي (ρ, ϕ, θ) بالإحداثيات الكروية للنقطة P.

العلاقة بين نظم الإحداثيات الثلاث الديكارتية والأسطوانية والكروية:

نلاحظ من شكل (٢-٣٦) أن OP عمودي على OP'. كذلك الزاوية $\widehat{P'OP}$ تساوي ϕز من المثلث OPP' نجد أن

$$r = \rho \sin\phi \quad \text{و} \quad z = \rho \cos\phi$$

هذه المعادلات وصيغ الإحداثيات القطبية

$$y = r \sin\theta \quad \text{و} \quad x = r \cos\theta$$

معا تعطي العلاقات التالية بين الإحداثيات الديكارتية والكروية

$$x = r\cos\theta = \rho \sin\phi \cos\theta$$
$$y = r\sin\theta = \rho \sin\phi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\phi$$

مثال (٨)

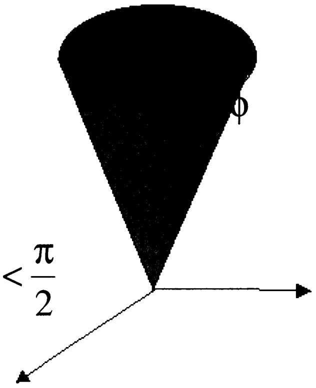
إذا كان $(8, 2\pi/3, -\pi/6)$ الإحداثيات الكروية للنقطة P. أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة P.

الحل

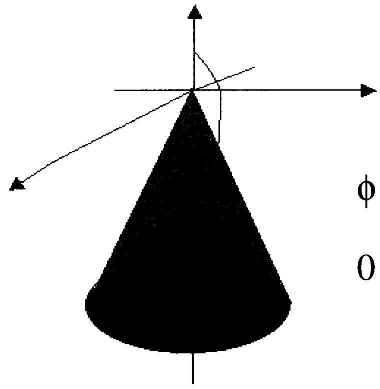
الإحداثيات الكروية للنقطة P هي

$$x = 8\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6$$
$$y = 8\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$
$$z = 8\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

إن الكرات التي مركزها نقطة الأصل لها معادلات بسيطة في الإحداثيات الكروية. بحق، فإن الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a لها المعادلة $\rho = a$. بالمثل، إذا كانت $0 < \alpha < \pi$ و $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$، فإن السطح الذي تمثله المعادلة $\phi = \alpha$ هو مخروط زاويته بالنسبة للاتجاه الموجب لمحور z — هي α. لاحظ أنه إذا كانت $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، فإن ناب المخروط إلى أسفل، بينم إذا كانت $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$، فإن ناب المخروط إلى أعلى. أنظر شكل (٢-٣٩) (أ) و (ب) على الترتيب.



الشكل (٢-٣٩) (أ)



الشكل (٢-٣٩) (ب)

الجدول التالي يبين بعض السطوح ومعادلاتها بكلا النظامين.

السطح	المعادلة بالإحداثيات الديكارتية	المعادلة بالإحداثيات الكروية
الكرة	$x^2+y^2+z^2=a^2$	$\rho=a$
المخروط	$a>0,\ z^2=a(x^2+y^2)$	$\phi=\alpha$

إن السبب وراء التسمية بالإحداثيات الكروية يعود إلى أن الكرة $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ لها أبسط معادلة بهذه الإحداثيات.

مثال (٩)

أوجد معادلة السطح بالإحداثيات الديكارتية إذا علمت أن معادلته بالإحداثيات الكروية هي $\rho=\sin\phi\cos\theta$

الحل

بضرب الطرفين في ρ نجد

$$\rho^2 = 2\rho\ \sin\phi\cos\theta$$

بالتالي

$$x^2+y^2+z^2=2x$$

وبإكمال المربع بالنسبة للمتغير x، نحصل على

$$(x-1)^2+y^2+z^2=1$$

وهي معادلة كرة مركزها $(1,0,0)$ ونصف قطرها 1 .

مثال (١٠)

حول المعادلات التالية إلى الصيغة الأسطوانية والكروية.

(أ) $x^2-y^2-z^2=1$ (ب) $6x=x^2+y^2$

الحل

(أ) بالإحداثيات الأسطوانية : لدينا $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

وعليه فإن $r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - z^2 = 1$

أي أن $r^2\cos 2\theta = 1 + z^2$

أما بالإحداثيات الكروية يكون لدينا

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

بالتعويض عن z, y, x نجد أن :

$$\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\phi = 1$$

أي أن

$$\rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \rho^2\cos^2\phi = 1$$

وبالتالي فإن :

$$\rho^2\sin^2\phi\cos 2\theta - \rho^2\cos^2\phi = 1$$

إن الإحداثيات الكروية والأسطوانية تفيد في حل التكامل المعطى بالإحداثيات الديكارتية .

أما العنصر التفاضلي dV بالإحداثيات الأسطوانية فهو

$$dV = r\ dr\ d\theta\ dz$$

(٢-١١-٦) التكامل الثلاثي بالإحداثيات الكروية :

هناك العديد من التكاملات التي يسهل حسابها باستخدام الإحداثيات الكروية، وبالذات التكاملات التي تحوي الصيغة $x^2 + y^2 + z^2$، أو أن المجسم المراد حساب التكامل عليه مخروط أو كرة عل ألا يفهم أن هذه قاعدة عامة فقد يكون أحيانا الأفضل استخدام النظم الأخرى.

يمكن البرهنة على أن حجم المنطقة الكر

(٢-١١-٧) تعريف

نعرف المنطقة الكروية الأولية ΔQ بأنها المنطقة المحدودة بالسطوح

$\rho = \rho_0$ و $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_0$ و $\phi = \phi_1$ ، $\theta = \theta_0$ و $\theta = \theta_1$ ، بحيث إن

$0 \le \rho_0 \le \rho_1$ ، $0 \le \phi_0 \le \phi_1 \le \pi$ ، و $0 \le \theta_0 \le \theta_1 \le 2\pi$.

وية الأولية هو

$$\Delta V = \rho^2\, sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

وبالتالي فإن العنصر التفاضلي للحجم بالإحداثيات الكروية هو

$$dV = \rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

(٢-١١-٨) نظرية

ليكن α و β أعدادا حقيقية بحيث $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$. لتكن h_1 و h_2 و F_1 و F_2 دوال متصلة بحيث $0 \le h_2 \le h_1$ و $0 \le F_1 \le F_2$. ليكن Q المجسم بحث أنه لكل $(\rho,\phi,\theta) \in Q$ فإن

$$\alpha \le \theta \le \beta$$
$$h_1(\theta) \le \phi \le h_2(\theta)$$
$$F_1(\phi,\theta) \le \rho \le F_2(\phi,\theta)$$

إذا كانت f دالة متصلة على Q، فإن

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

عند إيجاد حدود التكامل بالإحداثيات الكروية لا بد من تذكر ما يلي:

ρ مقياس المسافة من نقطة الأصل، بالتالي $0 \le \rho$.

ϕ مقياس الزاوية من الإتجاه الموجب لمحور — z.

θ مقياس الزاوية من الإتجاه الموجب لمحور — x.

قبل البدأ بإعطاء بعض الأمثلة، دعنا نوجد زاوية المخروط. نعلم أن معادلة المخروط هي $(z^2 = a(x^2+y^2)$, $a>0$. وبالتعويض بالإحداثيات الكروية نحصل على $\rho^2 cos^2\phi = a\rho^2 sin^2\phi$، وبالتالي $\tan^2\phi = \frac{1}{a}$. أي أن

$$\tan\phi = \pm\sqrt{\frac{1}{a}} = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$$

الأمثلة التالية توضح فائدة استخدام الإحداثيات الكروية.

مثال (١١)

أوجد حجم المجسم المحدود من الأعلى بالسطح $x^2+y^2+z^2=16$ ومن الأسفل بالسطح $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

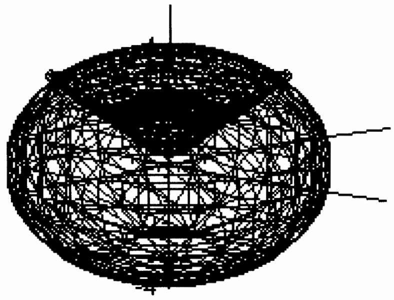
الحل

نستخدم الإحداثيات الكروية لحساب الحجم المطلوب.

من الفقرة السابقة فإن $\tan\phi = 1$ أي أن $\phi = \frac{\pi}{4}$

ومنه فإن $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$، من الواضح أن $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 4$. بالتالي فإن

$$Q=\left\{(\rho,\phi,\theta):\ 0\le\rho\le 4,0\le\phi\le\frac{\pi}{4}\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$



الشكل (٢-٤٠)

وبالتالي فإن

$$V=\iiint\limits_Q dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^4\ \rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^3}{3}\sin\phi\right]_0^4\ d\phi\ d\theta$$

$$=\frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ \sin\phi\ \ d\phi\ \ d\theta=\frac{64}{3}\ (1-\frac{\sqrt{2}}{2})2\pi=\frac{64}{3}\ (2-\sqrt{2})\ \pi\ .$$

مثال (١٢)

احسب التكامل

$$I=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\ \ z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dz\,dy\,dx$$

الحل

هناك بعض الصعوبة في حساب هذا التكامل ، لذا نكتب هذا التكامل بالإحداثيات الكروية ونتبع الخطوات التالية لحسابه. من حدود التكامل نلاحظ أن

$$0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,$$
$$-2\le x\le 2\ ,$$
$$-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$$

أي أن منطقة التكامل هي النصف العلوي من الكرة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2=4$.

أما هذه المنطقة فإن حدودها بالإحداثيات الكروية هي

$$Q=\left\{(\rho,\phi,\theta):0\le\rho\le 2,0\le\phi\le\frac{\pi}{2},0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

أما الدالة

$$f(x,y,z)=z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

فإن صيغتها بالإحداثيات الكروية هي :

$$f(\rho\sin\phi\ \cos\theta\ ,\ \rho\ \sin\phi\sin\theta\ ,\ \cos\theta\cos\phi)=\rho^3\cos^2\phi$$

وعليه فإن

$$I=\iiint_Q f(x,y,z)dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 (\rho^3\cos^2\phi)\,\rho^2\sin\phi\ d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \rho^5\cos^2\phi\ \sin\phi\ d\rho\, d\theta=\frac{32}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\ \sin\phi\ d\phi\ d\theta$$

$$=\frac{32}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{32}{9}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{64\pi}{9}.$$

ملاحظة :

هناك بعض التكاملات التي يمكن حسابها باستخدام الإحداثيات الأسطوانية و الكروية.

مثال (١٣)

احسب حجم الكرة التي نصف قطرها a ومركزها $(0,0,0)$.

الحل

(أ) بالإحداثيات الأسطوانية :

نظرا لتناظر الكرة بالنسبة للمستوى oxy نجد :

$$I=2\iiint_Q dV$$

حيث

ومن ثم فإن
$$Q=\left\{(r,\theta,z):0\le z\le\sqrt{a^2-r^2},\ 0\le r\le a\ ,0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

$$I=2\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz\ dr\ d\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^a r(\sqrt{a^2-r^2})\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a d\theta=2\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}d\theta=\frac{4\pi}{3}a^3.$$

(ب) بالإحداثيات الكروية

أيضاً لدينا
$$\mathrm{I}=2\iiint_Q dV$$

$$Q=\left\{(\rho,\phi,\theta):0\le\rho\le a,\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\ ,0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

وبالتالي فإن

$$I=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\ \rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta=\ 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{a}\ \sin\phi\ d\phi\ d\theta$$

$$=\ \frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\ d\phi\ d\theta=\ \frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi}[\cos\phi]_0^{\pi/2}\ d\theta$$

$$=\ \frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\ d\theta=\frac{4}{3}a^3\pi\cdot$$

(٢-١٢) تـــمـــارين

في التمارين من ١- ٨ اكتب المعادلات بالإحداثيات الأسطوانية.

١- $y=-4$ ٢- $x=2z$

٣- $x+y+z=3$ ٤- $x^2+y^2+z^2=16$

٥- $x^2+y^2+z=1$ ٦- $x^2+y^2+z^2=0$

٧- $4x^2+4y^2-z^2=0$ ٨- $x^2+y^2+3z^2=9$

في التمارين من ٩-١٤ أحسب التكامل المتعاقب

٩- $\int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_0^{5} e^z r dz dr d\theta$ ١٠- $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{1-2\cos^2\theta}\int_0^{1} r\sin\theta\ dzdrd\theta$

١١- $\int_0^{\pi/4}\int_0^{1+\cos\theta}\int_0^{r} 1 dzdrd\theta$ ١٢- $\int_{-\pi/2}^{0}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r^2} r^2\cos\theta\ dzdrd\theta$

١٣- $\int_0^{\pi/2}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\sin\theta dzdrd\theta$

١٤- $\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dz\,dx\,dy$

في التمارين ١٥- ١٧ عبر عن التكامل الثلاثي كتكامل متعاقب بالإحداثيات الأسطوانية، ثم احسبه.

١٥- $\iiint_Q(x^2+y^2)\ dV$ ،حيث Q الجسم المحدود من أعلى بالأسطوانة $x^2+y^2=1$ والمستويين $z=0$ و $z=4$.

١٦- $\iiint_Q z\ dV$ ، حيث Q جزء القرص $x^2+y^2+z^2\le 1$ الواقع في الثمن الأول.

١٧- $\iiint_Q y^2\ dV$ ، حيث Q الجسم المشترك بين الأسطوانة $x^2+y^2=1$ والكرة $x^2+y^2+z^2=4$.

في التمارين من ١٨- ٢٥ احسب حجم الجسم Q.

١٨- الجسم المحدود بالسطوح $x^2 + y^2 = az$، $x^2 + y^2 = 4ay$، $z = 0$، حيث $a > 0$.

١٩- الجسم المحدود من أعلى بالكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ومن الأسفل بالسطح المكافيء الدائري $z = x^2 + y^2$.

٢٠- الجسم المحدود من أعلى بالكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ومن أسفل بالمستوى $z = 1$.

٢١- الجسم المحدود من أعلى بالكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ومن الجوانب بالجزء العلوي للمخروط $z^2 = 3x^2 + 3y^2$.

٢٢- الجسم المحدود من أعلى بالسطح المكافيء $z = 1 - x^2 - y^2$ ومن الأسفل بالمستوى $z = -3$.

٢٣- الجسم داخل الكرة $r^2 + z^2 = a^2$ والأسطوانة $r = a\sin\theta$.

٢٤- الجسم المحدود من أعلى بالمستوى $z = y$ ومن الأسفل بالسطح المكافيء $z = x^2 + y^2$.

٢٥- الجسم المحدود من أعلى بالمخروط $z = 8 - \sqrt{x^2 + y^2}$، ومن الجوانب بالأسطوانة $x^2 + y^2 = 2x$ ومن الأسفل بالمستوى xy.

في التمارين من ٢٦-٢٩ احسب الإحداثيات الديكارتية للنقاط المعطاة بالإحداثيات الكروية التالية.

٢٦- $(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})$

٢٧- $(3,\frac{\pi}{42},\frac{4\pi}{3})$

٢٨- $(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{4})$

٢٩- $(1,0,\frac{7\pi}{6})$

في التمارين من ٣٠- ٣٣ احسب الإحداثيات الكروية للنقاط المعطاة بالإحداثيات الديكارتية التالية.

٣٠- $(1,0,1)$

٣١- $(2,2,2\sqrt{2}/3)$

٣٢- $(3,0,0)$

٣٣- $(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},-4\sqrt{3})$

في التمارين ٣٤-٣٧ احسب التكامل المتعاقب.

٣٤- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$

٣٥- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_1^3 \rho^3 \cos\phi \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$

٣٦- $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$

٣٧- $\int_0^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 \rho^4 \sin^2\phi \cos^2\theta \, d\rho d\phi d\theta$

في التمارين ٣٨-٤٣ عبر عن التكامل المعطى كتكامل متعاقب بالإحداثيات الكروية، ثم احسبه.

٣٨- $\iiint_Q (x^2 + y^2)\, dV$، حيث Q القرص المغلق $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

٣٩- $\iiint_Q x^2\, dV$ ، حيث Q المجسم بين الكرة $x^2+y^2+z^2=4$ والكرة $x^2+y^2+z^2=9$.

٤٠- $\iiint_Q (x^2+y^2+z^2)^2\, dV$ ، حيث Q المجسم المحدود من أعلى بالكرة $x^2+y^2+z^2=1$ ومن الأسفل بالجزء العلوي للمخروط $z^2=x^2+y^2$.

٤١- $\iiint_Q \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dV$ ، حيث Q المجسم فوق المستوى xy والمحدود بالمخروط $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ والكرتين $x^2+y^2+z^2=9$ و $x^2+y^2+z^2=81$.

٤٢- $\iiint_Q (z^2+1)\, dV$ ، حيث Q المجسم في الثمن الأول المحدود بالمستويات الإحداثية والكرتين $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=2$.

٤٣- $\iiint_Q \frac{dV}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ ، حيث Q المجسم المحدودة بالكرتين $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2+z^2=b^2$ ، حيث $a>b>0$.

في التمارين من ٤٤-٤٩ احسب حجم المجسم Q.

٤٤- المجسم المحدود من أعلى بسطح الكرة $x^2+y^2+z^2=4z$ ومن الأسفل بسطح المخروط $x^2+y^2=z^2$.

٤٥- المجسم المشترك للكرتين $x^2+y^2+z^2=9$ و $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، أدرس الحالة عندما $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

٤٦- المجسم المحدود بالسطح $z=4-x^2-y^2$ والمستوى xy .

٤٧- المجسم المحدود بالسطوح $z=x^2-y^2$ ، $z=2x$.

٤٨- المجسم المحدد بين السطحين $\rho=1$ ، $\phi=\frac{\pi}{4}$.

٤٩- المجسم في الثمن الأول المحدود بالسطحين $z=x^2+y^2+1$, $x^2+y^2=25$.

(١٣-٢)

تطبيقات التكامل الثنائي والثلاثي •

Applications Of The Double And Triple Integral

٢-١٣-١ العـــــزم ومركز الثقل لصفيحة

لتكن T صفيحة لها شكل المنطقة R في المستوى xy ولنعرف أن الكثافة السطحية (الكتلة لوحدة المساحة) عند النقطة (x, y) هي $\rho(x, y)$ حيث ρ دالة متصلة على R. إذا كان $p = \{R_i\}$ التوزيع الداخلي إلى R فإن (u_i, v_i) ترمز إلى نقطة في R_i. الرمز T_i يمثل الجزء من T الذي يقابل R_i. حيث ρ متصلة فإن أي تغيير في (x, y) يعطي تغيير صغير في $\rho(x, y)$ أي تكون ρ ثابتة تقريباً على R_i وبالتالي إذا كانت $\|p\| \cong 0$ فإن كتلة T_i ممكن أن تقرب بالكمية $\rho(u_i, v_i)\, \Delta A_i$ حيث ΔA_i مساحة R_i المجموع $\sum_i \rho(u_i, v_i)\, \Delta A_i$ يكون كتلة الصفيحة T وعليه تكون M كتلة T معرفة على النحو التالي :

$$M = \lim_{\|\rho\| \to 0} \sum_i \rho(u_i, v_i)\, \Delta A_i \equiv \iint_R \rho(x, y)\, dA$$

العزم M_x للصفيحة T بالنسبة إلى المحور x يعرف على انه :

$$M_x = \lim_{\|\rho\| \to 0} \sum_i v_i \rho\, (u_i, v_i)\, \Delta A_i \equiv \iint_R y\, \rho(x, y)\, dA$$

والعزم M_y للصفيحة T بالنسبة إلى المحور y يعرف على أنه :

$$M_y = \lim_{\|\rho\| \to 0} \sum_i u_i \rho\, (u_i, v_i)\, \Delta A_i \equiv \iint_R x\, \rho\, (x, y)\, dA$$

لتكن T صفيحة لها شكل المنطقة R في المستوى xy إذا كانت الكثافة المساحية عنـــد (x, y) هـــي $\rho(x, y)$ حيث ρ دالة متصلة على R فإن :

١- كتلة T هي : $\quad M \equiv \iint_R \rho(x, y)\, dA$

٢- العزم للصفيحة T بالنسبة إلى المحور x, y هي :

$$M_x \equiv \iint_R y\, \rho\, (x, y)\, dA\ , \quad M_y \equiv \iint_R x\, \rho\, (x, y)\, dA$$

٣- مركز الثقل $(\overline{x},\overline{y})$ للصفيحة T هو :

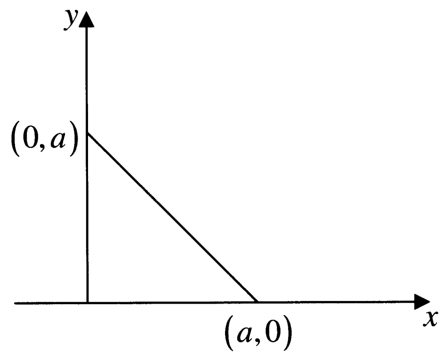
$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}\ ;\ \overline{y}=\frac{M_x}{M}$$

مثال (١)

صفيحة T لها شكل مثلث قائم متساوي الساقين طول كل منها a . أوجد مركز ثقل الـــصفيحة إذا كانت الكثافة عند النقطة Q تتناسب مع مربع المسافة من Q إلى الزاوية القائمة .

الحل

كما هو موضح بالشكل (٢-٤١)



الشكل (٢-٤١)

من المعطى أن معادلة الوتر هي : $x+y=a$

$$\rho(x,y)=k(x^2+y^2)$$

$$M=\iint_R k(x^2+y^2)\,dA=\int_0^a\int_0^{a-x} k(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$=k\int_0^a\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{a-x}dx=k\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]dx$$

$$\equiv k\,\frac{a^4}{6}$$

ومن التعريف السابق

$$M_y=\iint_R x\,k(x^2+y^2)\,dA=\int_0^a\int_0^{a-x} x\,k(x+y)\,dy\,dA=k\,\frac{a^5}{15}$$

ومن ذلك نحصل على

$$\overline{x}=\frac{k\,a^5/15}{k\,a^2/6}=\frac{2a}{5}$$

وحيث أن هناك تماثل فإن

$$\bar{y} = 2a/5$$

٢-١٣-٢ المساحة السطحية

ليكن $z = f(x,y) \geq 0$ ضمن المنطقة R في المستوى xy وَ لنفرض أن f لها مشتقات جزئية متصلة على R . من هذا ينتج مجسم محدود من أعلى بالسطح $z = f(x,y)$ ومن الأسفل بالمنطقة R.

فإن المساحة السطحية لهذا المجسم تعطى على الشكل الآتي :

$$A = \iint_R \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\, dA \qquad (١)$$

هذه الصيغة ممكن أن تطبق أيضاً إذا كانت $z = f(x,y) \leq 0$ على R .

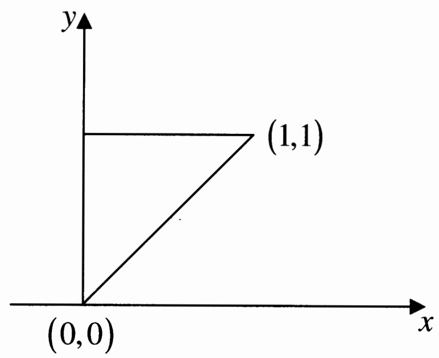
مثال (٢)

لتكن R منطقة مثلثية الشكل في المستوى oxy رؤوسها $(0,0,0)$ ، $(0,1,0)$ ، $(1,1,0)$ أوجد المساحة السطحية لجزء من المجسم المحدود من الأعلى بالمنحنى $f(x,y) = 3x + y^2$ ومن **الأسفل** بالمنطقة R.

الحل

المنطقة R محدودة بالمنحنيات $y = x$ ، $x = 0$ وَ $y = 1$. كما هو موضح بالشكل (٢-٤٢)

$$f(x,y) = 3x + y^2$$



الشكل (٢-٤٢)

بتطبيق الصيغة (١)

$$A=\iint_R \sqrt{3^2+(2y)^2+1}\,dA=\int_0^1\int_0^y (0+4y^2)^{\frac{1}{2}}dx\,dy$$

$$=\int_0^1 (10+4y^2)^{\frac{1}{2}}\,x\Big]_0^4 dy=\int_0^1 (10+4y^2)^{\frac{1}{2}}\,y\,dy$$

$$=\frac{1}{12}(10+4y^2)^{3/2}\Big]_0^1=\frac{14^{3/2}-10^{3/2}}{12}\cong 1.7\,\cdot$$

مثال (٣)

أوجد المساحة السطحية لجسم محدود من أعلى بالمنحنى

$$z=9-x^2-y^2$$

ومن الأسفل بالمستوى xy .

الحل

$$A=\iint_R \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy$$

حيث R المنطقة المحدودة بالدائرة $x^2+y^2=9$

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^3 (4r^2+1)^{\frac{1}{2}}r\;dr\;d\theta\approx 117.3$$

وذلك باستخدام الإحداثيات القطبية.

(٢-١٤) تـــمـــارين

١- أوجد المساحة السطحية لجزء من الأسطوانة $y^2+z^2=a^2$ الذي يقع داخل الأسطوانة $x^2+y^2=a^2$.

٢- أوجد مساحة المنطقة على المستوى $z=y+1$ وتكون داخل الأسطوانة $x^2+y^2=1$.

٣- أوجد المساحة السطحية لجزء من الجسم المحدود من أعلى بالسطح $z=y+\frac{x^2}{2}$ ومن الأسفل بالمربع الذي رؤوسه $(1,1,0),(1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ في المستوى xy.

في التمارين من ٤-١٠ أوجد الكتلة ومركز الثقل للصفيحة المحدودة بالمنحنيات المعطاة ولها الكثافة ρ

٤- $y=0$ ، $x=9$ ، $y=\sqrt{x}$ ، $\rho(x,y)=x+y$.

٥- $y=0$ ، $x=8$ ، $y=\sqrt[3]{x}$ ، $\rho(x,y)=y^2$.

٦- $y=0$ ، $y=4$; $y=x^2$ ، $\rho=k$

٧- $x=0$, $y=0$; $y=\sin x$; $x=\pi$ ، $\rho(x,y)=y$.

٨- $\rho(x,y)=1 , x=y^2 ; y-x=2 , y=-2 , y=3$

٩- $\rho(x,y)=4 , x=\sec x , x=\frac{-\pi}{4} , x=\frac{\pi}{4}, y=\frac{1}{2}$

١٠- $\rho(x,y)=y^2 , x=e^{-x} , y=0 , x=0 , x=1$

(١٣-٢)

● تحويلات التكامل المتعدد

Change Of Variables In Multiple Integrals

في بعض الأحيان تكون الدالة المكاملة أو المنطقة المكامل عليها فيها شئ من الصعوبة . لذا فإن بعض التحويلات تكون مفيدة لتسهيل عملية التكامل .

٢-١٥-١ نظرية

لتكن $x=f(u,v)$ ، $y=g(u,v)$ حيث f , g دوال لها مشتقات جزئية متصلة على R وَ $F(x,y)$ قابلة للتكامل على R فإن

$$\iint_R F(x,y)\,dxdy=\iint_{R'} F(f(u,v),g(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

حيث R' منطقة في المستوى uv تكون صورة المنطقة R تحت التحويل

$$y=g(u,v) ، x=f(u,v)$$

وَ

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

والأخير يسمى الجاكوبي لكل من x , y بالنسبة إلى u,v وَ $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv=dA$.

مثال (١)

أحسب $I=\iint_R (x^2+y^2)\,dxdy$ حيث R المنطقة المحدودة بالمنحنيات

$$xy=2 , xy=4 , x^2-y^2=9 , x^2-y^2=1$$

الحل

نستخدم التحويل $x^2 - y^2 = u$, $2xy = v$

المنطقة R تحول إلى R' الموضحة على النحو التالي

$$R' = \{ (u,v) : 1 \le u \le 9 , \ 4 \le v \le 8 \}$$

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_{R'} (x^2 + y^2) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

الآن نحاول إيجاد $x^2 + y^2$ بدلالة u,v

$$x^2 - y^2 = u \quad ; \quad 2xy = v$$

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = u^2$$

$$4x^2y^2 = v^2 \quad \text{بالجمع}$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = u^2 + v^2$$

$$(x^2 + y^2)^2 = u^2 + v^2$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix}$$

$$= 4x^2 + 4y^2$$

$$= 4(x^2 + y^2)$$

$$= 4(\sqrt{u^2 + v^2})$$

وحيث :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

فإن :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\iint_R (x^2 + y^2) dxdy = \iint_{R'} \sqrt{u^2 + v^2} \ \frac{dudv}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$$

حيث $R' = \{ (u,v) : 1 \le u \le 9 \ ; \ 4 \le v \le 8 \}$

$$I = \int_4^8 \int_1^9 \frac{dudv}{4} = 8$$

(٢-١٥-٢) نظرية

لتكن كل من

$$x=f(u\ ,v,w)$$
$$y=g\ (u\ ,v,w)$$
$$z=h\ (u\ ,v,w)$$

دوال لها مشتقات جزئية متصلة على Q' وَ $F(x,y,z)$ دالة قابلة للتكامل على Q فإن :

$$\iiint\limits_{Q} F(x,y,z)dxdydz \equiv \iiint\limits_{Q'} F(f(u\ ,v\ ,w)\ ,\ g(u,v,w)\ ,\ h\ (u,v,w))$$
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

حيث Q' مجسم في المستوى $u\ ,v\ ,w$ يكون صورة المجسم Q تحت التحويل

$$x=f\ \ (u\ ,v,w)$$
$$y=g\ \ (u\ ,v,w)$$
$$z=h\ (u\ ,v,w)$$

وَ

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

المقدار $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$ يساوي dV .

مثال (٢)

اكتب التكامل $\iiint\limits_{Q} F(x\ ,y\ ,t)\ dxdydz$ على

(أ) الشكل الأسطواني (ب) الشكل الكـــروي

الحل

معادلات التحويل في الإحداثيات الإسطوانية تكون

$$x=r\cos\theta \quad ; \quad y=r\sin\theta \quad ; \quad z=z \qquad (١)$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r$$

بالتالي

$$\iiint_Q F(x\ ,y,z)\ dxdydz = \iiint_{Q'} G(r,\theta,z)\ r\ drd\theta\ dz$$

حيث Q' صورة Q تحت التحويلات (1) وَ $G(r,\theta,z) = F(r\cos\theta\ ,r\sin\theta\ ,\ z)$ وهذا يتفق مع ما دُرس في السابق .

(ب) معادلات التحويل إلى الاحداثيات الكروية تكون :

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\phi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\phi$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\ \cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\rho\sin\phi\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= -\rho\sin\phi\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= -\rho\sin\phi\ \sin\theta\ (\ -\rho\sin^2\phi\ \sin\theta - \ \rho\cos^2\phi\ \sin\theta\ )$$
$$\quad -\rho\sin\phi\ \cos\theta\ (\ -\rho\sin^2\phi\ \cos\theta - \ \rho\cos^2\phi\ \cos\theta\ )$$
$$= \rho^2\sin\phi\ \sin^2\theta + \rho^2\sin\phi\ \cos^2\theta$$
$$= \rho^2\sin\phi$$

بالتالي

$$\iiint_Q F(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_{Q'} G(\rho,\phi,\theta)\ \rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

حيث Q' صورة Q تحت تأثير التحويل (1) وَ

$$G(\rho\ ,\phi\ ,\theta\ ) = F(\ \rho\ sin\phi\cos\theta\ ,\rho\ sin\phi\ sin\theta\ ,\rho\ cos\phi\ )$$

وهذا يتفق كذلك مع ما دُرس في السابق.

مثال (٣)

إذا كانت R هي المنطقة $x^2 + xy + y^2 \le 1$ فأثبت أن

$$I = \iint_R \overline{e}^{(x^2+xy+y^2)}\, dxdy = \frac{2\pi}{e\sqrt{3}}\ (e-1)$$

الحل

نضع

$$x = u\cos\alpha \ - \ v\sin\alpha$$
$$،\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$$

نختار α بحيث يمكن اختزال الحد uv بعد التعويض في $x^2 + xy + y^2$

نجـــــد أن

$$x^2 + xy + y^2 = (u\cos\alpha - v\sin\alpha)^2 + (u\cos - v\sin\alpha)(u\sin\alpha + v\cos\alpha) + (u\sin\alpha + v\cos\alpha)^2$$

$$= u^2\cos^2\alpha - 2uv\cos\alpha\sin\alpha + v^2\sin^2\alpha + u^2\cos\alpha\sin\alpha + uv\cos^2\alpha - uv\sin^2\alpha - v^2\sin\alpha\cos\alpha + u^2\sin^2\alpha + 2uv\sin\alpha\cos\alpha + v^2\cos^2\alpha$$

$$= u^2 + v^2 + u^2\cos\alpha\sin\alpha + uv(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - v^2\sin\alpha\cos\alpha$$

حتى نتخلص من الحد uv يجب ان نختار $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ أي $\alpha = \frac{\pi}{4}$ وبالتالي فإن

$$x = \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$I = \iint_R \overline{e}^{(x^2+xy+y^2)}\quad dxdy$$

$$= \iint_{R'} \overline{e}^{(\frac{3u^2}{2}+\frac{v^2}{2})}\ .1\ dudv$$

R' هي القطع الناقص $\frac{3u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \le 1$

الآن نضع

باختيار مناسب لكل من $a\,,b$

$$u = a\rho\cos\phi$$
$$v = b\rho\sin\phi$$

بحيث تصبح المعادلة $\frac{3u^2}{2}+\frac{v^2}{2}$ معادلة دائرة .

$$\frac{3}{2}\,a^2\rho^2\cos^2\phi+\frac{1}{2}b^2\rho^2\sin^2\phi=\rho^2$$

ومنه $\frac{b^2}{2}=1$; أي أن $\frac{3}{2}a^2=1$

$$a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad ; \ b=\sqrt{2}$$

بالتالي

$$u=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho\cos\theta$$
$$v=\sqrt{2}\rho\sin\theta$$
$$I=\iint_R \overline{e}^{(x^2+xy+y^2)}\ dxdy$$
$$I=\iint_{R'}\overline{e}^{(\frac{3}{2}u^2+\frac{v^2}{2})}\ dudv=\iint_{R''}\overline{e}^{\rho^2}\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\rho,\theta)}\right| d\rho\ d\theta$$

حيث R'' هي الدائرة $1\le\rho$

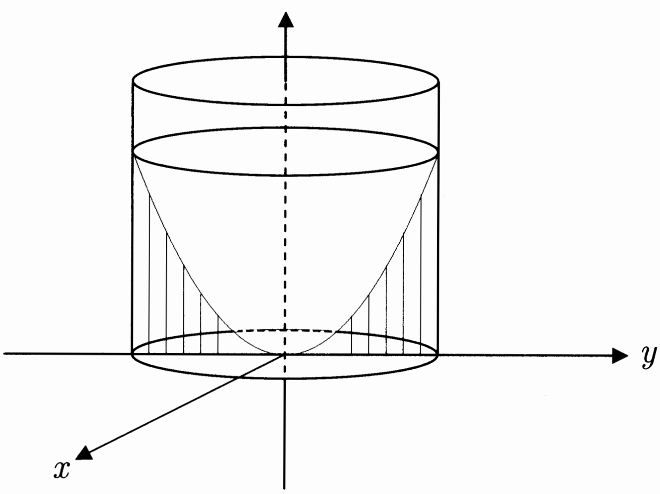
$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=\begin{vmatrix} u_\rho & u_\theta \\ v_\rho & v_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho\sin\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\rho\cos\theta \end{vmatrix}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\rho$$
$$I=\iint_{R''}2e^{-\rho^2}\rho\ \ d\rho\ d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^1\ e^{-\rho^2}d\rho\ d\theta=\frac{2\ \pi}{\sqrt{3}e}\ [\ e-1\ ]$$

مثال (٤)

أوجد حجم المنطقة الواقعة فوق المستو xy والمحدودة بالمجسم $z=x^2+y^2$ والإسطوانة $x^2+y^2=a^2$.

الحل

أنظر الشكل (٢-٤٣)



الشكل (٢-٤٣)

وحيث إن جزء من المجسم هو اسطوانة فإن الإحداثيات الإسطوانية تكون مناسبة .

الحجم المطلوب هو (انظر الشكل (٢-٤٣)).

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_o^{r^2} dzrdrd\theta=2\pi\frac{r^4}{4}\Big|_0^a=\frac{2\pi}{4}a^4$$

مثال (٥)

باستخدام التحويل $x+y=u$ ، $y=uv$ أثبت أن

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}e^{y/(x+y)}\ dydx=\frac{e-1}{2}$$

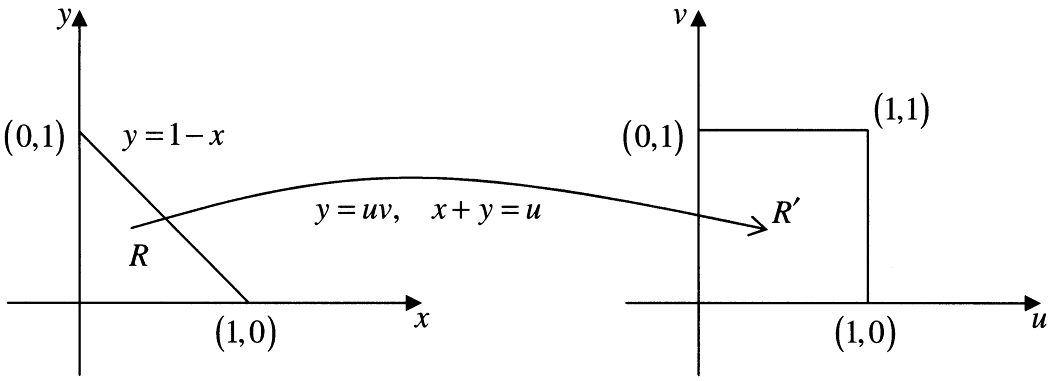
الحل

واضح من الشكل (٢-٢٤) أن صورة $y=1-x$ تحت التحويل المذكور هي $u=1$ وصورة

$y=t \quad 0\le t\le 1$

$x=0$

هي $u=t\ ,\ 0\le t\le 1$, $v=1$ وصورة $x=t \quad 0\le t\le 1$, $y=0$ هي $u=t\,,0\le t\le 1$, $v=0$



الشكل (٢-٤٤)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u + uv$$

$$= u - vu + uv$$

$$= u$$

$$I = \iint_{R'} e^{uv/u} \; u \; du \; dv = \iint_{R'} e^{v} \; u \; du \; dv$$

حيث $R' = \{ (u,v) \; : \; 0 \le u \le 1 \; ; \; 0 \le v \le 1 \}$

ومنه نحصل على

$$I = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 \left[e^v\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,[e-1]$$

مثال (٦)

أثبت أن حجم المجسم المحدود بالمخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ والسطح الزائدي $z = x^2 + y^2$ هو $\frac{\pi}{6}$.

الحل

من الواضح أن الاحداثيات الأسطوانية تكون مناسبة وبالتالي تكون

تحولات z من r^2 إلى r $\quad (r^2 \le z \le r)$ $\quad \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r} dz\, r\, dr\, \theta$

وتحولات r من 0 إلى 1 $\quad (r = r^2)$ $\quad (0 \le z \le r)$

وتحولات θ من 0 إلى 2π $\quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

$$2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3)\, dr = 2\pi\left(-\frac{r^4}{4} + \frac{r^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\,(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

مثال (٧)

أوجد حجم المجسم المحدود بالسطوح

$$xy=1, xy=9, xz=4, xz=36, yz=25, yz=49$$

وذلك باستخدام التحويل $xy=u \;;\; xz=v \;;\; yz=w$

الحل

$$V=\iiint_Q dV = \iiint_Q dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{Q'} \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,t)} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = y\,(-xz)-x(yz)$$

$$= \left| -2xyz \right| = 2xyz$$

$$xy\;xz\;yz = x^2y^2z^2 = uvw$$

$$x^2y^2z^2 = uvw$$

$$V=\iiint_{Q'} \frac{1 \qquad du\,dv\,dw}{2\sqrt{uvw}} = \frac{1}{2}\int_1^9\int_4^{36}\int_{25}^{49} \frac{dw}{\sqrt{w}}\;\frac{dv}{\sqrt{v}}\;\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{w}\int_1^9 \; 2\sqrt{v}\int_4^{36} \; 2\sqrt{4}\int_{25}^{49} \right]$$

$$= 4[\,(3-1)\,(6-2)\,(7-5)] = 4(2(4)(2)$$

$$=16(4)=64$$

(٢-١٦) تـــمـــارين

١- لتكن R المنطقة المحدودة بالمستقيمات $x+y=1$ وَ $x=0$ وَ $y=0$

فأثبت أن :

$$\iint_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy = \frac{\sin 1}{4}$$ [ارشاد: ضع $x-y=u$ ، $x+y=v$]

٢- أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات $xy=4$ ، $xy=8$ ، $xy^3=5$ ، $xy^3=15$

[ارشاد: ضع $xy=u$ ، $xy^3=v$]

٣- كرة نصف قطرها a لها فتحة على شكل اسطوانة نصف قطرها b إذا كان محور الاسطوانة يتطابق مع قطر الكرة فأثبت أن الحجم المتبقى من الكره يساوي $\frac{4}{3}\pi\left[a^3-(a^2-b^2)\right]^{3/2}$.

٤- أثبت أن

$$\int_{x=1}^{3}\int_{y=\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx + \int_{x=2}^{4}\int_{y=\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,dy dx = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

٥- أوجد المساحة المحدودة بالمنحنيات $xy=4$ ، $xy=8$ ، $xy^3=5$ ، $xy^3=15$

[ارشاد: ضع $xy=u$ ، $xy^3=v$] الجواب $2ln3$

٦- أثبت أن

$$\int_0^x \left\{\int_0^t F(u)\;du\right\} dt = \int_0^x (x-u)\;F(u)du$$

[ارشاد : ضع $I\;(x)=\int_0^x \left\{\int_0^t F(u)\;du\right\}\;dt$ ،

$$J(x)=\int_0^x (x-u)\;\;F(u)\;\;du$$

فإن

$$I'(x)\;=\;\int_0^x F(u)\;\;du$$

$$,\;J'(x)=\int_0^x F(u)\;dx$$

من ذلك استنتج أن

$$I'(x)=J'(x)$$

وبالتالي $I(x)-J(x)=c$ ، c ثابت

وحيث $J(0)=J(0)=0$ فإن $c=0$

وبالتالي $I(x)=J(x)$]

بعض الأحيان هذه النتيجة تكتب على الشكل

$$\int_0^x\int_0^x \;F(x)dx^2 \;=\; \int_0^x (x-u)F(u)du$$

ويمكن أن يعمم هذا إلى

$$\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x F(x)dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-u)^{n-1}F(u)\,du$$

المصطلحات

التكامل الثنائي

الحجم، المساحة

المنطقة المستوية R_x و R_y

التكامل المتعاقب

الإحداثيات القطبية

التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية

التكامل الثلاثي

الإحداثيات الأسطوانية

الإحداثيات الكروية

العزوم ومركز الثقل

المساحة السطحية

تحويلات التكامل المتعدد

الصيغ الأساسية

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx \;;\; \iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dxdy$$

$$A = \iint_R 1\,dA \quad V = \iiint_Q 1\,dV \;,\; \iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dx\,dy$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dv = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{K_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{K_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,rdzdrd\theta$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{F_1(\phi,\theta)}^{F_2(\phi,\theta)} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$\iint_R F(x\,,\,y)\,dxdy=\iint_{R'} F(\ f(u\,,v)\,,\,g(u\,,v)\,)\left|\frac{\partial\,(x\,,y)}{\partial\,(u\,,v)}\right|du\,dv$$

تـــمــــارين عامة

في التمارين ١-٤ احسب التكاملات :

١- $\int_0^1\int_x^{3x} ye^{(x^3)}dydx$

٢- $\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^x \sin x^2 dydx$

٣- $\int_{-1}^1\int_0^2\int_{2x}^{5x} e^{xy}dzdydx$

٤- $\int_1^x\int_0^x\int_0^{1/(x+y)}\ln(x+y)dzdydx$

في التمارين ٥-٧ غير ترتيب التكامل ثم احسب كل منها :

٥- $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{(y^3)}dydx$

٦- $\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{(x^2-2x)}}{x+1}dxdy$

٧- $\int_1^{\sqrt{3}}\int_x^{\sqrt{3}} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}dydx$

في التمارين ٨-١١ أوجد المساحة A لمنطقة في المستوي xy باستخدام التكامل الثنائي :

٨- المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x=y^2$ و $y=x^3$.

٩- المنطقة المحدودة بالمنحنيات $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ و $x+y=a$.

١٠- المنطقة خارج المنحنى $r=1+\cos\theta$ وداخل المنحنى $r=1+\sin\theta$.

١١- المنطقة خارج المنحنى $r=3-\sin\theta$ و داخل المنحنى $r=5\sin\theta$.

في التمارين ١٢-١٧ احسب التكامل المتعدد :

١٢- $\iint_R \sin(x+y)dA$ حيث R المنطقة في المستوي xy ومحدودة بالمستقيمات $x=\dfrac{\pi}{2}$ و $y=0$ و $y=x$.

١٣- $\iint_R (3x-5)dA$ حيث R المنطقة المحدودة بالمستقيمات $y=5+x$ و $y=-x+7$ و $x=0$ و $x=1$.

١٤- $\iint_R (4+x^2)dA$ حيث R المنطقة بين $y=1+x^2$ و $y=3-x^2$.

١٥- $\iiint_D (z^2+1)dV$ حيث D المجسم المحدود من الاسفل بالمخروط $z^2=3x^2+3y^2$ ومن الأعلى بالكره $x^2+y^2+z^2=4$.

١٦- $\iiint_D xydV$ حيث D المجسم في المثمن الاول والمحـــدود بالمـــستويات الاحداثيـــة و الاسطوانتين $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$.

١٧- $\iiint_D xyzdV$ حيث D المجسم المحدود من الاسفل بالكره $z=-\sqrt{9-x^2-y^2}$ و من الأعلى بالمستوي xy .

في التمارين ١٨-٢٠ اوجد المساحة السطحية S للسطح التالي :

١٨- الجزء من الصفيحة $z=\dfrac{1}{2}y^2$ المحدودة بالمستويات $y=2\sqrt{2}$ ، $y=x$ و $x=0$.

١٩- الجزء من السطح $z=xy$ داخل الاسطوانة $x^2+y^2=1$.

٢٠- الجزء من السطح $z=\dfrac{2}{3}(x^{3/2}+y^{3/2})$ المحدود بالمـــستويات $x=0$ ، $y=1$ و $x=7y$

في التمارين ٢١-٣٠ اوجد الحجم V للمناطق التالية :

٢١- المنطقة المحدودة بالمجسمات $z=x^2+y^2$ و $x^2+y^2=z^2$.

٢٢- المنطقة المحودة بالسطح $z=e^x$ وبالمستويات $x=y$ ، $y=0$ ، $x=1$ و $z=0$.

٢٣- المجسم المحدود من الجوانب بالاسطوانة $r=4\sin\theta$ ومن الأعلى بالمخروط $r=z$ ومن الاسفل بالمستوي xy .

٢٤- المجسم في المثمن الاول والمحدود بالمستويات الاحداثيـــة والاســـطوانة $x^2+y^2=5y$ وبالكره $x^2+y^2+z^2=25$

٢٥- المجسم المحدود مـــن الاســـفل بالـــسطح $z=4x^2+y^2$ ومـــن الاعلـــى بالـــسطح $z=16-3y^2z$.

٢٦- المجسم المحدود بالسطح $\dfrac{1}{2}z=-9+x^2+y^2$ وبالسطح $x^2+y^2+z=9$.

٢٧- المجـــسم في المـــثمن الاول والمحـــدود بالمـــستويات $z=x+2y$ و $x+3y=6$. وبالمستويات الاحداثية .

٢٨- المجسم في المثمن الاول والمحدود من أعلى بالمستوي $z=3$ ومـــن الاســـفل بـــالمخروط $x^2+y^2=3z$ ومن الجوانب بالمستويات $y=0$ و $x=\sqrt{3}y$.

٢٩- المجسم المحدود من اعلـــى بـــالكره $x^2+y^2+z^2=49$ ومـــن الاســـفل بالـــسطح $x^2+y^2=3z+21$.

٣٠- المجسم المحدود من الجوانـــب بالاســـطوانة $x^2+y^2=6x$ ومـــن اعلـــى بالـــسطح $x^2+y^2=4z$ ومن الاسفل بالمستوي $z=-2$.

٣١- اوجد مركز الكتلة لقطعة تشغل حيزاً محدود بالمخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و المستوي $z=3$ إذا كانت كثافة الكتلة عند أي نطقة تساوي المسافة من النقطة إلى المستوي xy.

٣٢- اوجد الكتلة ومركز الكتلة لجسم محدود من الجوانب بالاسطوانة $x^2+y^2=4$ ومن الأعلى بالمخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ومن الاسفل بالمستوي xy ، إذا كانت الكثافة عند (x,y,z) معطاة بالعلاقة $\delta(x,y,z)=z+3$.

٣٣- اوجد مركز الثقل لجسم محدود من الاسفل بالسطح $z=x^2+y^2$ ومن الأعلى بالمخروط $z^2=x^2+y^2$.

٣٤- اوجد الكتلة لقطعة تشغل كرة نصف قطرها a إذا كانت الكثافة عند أي نقطة تساوي المسافة بين النقطة والحد الخارجي للكرة .

في التمارين ٣٥-٣٦ احسب التكامل مستخدماً التحويل المعطى :

٣٥- $\iint_R xdA$ حيث R المنطقة المحدودة بالمستوي $xy=1$ ، $xy=2$ ، $x(1-y)=1$ و $x(1-y)=2$. ضع $x=u+v$ ، $y=\dfrac{v}{u+v}$.

٣٦- $\iint_R (x-y^2)dA$ حيث R المنطقة المحدودة بالمستوي $x=y^2-y$ ، $x=2y+y^2$ و $y=2$ ضع $x=2u-v+(u+v)^2$ و $y=u+v$.

في التمارين ٣٧-٣٨ احسب التكامل مستخدماً تحويل مناسب :

٣٧- $\iint_R (2x-y^2)dA$ حيث R منطقة محدودة بالمستقيمات $x+y=2$ ، $x-y=3$ ، $x-y=1$ و $x+y=4$.

٣٨- $\iint_R \cos\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right)dA$ حيث R منطقة محدودة بالمستقيمات $x=0$ ، $x+y=4$ ، $x+y=2$ و $y=0$.

٣٩- احسب $\int_0^\infty \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ وذلك باستخدام العلاقة $\int_a^b e^{-xy}dx=\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$.